Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Bohumil Vybíral

# K problematice setrvačné a gravitační hmotnosti

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 19 (1974), No. 5, 270--280

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139679

[23] A. GROTHENDIECK: *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo *8* (1956), 1—79.
[24] J. T. JOICHI: *Normed linear spaces equivalent to inner product spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. *17* (1966), 423—426.
[25] P. JORDAN, J. VON NEUMANN: *On inner products in linear metric spaces*, Ann. of Math. *36* (1935), 719—723.
[26] S. KAKUTANI: *Some characterizations of Euclidean spaces*, Jap. J. Math. *16* (1939), 93—97.
[27] S. KWAPIEŃ: *Isomorphic characterizations of inner product spaces by Fourier series with vector coefficients*, Studia Math. *44* (1972), 583—595.
[28] J. LINDENSTRAUSS, I. TZAFRIRI: *On the complemented subspace problem*, Israel J. Math. *9* (1971), 263—269.
[29] J. LINDENSTRAUSS, A. PEŁCZYŃSKI: *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Math. *29* (1968), 275—326.
[30] V. D. MILMAN: *Novoje dokazatělstvo těoremy A. Dvoreckogo o šečenijach vypuklych těl*, Funkcional. anal. i pril. *5* (1971), 28—37.
[31] F. J. MURRAY: *On complementary manifolds and projections in spaces $L_p$ and $l_p$*, Trans. Amer. Math. Soc. *41* (1937), 138—152.
[32] A. SOBCZYK: *Projections in Minkowski and Banach spaces*, Duke Math. J. *8* (1941), 78—106.

# K problematice setrvačné a gravitační hmotnosti

*Bohumil Vybíral, Vyškov*

## 1. Úvod

Hmota patří mezi ty základní kategorie, které spojují různé oblasti vědy v jednotný systém. Pojetí hmoty, jako objektivní reality existující nezávisle na našem vědomí přitom leží na hranici fyzikálního obrazu světa a filosofie. Mírou základních vlastností hmoty z fyzikálního hlediska je hmotnost. Pojem hmotnosti má složitý charakter v závislosti na tom, míru kterých vlastností materiálních objektů popisuje. Tak se ve fyzice pracuje s pojmy: setrvačná hmotnost, gravitační hmotnost — aktivní a pasívní, elektromagnetická hmotnost, klidová (resp. vlastní) hmotnost.

Klasické pojetí hmotnosti ve smyslu množství hmoty se neudrželo a ponechává si svůj význam jen pro látku, tj. pro soubor částic majících klidovou hmotnost a pro makroskopická tělesa, a to jen pro případ omezených podmínek pro jejich pohyb v určité vztažné soustavě (podmínka pro rychlost $v \ll c$). V současné fyzice se pojem hmotnost a pojem množství hmoty staly pojmy nezávislými ([1], str. 238). Hmotnost zůstala pojmem pro vyjádření míry setrvačných a gravitačních vlastností hmoty.

Od dob Galileových a Newtonových do současnosti se hledá a ověřuje vztah mezi setrvačnou a gravitační hmotností. Přitom nejde jen o matematickou rovnost těchto fyzikálních veličin, ale i o vnitřní obsah těchto pojmů. V tomto hledání byly rozhodující experimenty, které ukázaly rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti. Výsledky přesných EÖTVÖSOVÝCH pokusů byly pro EINSTEINA podnětem k vyslovení principu ekvivalence, který stál u zrodu obecné teorie relativity.

Problematikou hmotnosti a jejími aspekty ve fyzice a filosofii se v historickém vývoji vědy zabývala řada význačných osobností. Souborně pojednávají o hmotnosti např. práce [1], [2], [3], které obsahují i podrobnou bibliografii k dané problematice. Tato práce má přispět k důslednějšímu a systematickému zavedení pojmu hmotnosti v mechanice.

## 2. Setrvačná hmotnost, síla a gravitační hmotnost v klasické mechanice

Zavedení pojmu hmotnost do fyziky při jejím systematickém výkladu naráží na určité potíže, protože zavedení hmotnosti přímo souvisí se zavedením síly. Přitom vycházíme z toho, že již máme zavedeny dvě základní fyzikální veličiny, a to délku a čas.

