Arthur Jaffe; Frank Quinn

„Teoretická matematika" aneb Jak smířit matematiku s teoretickou fyzikou

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 41 (1996), No. 1, 25--37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139718

„Teoretická matematika“
aneb
Jak smířit matematiku s teoretickou fyzikou

Arthur Jaffe a Frank Quinn

Je spekulativní uvažování v matematice nebezpečné? Některé nedávné případy interakce mezi matematikou a fyzikou dodávají této otázce na důrazu: tradiční matematické normy odrazují od spekulací, jež jsou předivem teoretické fyziky. V praxi může tato metoda přinést výhody, ale může také vést k některým nepříjemným a destruktivním následkům. Je na místě vyslovit vážné varování a zabývat se problémem, dříve než dojde ke zjevným škodám, a nikoli až dodatečně. Zváživše možná nebezpečí, navrhujeme uspořádání, v němž spekulativní uvažování může sehrávat zdravou a prospěšnou roli.

Užívání rigorózních důkazů je pro moderní matematiku jedním z nejcharakterističtějších znaků. Tato praxe, jež je výsledkem doslova tisíciletí kultivace, dala matematice jasnost a spolehlivost, s níž se žádná jiná věda nemůže měřit. Ale učinila také matematiku pomalou a těžkopádnou; lze s úspěchem tvrdit, že je to nejdisciplinovanější z lidských intelektuálních aktivit.

Skupiny a jednotlivci uvnitř matematické obce se čas od času pokoušeli dopřát si trochu svobody v podrobnostech argumentace. Výsledky byly smíšené, někdy též katastrofální. A přece dnes v některých oblastech opět pozorujeme snahu opřít matematiku o intuitivní uvažování bez důkazů. Do určité míry je to staré historické schéma, jež opakují lidé, kteří si toho nejsou vědomi. Ale může jít také o počátek fundamentálních změn v organizaci matematiky. V každém případě je dnes nezbytné přezkoumat roli důkazů v chápání matematiky a vytvořit konstruktivní rámec pro zmíněné směry vývoje.

Začneme diskusí stavu ve fyzice, jednak proto, že některé současné problémy jsou důsledkem interakce s teoretickou fyzikou, a zčásti také proto, že odtud získáme užitečný model pro možné sociologické paralely. Poté se obrátíme k historii matematiky pro příklady přínosu a rizika nerigorózních pracovních metod. Na závěr navrhneme uspořádání, jež by umožnilo různým přístupům koexistovat.

Z původního textu *„Theoretical Mathematics“: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics*, Bull. Amer. Math. Soc. *29* (1993), 1–13.
Přeložil Pavel Exner.

Teoretický a rigorózní přístup

K informaci o matematických strukturách se typicky dospívá ve dvou etapách. Nejprve se rozvíjí intuitivní chápání, formulují se hypotézy spolu se spekulativním náčrtem jejich zdůvodnění. Poté se hypotézy a spekulativní úvahy korigují; vypracování důkazů je činí platnými výsledky. Budeme užívat termínu *teoretická* matematika pro spekulativní a intuitivní metody; fázi zaměřenou na důkazy označujeme jako *rigorózní*. Nepřejeme si být zapleteni do diskuse o této volbě terminologie; není to hlavní námět našeho článku. Jako vhodný úvod vysvětlíme nicméně stručně, co rozumíme teoretickým a rigorózním přístupem.

Počáteční etapy matematického objevu — intuitivní úvahy a hledání hypotéz obdobné teoretické práci v přírodních vědách — zahrnují spekulace o povaze jsoucna přesahující hranice ověřeného poznání. To je důvod, proč si vypůjčujeme od fyziky pojem „teoretická". V matematice má tento termín také starší význam, totiž identifikovat „čistou" vědu jako protiklad aplikované; považujeme toto označení za archaické a nebudeme je užívat.

Výsledky teoretické práce vyžadují opravy, zjemnění a prověrku prostřednictvím experimentu nebo důkazu. Tvrdíme tedy, že úloha rigorózního důkazu v matematice je funkčně analogická roli experimentu v přírodních vědách. Tato teze může působit nezvykle, ale přinejmenším matematikům by měla být po určitém rozmyšlení jasná. Důkazy slouží dvěma hlavním účelům. Jednak poskytují způsob zjišťování platnosti matematických tvrzení podobně jako laboratorní zkoušky, jichž užívají k ověřování jiné vědy. Vedle toho akt hledání důkazu často vede jako vedlejší výsledek k novým způsobům chápání a nečekaným novým datům, právě tak jako laboratorní práce.

Matematici mají možná dokonce lepší experimentální přístup k matematické realitě než laboratorní vědy k jejímu fyzikálnímu protějšku. To je záležitost modelování: fyzikální jev se aproximuje matematickým modelem, který lze studovat přesnými metodami, neboť je přístupnější. Tato přístupnost má rovněž důsledky pro matematiku na společenské úrovni. Matematika vykazuje mnohem jemnější dělení na podobory než fyzika, protože její metody dovolují hlubší proniknutí do předmětu zájmu.

Ač je však užití důkazů v matematice funkčně obdobné experimentu, nenavrhujeme nazývat důkazy „experimentální" matematikou. Tento termín má již zavedený a příhodný význam, totiž jako označení pro numerické výpočty a počítačové simulace coby testy matematických idejí. Ve skutečnosti se výsledky počítačových experimentů často předkládají způsobem, jemuž říkáme teoretický: na základě zkušebních příkladů a srovnání se vyslovují obecné závěry. Ty pak nemusí být bezpodmínečně platné a snaha o nalezení skutečných důkazů vyjevuje výjimky a omezení.