### 2.1. Setrvačná hmotnost a síla

Nejprve zavedeme pojem setrvačné hmotnosti a síly a určíme jejich souvislost. Nejvýhodnější se jeví postup KOŠŤÁLŮV ([3]), který tyto pojmy odvozuje z experimentálních poznatků při pohybu na padostroji Atwoodově, při pohybu na pružném vlákně a při pohybu po kružnici za ideálních podmínek (tj. bez tření). Nejprve si všímá úkazů, které souvisí s uplatněním *setrvačné hmotnosti* různých těles. Ve všech uvedených případech experimentů se měří zrychlení, kterého různá tělesa nabývají působením určité síly (o síle se však přímo nehovoří). Výsledky pokusů se zobecňují konstatováním, že se ve všech uvedených případech projevuje určitá vlastnost těles uváděných do pohybu.

*Vlastnost materiálních objektů projevující se v tom, že nabývají různých zrychlení při pohybu souvisícím s určitým úkazem, označujeme jejich setrvačností. Jako míru této vlastnosti zavádíme setrvačnou hmotnost*, kterou musíme nejprve definovat jako fyzikální veličinu.

Je nutné stanovit, jak souvisí zrychlení se setrvačnou hmotností tělesa uváděného do pohybu. Ve všech uvedených případech experimentů vychází, že zrychlení pohybujícího se tělesa je nepřímo úměrné jeho setrvačné hmotnosti $m_s$ podle vztahu $a = k_1/m_s$, kde $k_1$ je pro příslušné experimentální zařízení konstanta.

Analogickým způsobem se v práci [3] odvozuje pojem *síly*. Tělesa uváděná do pohybu zůstávají nezměněna, mění se síla (působením různých přívažků nebo pružných vláken) a měří se zrychlení. Výsledky se zobecňují: „Příčinu udělovat tělesům zrychlení nazýváme silou". Pak se opět definuje síla jako veličina a dochází se k výsledku $a = k_2F$.

Shrnutím výsledků obou dílčích skupin experimentů se dospívá ke vztahu

$$a = k_3 \frac{F}{m_s},$$

kde $k_3$ je konstanta, která souvisí s volbou jednotek. Za jednotku setrvačné hmotnosti volíme setrvačnou hmotnost normálu (např. mezinárodního prototypu kilogramu). Protože jednotku pro zrychlení již máme určenou (v kinematice), pro hmotnost setrvačnou jsme si zvolili jednotku jako jednotku základní, můžeme položit $k_3 = 1$ a jednotku pro sílu vypočíst. Pak

$$a = \frac{F}{m_s}.$$

Potom se v práci [3] ještě rozšiřuje pojem síly pro případy, kdy je zabráněno pohybu. Souhrnně můžeme říci — *silou rozumíme příčinu, která způsobuje změnu pohybového stavu tělesa nebo která způsobuje tlak na podložku, tah na závěs nebo deformaci tuhých těles.*

## 2.2. Gravitační hmotnost

Při důsledném zavádění pojmu *gravitační hmotnost* musíme uvažovat o gravitačním působení těles, která jsou v pozorovací inerciální soustavě v klidu. Z tohoto důvodu není vhodné použít Keplerových zákonů pro zavedení pojmu gravitační hmotnosti, protože tyto zákony pojednávají o pohybu těles v gravitačním poli, při kterém se již uplatňuje setrvačná hmotnost. K tomu, abychom odvodili gravitační zákon z Keplerových zákonů a z druhého pohybového zákona, musíme se již opírat o ekvivalenci gravitační a setrvačné hmotnosti. Naopak bude vhodné poměrně přesné platnosti těchto zákonů využít k důkazu ekvivalence gravitační a setrvačné hmotnosti (viz odst. 3.3).

Odchýlíme se proto od historického přístupu zavedení gravitační hmotnosti užitím Keplerových zákonů a užijeme statického experimentu, který můžeme provést např. na Cavendishových torzních vahách. Přitom můžeme s výhodou použít stejného metodického přístupu jako při zavedení setrvačné hmotnosti.

Na vahadlo připevníme dvě stejné kuličky a budeme do určité stálé vzdálenosti před prvou a za druhou kuličku klást dvojice stejných koulí z různého materiálu. Předpokládáme, že koule a kuličky jsou homogenní, bez vlastního vnějšího elektrického a magnetického pole. V důsledku vzájemného gravitačního působení nastane výchylka vahadla, jejíž kompenzací zjistíme, že velikost síly je závislá na určité vlastnosti koulí. Necháme-li koule nezměněné a budeme-li měnit kuličky na vahadle, zjistíme, že velikost síly je rovněž závislá na určité vlastnosti kuliček. Necháme-li nyní koule i kuličky nezměněné a budeme-li měnit jejich vzájemnou vzdálenost zjistíme, že velikost síly rovněž souvisí se vzájemnou polohou interagujících těles.