Rozdělení úkolů

Ve fyzice jsme se museli smířit s dělbou práce mezi teoretiky a experimentátory. Ve skutečnosti však toto rozštěpení začalo být zjevné teprve nedávno. Až do začátku dvacátého století existovala v zásadě jediná fyzikální obec. Považovalo se za ideál, že titíž lidé se budou oddávat teoretickým spekulacím a ověřovat své nápady laboratorními pokusy, a většinou tomu také tak skutečně bylo.

Rozkol začal být jasný v Evropě kolem roku 1900: tou dobou již existovalo tolik fyziků zaměřených výhradně na teoretické aspekty, že bylo možné odlišit dvě rozdílná společenství [H]. Ve Spojených státech postupoval tento proces poněkud pomaleji. E. C. Kemble, jenž pracoval na Harvardově univerzitě v oblasti kvantové teorie, je obecně považován za prvního Američana, který získal doktorát v čistě teoretické fyzice (ačkoli jeho disertační práce z roku 1917 obsahovala experimentální dodatek).

Bylo by ovšem mylné považovat oddělení teoretického a experimentálního společenství fyziků za projev jejich vzájemné nezávislosti. Teorie je životně důležitá pro experimentátory, aby mohli identifikovat náměty pro zásadní testy a interpretovat data. Experiment je životně důležitý pro teoretiky, neboť vede a koriguje jejich spekulace. Teoretické a experimentální skupiny jsou nestabilní a neefektivní, pokud se nevyskytují v úzce interagujících párech.

Srovnejme tuto dělbu práce se současnou situací v matematice. Stále se považuje za ideál, že titíž lidé spekulují o matematických strukturách a ověřují výsledky svých úvah rigorózními důkazy, a v praxi tomu tak většinou je. Dokonce na individuální úrovni zřídkakdy uznáváme teoretickou matematiku za vhodný hlavní obor činnosti.

Pokusy rozdělit matematické snažení tímto způsobem již v minulosti existovaly, leč skončily většinou nezdarem. Co je toho příčinou? Je snad v matematice něco, co zbavuje uvedenou analogii s fyzikou platnosti a zabraňuje bifurkaci? Je „teoretická matematika" ve své podstatě oxymóron, řečnické spojení protikladných pojmů? Či snad měly minulé pokusy nějakou vadu, jež vedla k jejich nezdaru, ale jíž se lze dnes vyhnout?

Nové vztahy k fyzice

Nové spojovací články s fyzikou představují významnou sílu živící spekulace v matematice. V nedávné době jsme byli svědky erupce matematice podobných aktivit ve fyzice pod názvy jako „teorie strun", „konformní teorie pole", „topologická kvantová teorie pole" a „kvantová gravitace". Z větší části iniciativa přitom vycházela od jedinců, kteří jsou vzděláním teoretičtí fyzikové vysokých energií. Nejslavnější a nejvlivnější z nich (ač nikoli nejproblematičtější) je Edward Witten.

Z fyzikálního hlediska většina této práce ještě nedospěla do stadia, kdy je možné činit ověřitelné předpovědi o přírodě. Navíc jde často o „modely na hraní" zkonstruované jako jisté analogie reálných jevů. A některé závěry, jež by mohly vypovídat o skutečném světě, se týkají úkazů experimentálně nedosažitelných: částic o neuvěřitelné energii, pohybů ve škále velikosti vesmíru či vzniku nových vesmírů.

Jedním důsledkem tohoto nedostatku předpovědí je, že tito fyzici jsou odříznuti od své předpokládané experimentální obce; postrádají zdroj relevantních fyzikálních fakt, jež by omezovala a inspirovala jejich teoretizování. Protože pokrok vyvěrá z interakce mezi teorií a experimentem, teoretická skupina nemůže dlouho existovat v izolaci. Po pravdě řečeno většina fyzikální obce aktivní v hlavním proudu hledí na tyto výboje s podezřením vzhledem k jejich izolaci od tak zvaného „reálného světa".

Ve skutečnosti však tito fyzikové nejsou osamoceni. Našli si nové „experimentální partnery", jimiž jsou matematici. Jsou to nyní oni, kdo zásobují zmíněné fyziky spolehlivými informacemi o systémech, které studují. A ti často adresují matematikům své spekulace, aby stimulovali novou „experimentální" práci. A za velký úspěch se považuje porozumění matematické, nikoli fyzikální podstatě jevů. Výsledkem není nová částice, ale popis reprezentací neobvyklé „monstrózní" grupy pomocí vrcholových operátorů v Kacových–Moodyho algebrách. Nezískali jsme novou fyzikální teorii, ale nový pohled na polynomiální invarianty uzlů a článků na 3-varietách pomocí Feynmanových dráhových integrálů či reprezentací kvantových grup.

Tito fyzikové pracují stále spekulativním a intuitivním způsobem vlastním teoretické fyzice. Mnohým z nich se nedostalo vzdělání v rigorózních metodách a nemají ani o ně zájem. Zabývají se teoretickou matematikou. Někteří vedoucí matematici tuto práci chválí a tvrdí, že bychom s ní měli držet krok. Výsledkem je, že část těch, co respektují autority, přejímá spekulativnější pracovní metody.

Z tohoto popisu je možno učinit závěr, že část matematiky už bifurkací prošla. Tyto oblasti získaly fungující „teoretický" protějšek, teoretické fyziky, a tradiční matematikové se stali partnerským společenstvím majícím na starosti rigorózní ověřování.