Výsledky pokusu můžeme zobecnit. Pozorovaný *jev, že materiální objekty bez vlastního vnějšího elektrického a magnetického pole na sebe navzájem působí silami závislými na jejich vzájemné poloze, nazýváme gravitační interakcí.*

Touto definicí oddělujeme od gravitační interakce interakci elektromagnetickou. Zbývající dvě interakce, silná a slabá, se nemohou vzhledem ke svému nepatrnému dosahu projevit u makrofyzikálních objektů.

Tím jsme definovali gravitační interakci jako vlastnost materiálních objektů. *Míra vlastnosti materiálního objektu, s jakou se podílí na gravitační interakci s jinými materiálními objekty, se nazývá gravitační hmotnost.* Je třeba ještě definovat gravitační hmotnost jako fyzikální veličinu a potom definovat její jednotku.

Působí-li dvě sféricky souměrná tělesa ze stejně velké vzdálenosti na třetí sféricky souměrné těleso (pokusné těleso) stejnou silou, mají první dvě tělesa stejnou gravitační hmotnost. Spojíme-li je v jedno sféricky souměrné těleso*), zjistíme, že působí na pokusné těleso dvojnásobnou silou. Proto mu přisoudíme dvojnásobnou gravitační hmotnost. Vezmeme-li $n$ kulových těles o stejné gravitační hmotnosti jako jedno kulové těleso, zjistíme, že síla působící na pokusné těleso je $n$-násobná. Tím jsme také dokázali, že gravitační hmotnost je veličinou *aditivní*.

Pokus můžeme provést jak pro koule, tak pro kuličky na vahadle. Síla je tedy přímo úměrná součinu gravitačních hmotností $m_{g1}$, $m_{g2}$ interagujících těles. Necháme-li koule a kuličky nezměněny a budeme-li měnit vzdálenost jejich středů, určíme, že síla je nepřímo úměrná druhé mocnině této vzdálenosti. Můžeme tedy pro velikost síly psát

$$F = \varkappa \frac{m_{g1} m_{g2}}{r^2} ,$$

kde $\varkappa$ je gravitační konstanta, která je nezávislá na gravitačních hmotnostech a souvisí s volbou jednotky pro gravitační hmotnost. Matematicky lze dokázat, že výraz pro gravitační sílu v tomto tvaru platí nejen pro hmotné body a homogenní koule, ale i pro tělesa se sféricky souměrně rozdělenou hmotností.

Gravitační hmotnost vystupuje v teorii gravitačního pole ve dvou úlohách: jednak jako zdroj gravitačního pole – tzv. *aktivní gravitační hmotnost* a jednak jako charakteristika částice (resp. tělesa), na niž pole působí – tzv. *pasívní gravitační hmotnost.* Odlišme tyto dvě funkce gravitační hmotnosti a určeme vztah mezi aktivní a pasívní hmotností jako důsledek třetího pohybového zákona ([1], str. 133). Označíme-li $m_{g1}^{(a)}$ a $m_{g1}^{(p)}$ aktivní a pasívní gravitační hmotnost prvého tělesa a $m_{g2}^{(a)}$, $m_{g2}^{(p)}$ druhého tělesa a budeme-li považovat tato tělesa za hmotné body, bude první těleso působit na druhé těleso silou

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\varkappa \frac{m_{g1}^{(a)} m_{g2}^{(p)}}{r^2} \boldsymbol{r}^0$$

a druhé těleso na první těleso silou

$$\boldsymbol{F}_{21} = \varkappa \frac{m_{g2}^{(a)} m_{g1}^{(p)}}{r^2} \boldsymbol{r}^0 ,$$

kde $\boldsymbol{r}^0$ je jednotkový polohový vektor vedený od prvého tělesa ke druhému tělesu. Budeme-li tato tělesa považovat za izolovanou soustavu, tj. půjde-li o interakci bez

*) Vezmeme-li např. dvě kulové nádoby se rtutí, můžeme obsah obou nádob slít do kulové nádoby dvojnásobného objemu. U těles z různých slévatelných kovů bychom mohli vytvořit jedno těleso z jejich slitiny.