K tomu ovšem došlo, aniž by se vyvinuly společenské normy a vzory chování, jež si vyžaduje stabilita nových struktur. Nebudou-li rychle vytvořeny a akceptovány takovéto „tradiční hodnoty", nové vztahy mezi matematikou a fyzikou se mohou snadno zhroutit. Fyzici se vrátí ke svým tradičním partnerům, rigorózním matematikům zůstane na krku úklid a matematici, kteří se nechali nalákat na teoretičtější způsoby práce, se jako reakce dočkají ignorování. Abychom pochopili, o co jde, podívejme se nejprve do minulosti.

Dřívější vztahy k fyzice

Mnohovrstevné vztahy mezi matematikou a fyzikou jsou ještě starší, než bylo jejich konstituování jako samostatných disciplín. Části matematiky, která se pohybuje po hranici mezi nimi a přesahuje ji, se běžně říká *matematická fyzika*, ačkoli zformulovat přesnou definici tohoto oboru je pravděpodobně nemožné. Výrazná škola matematické fyziky se vytvořila zejména v posledních zhruba devadesáti letech; soustřeďovala se kolem osobností jako D. Hilbert, F. Klein, H. Poincaré, M. Born, později H. Weyl, J. von Neumann, E. P. Wigner, M. Kac, A. S. Wightman, R. Jost a R. Haag, vesměs lidí majících jak matematické, tak i fyzikální vzdělání. Často pracovali na problémech motivovaných fyzikou, ale uchovávali matematické tradice a stupnici hodnot.

Výsledky, jež tato škola v různých dobách přinesla, byly relevantní jak pro matematiku, tak i pro fyziku. Jejich rozvoj postupoval uváženým tempem, v němž se hromadily závěry představující dlouhodobý zájem. Z mnoha nedávných příkladů jmenujme několik: existence kvantové teorie pole a její kompatibilita s teorií relativity, Liebovy a Baxterovy výsledky o mřížových modelech a odpovídajících přenosových (*transfer*) maticích, Schonovy a Yauovy výsledky ohledně věty o pozitivní energii v teorii relativity a jejím vztahu ke geometrii minimálních povrchů, práce Ruellovy a dalších o dynamických systémech a turbulenci, operátorově algebraický přístup k lokální kvantové teorii a konečně Connesův raný zájem o fyziku, z něhož vzešly jeho matematické výsledky týkající se faktorů a později základy nekomutativní geometrie.

Hlavní věc je, k čemu přitom *nedošlo*. Práce této školy je charakterizována vědeckou úrovní a znalostí literatury, jež snesou měřítka nejlepších matematických tradic. Definice, formulace tvrzení ani důkazy vět neobsahují žádné nejednoznačnosti. Je to rigorózní matematika ve své obvyklé podobě. I v bezprostřední blízkosti fyziky byly zachovány tradiční matematické hodnoty. Matematičtí fyzikové mají ovšem přístup k nesmírně bohaté zásobě spekulativních výsledků pocházejících od jejich teoretických kolegů. Ale tyto spekulace byly tradičně určeny fyzikům, nikoli matematikům.

Teoretická fyzika a matematická fyzika mají značně rozdílnou kulturu a často se mezi nimi objevuje napětí. Teoretická práce ve fyzice nemusí obsahovat ověření či důkaz, neboť kontakt s realitou může být přenechán experimentu. Proto má fyzikální sociologie snahu snížit reputaci důkazu, jejž považuje za postradatelnou součást teoretického procesu. Richard Feynman nacházíval potěšení v tom, že škádlil matematiky za jejich neochotu užívat metod, jež „fungují", ale nemohou být rigorózně zdůvodněny [F, G2]. Považoval za zcela uspokojivé prověřovat platnost matematických tvrzení na několika vhodně zvolených případech.

Na matematické straně E. J. McShane jednou přirovnal logiku „fyzikální argumentace" k „ženě, jež dokáže vysledovat svůj původ až k Vilému Dobyvateli s pouhými dvěma mezerami", což je zcela typické pro matematický přístup. Existuje obecná shoda o tom, že vývoj musí kráčet rozvážným krokem, a nikoli udýchaně cválat za fyzikovou vizí. McShane a většina společenství matematických fyziků odmítají jako nevhodný teoretický přístup pro jeho neformálnost hraničící s nezodpovědností.

Je relevantní poznamenat, že většina teoretických fyziků chová značný respekt ke svým experimentálním protějškům. Vztahy mezi fyzikou a matematikou by byly mnohem snazší, kdyby fyzikové uznávali matematiky za „intelektuální experimentátory", místo co by je považovali za zbytečně puntičkářské teoretiky. Typický přístup fyziků k matematikům lze charakterizovat citátem z knihy P. W. Andersona: „Mluvíme zde o teoretické fyzice, pročež matematická rigoróznost je pochopitelně irelevantní a nedosažitelná".[1]) Ve skutečnosti je rigoróznost relevantní a možná stejně jako experimentální data, a stejně jako ona by měla užívána, kdykoli je to možné. Studenti fyziky jsou nicméně často indoktrinováni antimatematickými postoji; střetnou-li se pak s matematickým problémem, nejenom uvažují teoreticky, ale většinou i popírají, že by jejich argumentace byla neúplná.