vlivu dalších sil, musí podle třetího pohybového zákona platit $\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0$. To vede ke vztahu

$$(1) \qquad \frac{m_{g1}^{(a)}}{m_{g1}^{(p)}} = \frac{m_{g2}^{(a)}}{m_{g2}^{(p)}} .$$

Zvolíme-li pro pasívní gravitační hmotnost stejnou jednotku jako pro aktivní gravitační hmotnost, je tento poměr rovný jedné a platí $m_g^{(p)} = m_g^{(a)} = m_g$. Nebudeme proto nadále rozlišovat aktivní a pasívní gravitační hmotnost a budeme hovořit pouze o gravitační hmotnosti.

Nyní k volbě *jednotky pro gravitační hmotnost*. Zvolíme rozměr gravitační hmotnosti rovný rozměru setrvačné hmotnosti. Jednotku pro setrvačnou hmotnost již máme zvolenu – jako setrvačnou hmotnost normálu přesně definovaného složení. Aby systém jednotek byl co nejjednodušší, je vhodné zvolit pro gravitační hmotnost stejnou jednotku jako pro setrvačnou hmotnost. Protože dosud neznáme obecný vztah mezi gravitační a setrvačnou hmotností, můžeme položit hmotnost gravitační rovnu hmotnosti setrvačné pouze pro určité těleso – např. pro *normál jednotky setrvačné hmotnosti.* Tím jsme pro toto určité těleso položili jednotku hmotnosti gravitační rovnu jednotce hmotnosti setrvačné.

Zvolíme-li za tuto jednotku 1 kg a provedeme-li měření na Cavendishových vahách, u nichž jsou koule a kuličky zhotoveny z materiálu stejného složení jako má normál jednotky setrvačné hmotnosti, vyjde nám pro gravitační konstantu hodnota $\varkappa = 6{,}670 \, . \, 10^{-11} \, \mathrm{m}^3 \, \mathrm{kg}^{-1} \, \mathrm{s}^{-2}$. Můžeme tedy říci, že *homogenní těleso tvaru koule bez vlastního vnějšího elektrického a magnetického pole má gravitační hmotnost 1 kg, působí-li na stejné těleso silou* $6{,}670 \, . \, 10^{-11}$ *N, je-li vzdálenost středů obou koulí 1 m.*

A priori nemusí mít dvě různá tělesa o stejné gravitační hmotnosti stejnou setrvačnou hmotnost. Rovnost obou hmotností byla zvolena jenom po určité těleso (normál); pro ostatní tělesa může být tato rovnost potvrzena *jen experimentem.* Nejnázornější experimenty, které by dokázaly tuto rovnost, bychom mohli provést tak, že gravitační hmotnosti různých těles určené na torzních vahách bychom srovnávali s jejich setrvačnými hmotnostmi při dynamickém pokusu. Vyšlo by nám např., že dvě homogenní koule různého složení, které ve stejné poloze na Cavendishových vahách způsobí stejná zkroucení vlákna, budou na setrvačných Schrieverových vahách (viz např. [4], str. 126) kmitat se stejnou dobou kmitu. Rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti byla však ověřena řadou jiných mnohem přesnějších, i když méně názorných experimentů (viz kap. 3).

Tento podrobný rozbor setrvačné a gravitační hmotnosti naznačuje, jak by se tyto pojmy měly uvést do fyziky při její přísně logické a systematické výstavbě, zvláště při výuce. Výklad o setrvačných a gravitačních vlastnostech hmoty by pak měl být doplněn stručným popisem několika pokusů, resp. jevů, které jsou důsledkem rovnosti setrvačné a gravitační hmotnosti. Protože tato rovnost má hlubší význam, hovoříme o *identitě gravitační a setrvačné hmotnosti.*

## 3. Přehled experimentů a jevů, které jsou důsledkem identity gravitační a setrvačné hmotnosti

### 3.1. Dynamické experimenty

Nejstarším pokusem, který je důsledkem identity gravitační a setrvačné hmotnosti, je *volný pád* těles ve vakuu v gravitačním poli Země. Uvažujeme-li rotaci Země, platí v okamžiku uvolnění tělesa hmotnosti gravitační $m_g$ a setrvačné $m_s$ pro jeho zrychlení výraz

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{K}/\alpha - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R},$$

kde

$$\alpha = m_s/m_g, \quad \boldsymbol{K} = -\varkappa(M_g/R^2)\,\boldsymbol{R}^0,$$

přičemž $\omega$ je úhlová rychlost Země, $M_g$ gravitační hmotnost Země, $R$ poloměr Země (resp. přesněji vzdálenost místa uvolnění tělesa od středu Země, kterou považujeme za sféricky souměrné těleso), $\boldsymbol{K}$ intenzita gravitačního pole Země v uvažovaném místě a $\boldsymbol{R}^0$ jednotkový vektor vedený ze středu Země k uvažovanému místu.