Ne vše v matematické fyzice je tak matematicky čisté jako výše popsané případy. Kupříkladu práce německého matematického fyzika K. Symanzika byla z větší části teoretická. Dal si ovšem pozor, aby nevznášel nárok na rigoróznost tam, kde jí nemohl

---

[1]) Anderson tento výrok připisuje Landauovi [A, p. 132] a pokračuje: „Není to přesná citace, ale vystihuje smysl". Je ovšem charakteristické, že si tuto pasáž pamatuje nepřesně; ta zní [LL]: „Nebudeme ve výkladu usilovat o matematickou přesnost, protože v teoretické fyzice je to stejně iluzorní...".

dosáhnout. V roce 1968 učinil spolu s matematikem S. R. S. Varadhanem seriózní pokus zformulovat úplné důkazy pro větší část svého teoretického programu. O několik let později se tohoto cíle podařilo dosáhnout E. Nelsonovi, K. Ostervalderovi, R. Schraderovi a dalším, což mělo dalekosáhlé důsledky etablující vztahy mezi kvantovou teorií, teorií pravděpodobnosti a statistickou fyzikou.

Můžeme se také zmínit o dvojici autorů, kteří se po nějakou dobu zabývali čistě matematickými otázkami z téměř úplně teoretického hlediska, totiž B. Mandelbrotovi a M. Feigenbaumovi; viz populární přehled v [G1] a práci [Kr] vyjadřující matematickou nespokojenost s touto aktivitou.

Většinový názor mezi matematickými fyziky nepovažuje čistě teoretický přístup za platný matematický styl. Je ovšem nutné říci, že matematici angažující se v „nových vztazích" k fyzice se liší od tradičních matematických fyziků. Geometři, topologové a lidé zabývající se teorií reprezentací začali vstupovat do kontaktu s fyziky. Tito matematici nepřivykli kulturnímu rozdílu mezi oběma disciplínami a neuvědomují si analogie v jejich vlastní kolektivní zkušenosti, jež by je měly činit citlivými k rizikům teoretických pracovních metod. To nás nutí se zeptat, zda i oni nezačnou rovněž zavrhovat čisté teoretizování, jakmile nabudou více zkušeností.

Některé úspěchy

Obraťme se nyní k situacím, kdy si matematika zadala s teoretickým pracovním stylem. Začněme z pozitivní strany. Formulace hypotéz je nejběžnější z matematických aktivit nezahrnujících důkaz. Hypotézy jsou všelijaké, od brilantních až k nudným, od neuvěřitelných ke zjevným. Filtrace, kterou procházejí, je spíše výsledkem zájmu než činnosti redaktorů a recenzentů. Skvělé hypotézy dokázaly inspirovat vznik celých oborů. Z nejslavnějších příkladů jmenujme Riemannovu hypotézu, Fermatovu „velkou větu" a Poincarého hypotézu. Soupis Hilbertových problémů ve své úchvatné šířce a hloubce ovlivnil nemalou měrou rozvoj matematiky v našem století. Dalšími příklady jsou Adamsova hypotéza v topologii, několik Serreho problémů, Novikovova hypotéza a Wightmanovy axiomy pro kvantovou teorii pole.

Některé hypotézy jsou doprovázeny technickými detaily či návrhem důkazu. Tak například „Weilovy hypotézy" podávají náčrt přístupu k p-adické analogii Riemannovy hypotézy. Naplnění tohoto programu, o něž se zasloužili Grothendieck a Deligne, si získalo uznání jako velký úspěch moderní algebraické geometrie. Podobně slavný je Faltingův důkaz Mordellovy hypotézy, jenž je součástí úsilí o vypořádání se s Fermatovou „větou". „Langlandsův program" zaměřený na porozumění automorfním formám byl velkým podnětem pro tento obor a „Moriho program" vyšetřování algebraických ztrojení vnesl život do této oblasti. Klasifikace konečných prostých grup byla uskutečněna na základě programu navrženého Gorensteinem.

Společnou charakteristikou těchto programů je, že byly explicitně spekulativní povahy v době, kdy byly formulovány (či přinejmenším byla jejich spekulativita rychle rozpoznána jako ve Fermatově případě). Představovaly cíl, k němuž bylo nutné se dopracovat, a hlavní zásluha za úspěch se zjevně přičítala tomu, kdo nalezl důkaz.

Jiný typ matematické práce se nachází na půl cestě mezi tradičním a teoretickým. Postupuje podle schématu „Platí-li A, vyplývá odtud X, Y a Z“ nebo „Za předpokladu platnosti A lze očekávat R, S a T“. V tomto případě A může být nedokázané tvrzení, v něž věříme, například Riemannova hypotéza. Nedávným příkladem je věnování celého *Séminaire Bourbaki* novým možnostem v teorii čísel a algebraické geometrii, jež otvírají hypotézy, které vyslovili Deligne a Beilinson [Fo]. Je zajímavé, že Bourbaki, kdysi strážce citadely nejkonzervativnější tradiční matematiky, nyní nachází zalíbení v pyramidách hypotéz.

Široce zaměřená činnost sloužící formulaci cílů, nutně teoretická, nabývá na významu. Žijeme ve věku „velké vědy“ a matematika není výjimkou. Odhaduje se například, že klasifikace konečných prostých grup zaujímá 15 000 časopiseckých stran. Jiné vědy reagují na tento trend vytvářením velkých formálně definovaných skupin sloužících spolupráci.

National Science Foundation a vládní úřady v jiných zemích se snaží postrkovat matematiku směrem k týmové a interdisciplinární práci. Je však nutné si uvědomit, že velké projekty v matematice se nesoustřeďují kolem grantu, techniky či přístroje. Obvykle se do nich pouštějí neformální skupiny vedené vizionářským teoretickým programem. V případě konečných prostých grup byl program formulován a koordinován D. Gorensteinem, který rozdělil kousky skládanky neformálnímu „týmu“, jenž se problému ujal. Budoucí růst takovýchto širokých matematických aktivit je možný pouze tehdy, bude-li více vizionářských nosných idejí.

Varovné zkušenosti

Většina zkušeností s teoretickou matematikou není tak pozitivní jako výše uvedené příklady. Stává se to zvláště tehdy, když nesprávný nebo spekulativní materiál je předkládán jako známý a spolehlivý a pachatel si činí nárok na zásluhy. Někdy jde o chybu učiněnou *bona fide*, jindy je to výsledek postavení důkazu na nestandardních pojmech. Čisté chyby jsou nejméně škodlivé. V roce 1910 bylo například publikováno zásadní „Dehnovo lemma“ o 2-kruzích na 3-varietách. Argument obsahoval chybu, a když Papakyriakopolos v roce 1957 navrhl důkaz, tvrzení bylo považováno za důležitou hypotézu.

Větší potíže mohou být důsledkem nízkých standardů. V osmnáctém století vedla nedbalá argumentace k epidemii problémů v analýze týkajících se otázek jako konvergence řad či stejnoměrná konvergence funkcí. Jako protilátka posloužily zvýšené nároky na rigoróznost. Byly zavedeny bez ohledu na námitky teoretiků té doby a zabránily velkým škodám.

V tomto století se škodám nevyhnula „italská škola“ algebraické geometrie, která se zhroutila po generaci brilantních spekulací — viz [EH, Ko] ohledně těchto problémů a dlouhého ozdravného procesu. V roce 1946 byl tento předmět ještě natolik podezřelý, že Weil považoval za nutné obhajovat svůj zájem o něj, jak dokládá úvod k monografii [W].

Algebraická a diferenciální topologie prošla několika údobími přehnaně teoretického přístupu. Počátek oboru datuje Dieudonné ve svém historickém přehledu [D] k Poincaréově *Analysis Situs* z roku 1895. Tato „fascinující a rozčilující práce“ byla mimořádně intuitivní. Nehledě na její zjevnou důležitost trvalo patnáct až dvacet let, než začal skutečný rozvoj. Dieudonné vyjadřuje nad tímto pomalým začátkem údiv [D, str. 36], leč zdá se to být téměř nevyhnutelný důsledek způsobu početí: Poincaré tvrdil příliš mnoho, dokázal příliš málo a jeho „zbrklé“ metody nebylo možné imitovat. Výsledkem byla mrtvá oblast, již bylo nutno nejprve řádně přetřídit, než se vývoj mohl hnout dále.

Dieudonné má za to, že nedbalá argumentace je dětskou nemocí matematických oborů a říká: „... obecně akceptovaný standard toho, co znamená platný důkaz v topologii, se objevil po roce 1910 ... a od té doby *se nezměnil*“. Ve skutečnosti se však odehrála řada epizod. Rané práce René Thoma o diferencovatelných varietách, za něž dostal Fieldsovu medaili, byly brilantní a obecně solidní. Pozdější práce týkající se singularit již tak bezesporná nebyla. Jeho tvrzení o C^∞ hustotě topologicky stabilních zobrazení bylo podpořeno detailním, ale neúplným náčrtem argumentu, jenž byl později opraven Johnem Matherem. Thom pokračoval tímto směrem a navrhl „teorii katastrof“ založenou na singularitách, aby vysvětlil různé formy fyzikálních jevů. Tato aplikace byla matematicky teoretická a její popularizace, šířená především E. C. Zeemanem, se ukázala být fyzikálně rozporná.

Jiným příkladem jsou rané práce Dennise Sullivana. Po solidním začátku se v sedmdesátých letech dal do brilantního a široce chváleného, leč „teoretického“ průzkumu topologie variet. Detailní argumentace byla slabá a pokusy zaplnit logické mezery přes veškeré úsilí uvázly. Sullivan sám změnil obor a vrátil se k rigoróznější práci. Zdá se, že tento obor má stále ještě více mlhavých důkazů, než by si zasloužil.

Často citovaným příkladem je „geometrizační věta“ o strukturách na Hakenových 3-varietách Williama Thurstona. Dostalo se nám v ní skvělé hypotézy s krásným, ale nedostatečným náčrtem argumentu; úplný důkaz nebyl nikdy publikován. Pro mnohé badatele se neodvolané tvrzení stalo spíše překážkou než inspirací.

Podobně jako v Poincarého případě se všech těchto příkladech zdá, že zformulované hypotézy jsou správné. Existují samozřejmě také situace, kdy výsledek teoretické úvahy má nějakou vadu. Problém spočívá v tom, že nepříjemné vedlejší efekty, jimž se bylo lze vyhnout, existují i v těch lepších případech. Vidíme také, že když Witten navrhl heuristický popis rozšíření Jonesova polynomu [Wi], pokračoval tím v dlouhé a problematické tradici, dokonce i když nešlo o topologii.

Některé oblasti ruské matematické školy mají rozsáhlou tradici teoretické práce, jež je obvykle zprostředkována předčasným oznámením výsledků. Uvedeme pouze dva z mnohých možných příkladů. Prvý se týká poruchové teorie integrovatelných hamiltonovských systémů, jejichž fázový prostor se rozvrstvuje na invariantní tory. V roce 1954 Kolmogorov oznámil, že torus s nerezonanční frekvencí se pod vlivem poruchy zachovává, a poskytl náčrt argumentu. Ve zpětném pohledu je vidět, že tento náčrt obsahuje všechny nezbytné hlavní myšlenky, obecně však byl považován za nedostačující návod k důkazu. Úplný důkaz se zdařil teprve Arnoldovi v roce 1959 pro analytický případ a Moserovi v roce 1962 pro systémy, jež jsou pouze hladké.