Již pokusy, které prováděl Galilei a přesněji (ve vakuové trubici) Newton, ukázaly, že různá tělesa padají se stejným zrychlením. To vede k tomu, že při stejné jednotce pro gravitační a setrvačnou hmotnost je $\alpha = 1$, a tedy hmotnost gravitační je rovna hmotnosti setrvačné.

Newton (1687) použil k důkazu ekvivalence gravitační a setrvačné hmotnosti rovněž *kyvadel* z různých látek. Uvažujme o pohybu obecného (fyzického) kyvadla hmotnosti $m_s$, $m_g$, které si představme složené z $n$ hmotných bodů téže látky. Pohybová rovnice kyvadla má tvar

$$\alpha \frac{d^2\Theta}{dt^2} \sum_{k=1}^{n} m_{sk} r_k^2 = -g \sin\Theta \sum_{k=1}^{n} m_{sk} r_k,$$

kde

$$\alpha = m_{sk}/m_{gk} = m_s/m_g,$$

přičemž $m_{sk}$ a $m_{gk}$ je setrvačná a gravitační hmotnost $k$-tého bodu, $r_k$ je jeho vzdálenost od osy otáčení a $\Theta$ úhlová výchylka z rovnovážné polohy (uvedená v radiánech). Označíme-li $l$ vzdálenost hmotného středu kyvadla od osy otáčení a $J$ moment setrvačnosti kyvadla k téže ose, můžeme psát

$$d^2\Theta/dt^2 + m_s g l/\alpha J \,.\, \sin\Theta = 0\,.$$

Řešením (viz např. [5] str. 197) pro dobu kmitu dostáváme

$$T = 2\pi \sqrt{(\alpha \,.\, l_r/g)} \sum_{i=0}^{\infty} [(2i)!/(i!\,2^i)^2]^2 \sin^{2i} \Theta_m/2\,, \tag{2}$$

kde

$$l_r = J/m_s l$$

je redukovaná délka kyvadla a $\Theta_m$ amplituda úhlové výchylky.

Newtonova kyvadla byla stejného tvaru a velikosti – sestávala ze skleněné baňky upevněné na dlouhé niti (původně Newton použil místo baněk dřevěná pouzdra ([6])). Jedno kyvadlo, u kterého byla v baňce voda, použil jako srovnávací; do baňky druhého kyvadla dával různé látky. Stejný tvar kyvadla zaručoval stejný vliv odporu vzduchu.

Z výrazu (2) vidíme, že u dvou kyvadel stejné délky $l_r$ a stejné amplitudy úhlové výchylky $\Theta_m$ se mohou lišit doby kmitu jen v důsledku různého činitele $\alpha$. Pro dvě kyvadla s $\alpha_1$ a $\alpha_2$ a se stejnou redukovanou délkou vychází z výrazu (2) pro poměr dob kmitů při stejných amplitudách úhlové výchylky výraz

$$T_1 : T_2 = \sqrt{(\alpha_1 : \alpha_2)} .$$

Newton zjistil, že doby kmitů těchto kyvadel jsou stejné, a tedy při stejné jednotce pro $m_s$ a $m_g$ je $\alpha = 1$. Tento důkaz ekvivalence gravitační a setrvačné hmotnosti provedl s relativní přesností $10^{-3}$ ([6]).

Pokusy s kyvadly později (1827) prováděl rovněž Bessel ([7]) a v r. 1923 Potter ([8]). Přesnějším měřením doby kmitu Bessel dokázal ekvivalenci gravitační a setrvačné hmotnosti s relativní přesností $2 \cdot 10^{-5}$ a Potter s relativní přesností $3 \cdot 10^{-6}$.