Druhý příklad zahrnuje problém, v němž se jeden z autorů osobně angažoval, když se pokoušel dokázat skutečnost, v niž se obecně věřilo, totiž že v (relativistické) kvantové teorii pole dochází k fázovým přechodům. V roce 1973 uznávaní matematici Dobrušin a Minlos publikovali oznámení tohoto výsledku. Když se po dvou letech neobjevil od Rusů ani náznak důkazu, Glimm, Jaffe a Spencer se znovu do problému pustili a nakonec zformulovali dva různé důkazy. O několik let později Dobrušin a Minlos své původní oznámení odvolali.

Problémy

Uvedené příklady obsahují opakující se schémata. Uvedeme nejprve seznam některých z nich a poté je probereme podrobněji.

(1) Zajde-li teoretická práce příliš daleko, má tendenci zbloudit, protože postrádá zpětnou vazbu a korekce, jež poskytuje rigorózní důkaz.

(2) Nejistota o tom, které části lze považovat za spolehlivé, odrazuje od další práce a vnáší do ní zmatek.

(3) Činí-li si energický teoretik nárok na plné uznání, vytváří tím mrtvou zónu; málokdo má pak chuť uklízet nepořádek, jenž brání dalšímu pokroku.

(4) Studentům a mladým badatelům se dostává falešných vodítek.

První problém je častým kamenem úrazu pro ty, kteří se pokoušejí o matematické teoretizování, zejména nejsou-li ochotni připustit, že jejich práce je nejistá a neúplná. Dokonce i v teoretické fyzice, kde existuje obecné povědomí o tomto nebezpečí, je složité umění vědět, kdy přestat. Pobloudilé teoretizování škodí důvěryhodnosti teoretika a může rovněž poškodit obor prostřednictvím mechanismu popsaného v druhém problému.

Druhý problém souvisí s nejistotou ohledně literatury. Ve srovnání s jinými vědami je prvotní matematická literatura mimořádně spolehlivá. Články v základních recenzovaných matematických časopisech jsou téměř bez výjimky správné, což umožňuje stálý a efektivní pokrok. Kontaminace třeba i jen malým množstvím vážných chyb by přinutila matematiky investovat mnohem více času a energie do prověřování publikovaného materiálu, než je tomu dnes. Výhody spolehlivých literárních zdrojů jsou tak velké, že nás vedou k podezření, že toto je hlavní síla tlačící matematiku k rigoróznosti.

Nedá-li se na literaturu spolehnout, je nutné se ptát, proč a v čem. Často se spoléháme na různé „praktické zásady." Matematici například předpokládají, že články ve fyzikálních časopisech jsou teoretické. Tento pocit se pak rozšiřuje v podezření vůči časopisům věnovaným matematické fyzice, kde jsou práce obecně důvěryhodné, ač s některými nebezpečnými výjimkami. Jiné široce aplikované praktické kritérium je, že cokoli obsahující funkcionální integrály je nutně spekulativní. Jeden z nás popsal potíže, které odtud matematikům vyvstávají při pokusech užívat solidně fundovanou část této techniky [J]. Obecná pravidla tohoto druhu jsou neuspokojivá podobně jako přístup *caveat emptor* — kupče, střez se —, v němž důvěryhodnost každé práce má být posuzována samostatně. Advokáti posledně zmíněného hlediska citují Wittenovu činnost jako úspěšný příklad. Jenže zvládnout takto lze několik případů; ve větším množství je to katastrofa. Navíc se stalo empirickým pravidlem nahlížet každý Wittenův článek jako teoretický. To snižuje význam Wittenovy práce a současně ilustruje, že většina matematiků dává přednost vrabci v hrsti, jakmile vzniknou problémy.

Nedůvěryhodnost zdrojů představuje jistě problém v teoretické fyzice, kde se často prvotní literatura stává natolik irelevantní, že je ve velkém ignorována. I. M. Singer přirovnal fyzikální literaturu k tabuli, která musí být čas od času smazána. Fyzikové dokáží tradičně méně těžit z historie problému a jsou méně náchylní k hledání v literatuře. Citační poločas fyzikálních prací je mnohem kratší než v matematice.

Problém „mrtvé zóny" se týká uznání a odměn. Matematičtí badatelé obvykle neudělují zásluhu dvakrát za tytéž výsledky. Hlásí-li se tedy o ni teoretik, jeho rigoróznější kolegové mohou stěží zdůvodnit úsilí vynaložené na to, aby byl výsledek učiněn spolehlivým. Je veliký rozdíl mezi „doplněním věty autora X o některé detaily" a „ověřením hypotézy vyslovené autorem X". Rigorózní matematici se raději vyhýbají stínu velkého tvrzení. Obvykle se pak stává, že chybějící části argumentu jsou doplněny, často mnohem později, prostřednictvím technik a výsledků týkajících se jiných problémů, za něž lze získat uznání neoddiskutovatelným způsobem.

Co se týče konečně posledního bodu, nejúspěšnější teoretici (přinejmenším v matematice) mívají solidní základy v práci „podle pravidel", jež jsou zdrojem jejich intuice. Většina studentů, kteří se vrhají do opojného světa teorie bez takovýchto základů, se setkává s neúspěchem. Nepochopení rozdílu mezi těmito dvěma typy aktivit může vést studenty k pokusu adoptovat ty přitažlivější a méně disciplinované aspekty činnosti; výsledkem je zřídkakdy víc než zvládnutí žargonu.

Matematici mají sklon soustřeďovat se na intelektuální obsah a zanedbávat společenskou stránku věci. Jsme nicméně obec a často si tvoříme názor prostřednictvím společenské interakce spíš než přímo z literatury, a to dokonce i v technických otázkách. Společensky akceptované konvence hrají zásadní roli v tom, jak rozumíme tomu, co čteme. Chování je důležité a nevhodný kód může matematické obci způsobit nemalé škody.

Několik receptů

Společenství matematiků si vytvořilo přísný standard důkazu a normy, jež odrazují od spekulativního uvažování. Jsou to ochranné mechanismy, které mají zabránit destruktivním následkům; ztělesňují kolektivní matematickou zkušenost, že nevýhody spekulace převažují nad výhodami. Naproti tomu jsme viděli, že spekulace může přinést značný prospěch, pokud se s ní správně zachází. Lze si představit uvědomělejší a zdrženlivější přístup, jenž by nám umožnil sklízet plody a vyvarovat se přitom rizika. Potřeba vypořádat se konstruktivně s novými vlivy přicházejícími z teoretické fyziky nám nabízí zkoušku, ale také příležitost.

Matematici by měli být vstřícnější k teoretickému materiálu, ale zachovávat opatrnost a přísnou poctivost. Ochrana, kterou nabízíme, není nová; je to v podstatě jen tradiční praxe ohledně hypotéz. Je jenom nutné hlouběji promyslet funkci a význam ochranných mechanismů a aplikovat je stejnoměrněji a v širším měřítku. Naše návrhy mohou být sumárně chápány jako opatření k zajištění „pravdivé reklamy“.

> Teoretická práce by měla být explicite označena jako teoretická a neúplná; speciálně podstatný díl uznání za konečný výsledek musí být rezervován pro rigorózní argumenty, jež jí dodají platnost.

To může být rozdíl mezi mrtvou zónou a živoucím oborem. Teoretici by měli uznat, že v delší perspektivě úspěch jejich práce závisí na úsilí partnerského rigorózního společenství; měli by vztah k němu ctít a chránit, kdykoli je to možné. Ve fyzice jistě obec nešetří uznáním za úspěšný experimentální výzkum, který se zdaleka nepovažuje pouze za doplnění nevýznamných podrobností v pavučině teoretické konstrukce. Na individuální úrovni by si každý matematický autor měl vybrat: buď uvést úplné důkazy, nebo souhlasit s tím, že jeho práce je neúplná a o uznání za výsledek se musí dělit. Recenzenti a redaktoři by měli toto rozlišení uplatňovat, stejně jako by mělo být součástí výchovy studentů.

Další návrhy se týkají integrity matematické literatury. Bylo vždy přípustné, aby článek obsahoval hypotézu, a občas se objevují práce sestávající ze samých hypotéz. Klíčový problém je, že teoretický materiál musí být jasně identifikován.

> Je nezbytné užívat standardní terminologie: v teoretickém materiálu pišme „hypotéza“ místo „věta“, slova jako „předpovědět“ by měla mít přednost před „ukázat“ nebo „zkonstruovat“, a výrazy „motivující úvaha“ nebo „podpůrný argument“ nechť nahradí slovo „důkaz“. Je žádoucí, aby název a abstrakt takové práce obsahovaly adjektivum typu „teoretický“, „spekulativní“ či „hypotetický“.

Cílem je rozmístit výstražná znamení, která by čtenáři indikovala povahu práce. Upozornění v názvu teoretického článku se může objevit v citacích a zabránit tak zprostředkovanému nepochopení. Teoretická práce by měla být citována jako zdroj inspirace, na doložení významu nebo v podpůrných argumentech jiných teoretických výzkumů. Citaci teoretického článku jako organické součásti údajně rigorózního důkazu je nutné přijímat s opatrností a výstražné znamení v názvu může naznačit, kdy je ostražitost na místě.

Zvláštní problém představují předběžná oznámení (*research announcements*). Někdy jsou to prostě shrnutí práce, kterou autor dokončil a sepsal; v takovém případě je užití jazyka „věta–důkaz“ oprávněné. Jiná oznámení ohlašují výsledky úvah, jež nebyly propracovány se všemi podrobnostmi, a někdy s důvěrou přeskočí mezeru, jejíž přemostění trvá celá léta. V těchto případech se tradiční jazyk nehodí, neboť vytváří falešnou představu o práci; takováto oznámení by měla být označena jako teoretická. Z uvedeného rozboru je možné vyvodit, že ne vždy může být publikace oznámení vhodná, a někdy může i napáchat škodu. Oznámení mají pochopitelně smysl, například jako prostředek vyslovení nároku na prioritu či připoutání pozornosti ostatních k novým výsledkům a užitečným technikám. Podobně jako pro teoretické práce obecně je nutné najít vodítka, jež by umožnila těšit se z výhod, ale zabránit možným škodám. Klíčovým problémem je místo oznámení v literatuře. Jedno možné řešení je následující:

> Předběžná oznámení by neměla být publikována s výjimkou případů, kdy jde o shrnutí úplné verze práce, jež byla přijata k publikaci jinde. Citace nepublikované práce musí jasně rozlišovat mezi oznámením a úplným textem.