### 3.2. Statické experimenty

Z hlediska přesnosti výsledku měření je výhodnější přejít od dynamických experimentů ke statickým. Statická metoda, kterou používal od r. 1890 Eötvös ([9]), využívá toho, že tíhové zrychlení má složku gravitační a odstředivou. Na vahadle Eötvösových torzních vah byly dvě koule z různých materiálů, ale stejné gravitační hmotnosti. Gravitační složky tíhové síly jsou tedy stejné. Kdyby setrvačné hmotnosti těchto koulí nebyly stejné, vznikl by působením vodorovné složky odstředivého zrychlení $a_0' = \frac{1}{2}\omega^2 R \sin 2\varphi$ (kde $R$ je poloměr Země a $\varphi$ zeměpisná šířka místa experimentu) nenulový moment síly, který by zkroutil vlákno závěsu. Tento moment by byl největší, kdyby váhy byly na 45° zeměpisné šířky ($a_0' = 1{,}7 \cdot 10^{-2}$ m s$^{-2}$) a vahadlo bylo kolmé k rovině poledníku. Aby se vyloučila případná nerovnovážnost vah, opakovala se měření s vahadly otočenými o 180° kolem svislé osy.

Eötvösovy váhy jsou založeny na *nulové metodě měření*, neboť efekt by se projevil, jen kdyby se setrvačné hmotnosti koulí na vahadlech nerovnaly. U nulové metody jde jen o zjištění, že výchylka z nulové rovnovážné polohy nepřesahuje meze pozorovacích chyb. Poslední Eötvösova měření, která prováděl s Pekarem a Feketem ([10]), ukázala rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti s relativní přesností $3 \cdot 10^{-9}$.

Statickou Eötvösovu metodu v r. 1963 značně zpřesnil Roll, Krotkov a Dicke ([11, 12]). Jde o variantu Eötvösova pokusu, kdy se však nevyužívá odstředivého zrychlení zemské rotace, nýbrž odstředivého zrychlení oběhu Země kolem Slunce, rovného $6 \cdot 10^{-3}$m s$^{-2}$. Základ přístroje tvoří tři závaží stejných gravitačních hmotností – jedno zlaté a dvě hliníková – zavěšená ve vrcholech vahadla tvaru rovnostranného trojúhelníka; vahadlo je zavěšeno na křemenném vlákně. Kdyby se setrvačné hmotnosti závaží sobě nerovnaly, konalo by vahadlo v důsledku denní rotace Země vynucené torzní kmity s dvacetičtyřhodinovou periodou. Tyto kmity se nezjistily, i když se měření prováděla značně pečlivě a dlouhodobě; aparatura byla vakuová, dálkově ovládaná a vybavená elektronikou. Relativní přesnost experimentu byla $1 \,.\, 10^{-11}$.

Nejnovější a nepřesnější statický experiment, který je důsledkem vyšetřované identity hmotností, provedl r. 1971 BRAGINSKIJ a PANOV ([16]). Princip jejich pokusu je stejný jako princip pokusu Dickeho, Krotkova a Rolla, tj. jde o torzní kyvadlo, které by se mělo rozkmitat působením odstředivého zrychlení oběhu Země kolem Slunce. Aby se zmenšil vliv místních gradientů gravitačního pole, bylo na vlákně (délky 2,9 m) zavěšeno těleso tvaru osmicípé (osmiramenné) růžice. Na koncích čtyř sousedních ramen byla umístěna hliníková závaží a na protilehlých koncích platinová závaží se stejnými gravitačními hmotnostmi. Zvětšení přesnosti pokusu se dosáhlo především podstatným zmenšením tlumení kmitů (za celé tři dny byl relativní pokles amplitudy menší než $3 \,.\, 10^{-3}$). Pro registraci kmitů bylo užito laserového paprsku. Pokus potvrdil identitu gravitační a setrvačné hmotnosti těles z hliníku a platiny s vysokou relativní přesností $0{,}9 \,.\, 10^{-12}$.