Ve věku kopírovacích přístrojů a elektronických „nástěnek“ lze šířit informaci v širokém okruhu, aniž by ji bylo nutno formálně publikovat. „Mezioborové“ předběžné výsledky představující obecný zájem je možné neformálně zveřejnit ve tvaru „sloupku“ v periodikách, jako jsou *Mathematical Intelligencer* nebo *Notices of the American Mathematical Society*. Chybějící formální publikace by tedy neměla znamenat velkou nevýhodu. Poznamenejme, že tato diskuse současně podtrhuje význam uchování rozdílu mezi formální (recenzovanou) publikací a umístěním práce na „nástěnku“. Zachovat toto rozlišení bude jedním z velkých problémů, jež s sebou přináší vznik seriózních elektronických časopisů.

Budou-li zmíněná bezpečnostní opatření uplatňována, libovolný matematický časopis může zvažovat zveřejňování teoretických článků. Stimulativním pracím s neúplnými důkazy může být nabídnuta publikace v teoretické kategorii, budou-li používat správného slovníku. Jsou myslitelné časopisy věnované teoretické matematice. Ale opatrnost je namístě. Bez poctivého a rozvážného přístupu autorů, redaktorů a recenzentů se znovu střetneme s problémy, jichž jsme se bolestně a opakovaně po léta zbavovali.

Naše analýza naznačuje, že štěpení matematiky na teoretickou a rigorózní obec zčásti začalo, ale že bylo utlumeno jako následek nevhodných spekulací. Bude pokračovat? Odpověď je pravděpodobně tak jak tak kladná; budou-li však uplatněna ochranná opatření, vývoj by mohl být rychlejší. Přitom v klasických oblastech bude postupovat pomaleji, neboť inteligentní spekulace zde musí být založena na zvládnutí technických detailů předchozích důkazů. V těchto oblastech rámec pro spekulaci poskytne spíše konstruktivní východisko těm jedincům, kteří jsou nominálně členy rigorózního společenství, leč jejich inspirace převládá nad schopností poskytnout úplný důkaz. Jiné oblasti, zvláště ty, jež zahrnují počítačovou simulaci, se liší v tom, že tvorba a analýza dat představují aktivitu naprosto odlišnou od formulace důkazů. V některých z nich lze již dnes odlišit specializované teoretiky a lze očekávat, že jejich počet poroste.

Navrhované schéma poskytuje v každém případě místo pro interakci mezi matematiky a teoretickými fyziky. Ať už se stanou permanentním „inventářem“ matematické obce či nikoli, fyziky bychom měli spíš vítat jako „teoretické matematiky“ než je zapuzovat jako nekompetentní matematiky tradiční ražby.

Shrnutí

Byla období, kdy spekulativní uvažování pohánělo rozvoj matematiky; jindy jej naopak brzdilo. Důvod je v tom, že „teorie“ a „důkaz“ nejsou jen neutrálně odlišné. Chybějící rozlišení mezi nimi může způsobit škody jak společenství matematiků, tak i matematické literatuře. Dalo by se říci, že je matematicky nemravné nerozlišovat mezi nedbalou argumentací a důkazem. V tomto článku jsme se pokusili popsat praktická opatření a vodítka, jež by při důsledném uplatňování měla spekulativnímu uvažování vymezit pozitivní roli v matematice.

Poděkování

Chceme poděkovat mnohým kolegům, kteří přispěli k tomuto článku podnětnými návrhy. Prvý autor vyjadřuje vděk za stipendium *John S. Guggenheim Foundation.* Oba autoři obdrželi částečnou podporu od *National Science Foundation.*

Literatura

[A] P. W. ANDERSON: *Concepts in solids.* W. A. Benjamin, New York 1964.
[D] J. DIEUDONNÉ: *A History of algebraic and differential topology.* Birkhäuser, Basel 1988.
[EH] D. EISENBUD, J. HARRIS: *Progress in the theory of complex algebraic curves.* Bull. Amer. Math. Soc. *21* (1989), 205.
[F] R. P. FEYNMAN: *Surely you're joking, Mr. Feynman: adventures of a curious character.* W. W. Norton, New York 1985 [česky: Mladá fronta 1989].
[Fo] J.-M. FONTAINE: *Valeurs spéciales des fonctions L des motifs.* Séminaire Bourbaki, Exposé 751, Février 1992; pp. 1–45.
[G1] J. GLEICK: *Chaos: making a new science.* Viking Penguin, New York 1987.
[G2] J. GLEICK: *Genius: the life and science of Richard Feynman.* Pantheon, New York 1992.
[H] G. HOLTON: Soukromé sdělení.
[J] A. JAFFE: *Mathematics motivated by physics.* Proc. Symp. Pure Math., Vol. 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990; pp. 137–150.
[Ko] J. KOLLAR: *The structure of algebraic threefolds: an introduction to Mori's program.* Bull. Amer. Math. Soc. *17* (1987), 211.
[Kr] S. G. KRANTZ: *Fractal geometry.* Math. Intelligencer *11* (1989), 12–16.
[LL] L. D. LANDAU, E. M. LIFŠIC: *Statistical Physics.* Oxford University Press, London 1938.
[M] R. MC CORMMACH, ed.: *Historical studies in the physical sciences.* Princeton Univ. Press, Princeton 1975.
[W] A. WEIL: *Foundations of algebraic geometry.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1946.
[Wi] E. H. WITTEN: *Quantum field theory and the Jones polynomial.* Commun. Math. Phys. *121* (1989), 351–399.

Poznámka redakce: Diskusi k tomuto článku otiskneme v příštím čísle.