### 3.3. Astronomické jevy

Uvažujme nejprve o *planetárním pohybu* za předpokladu, že se hmotnost setrvačná nerovná hmotnosti gravitační. Označme podíl těchto hmotností u prvého tělesa (Slunce) $\alpha_M$ a u druhého tělesa (planety) $\alpha_m$, tedy

$$\alpha_M = M_s/M_g\,, \quad \alpha_m = m_s/m_g\,.$$

Pohybují-li se obě tělesa a označíme-li $\boldsymbol{r}$ polohový vektor bodu ve středu druhého tělesa, platí pro zrychlení druhého tělesa

$$\boldsymbol{a} = -\,\varkappa\left(\frac{M_g}{\alpha_m} + \frac{m_g}{\alpha_M}\right)\frac{\boldsymbol{r}^0}{r^2}\,. \tag{3}$$

Obecně pro zrychlení tělesa v rovině s jednotkovým vektorem $\boldsymbol{\nu}$ ve směru normály při vyjádření v polárních souřadnicích $(\boldsymbol{r}, \Theta)$ platí

$$\boldsymbol{a} = \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 r\right]\boldsymbol{r}^0 + \left(\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\,\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{r}^0)\,.$$

Dosazením za $\boldsymbol{a}$ z (3) dostáváme dvě složkové diferenciální rovnice

$$2\,\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\,\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}t^2} = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} + K_\alpha \frac{1}{r^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 0\,, \tag{5}$$

kde

$$K_\alpha = \varkappa\left(\frac{M_g}{\alpha_m} + \frac{m_g}{\alpha_M}\right). \tag{6}$$

Řešením rovnice (4) dostáváme

$$r^2 \frac{d\Theta}{dt} = C, \tag{7}$$

kde $C$ je konstanta daná počátečními podmínkami. Tato rovnice vyjadřuje druhý Keplerův zákon – zákon ploch.

Eliminací času z rovnice (5) a jejím řešením (viz např. [13]) dostáváme

$$r = \left(\frac{C^2}{K_\alpha}\right) \Big/ \left(1 - \frac{AC^2}{K_\alpha} \cos(\Theta + \Theta_0)\right), \tag{8}$$

kde $A$, $\Theta_0$ jsou integrační konstanty dané počátečními podmínkami. Číselná výstřednost kuželosečky (8)

$$\varepsilon = \frac{AC^2}{K_\alpha} = AC^2 \Big/ \left[\varkappa \left(\frac{M_g}{\alpha_m} + \frac{m_g}{\alpha_M}\right)\right] \tag{9}$$

(u planet $\varepsilon < 1$, tj. jde o elipsu) je závislá nejen na počátečních podmínkách ($A$, $C$), ale i na $\alpha_m$, $\alpha_M$. Pro oběžnou dobu dostáváme

$$T^2 = 4\pi^2 a^3 \Big/ \left[\varkappa \left(\frac{M_g}{\alpha_m} + \frac{m_g}{\alpha_M}\right)\right], \tag{10}$$

kde $a$ je velikost velké poloosy eliptické dráhy, pro kterou platí

$$a = \frac{K_\alpha C^2}{K_\alpha^2 - A^2 C^4}. \tag{11}$$

Ve zjednodušeném případě $M_g \gg m_g$ (případ sluneční soustavy) můžeme vztah (10) přepsat do přibližného tvaru

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\varkappa M_g} \alpha_m a^3 \tag{12}$$

– srovnej s [14].

Podle *třetího Keplerova zákona* musí být konstanta úměrnosti ve vztahu (12) stejná pro všechny planety. Proto musí být pro všechny planety stejný koeficient $\alpha_m$ bez ohledu na jejich chemické složení (např. chemické složení vnitřních planet se podstatně liší od složení Jupitera a Saturna). Vzhledem k volbě jednotek je tedy $\alpha_m = 1$.

Zjednodušení výrazu (10) do tvaru (12) vede pouze k přibližným výsledkům, protože např. u Jupitera dosahuje poměr $m_g/M_g$ téměř $10^{-3}$ a podíl $a^3/T^2$ se pro jednotlivé planety v souladu s výrazem (10) liší průměrně asi o $10^{-6}$ až $10^{-5}$ své hodnoty. Třetí Keplerův zákon tak nepotvrzuje rovnost obou hmotností s větší relativní přesností než asi $10^{-7}$ až $10^{-6}$, jak ukazuje detailní rozbor známých dat o planetách.

Identita gravitační a setrvačné hmotnosti by se dala ověřit i z *prvního Keplerova zákona* vyjádřeného vztahem (8). Tvar dráhy, popsaný číselnou výstředností (9) a velikostí velké poloosy (11), závisí na činitelích $\alpha_m$, $\alpha_M$. Protože však velikost a tvar dráhy podstatně ovlivňují konstanty $A$, $C$, které jsou u každé planety jiné, dala by se užitím výrazu (8) ověřit rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti jen u dvou nebo několika umělých družic různého složení vypuštěných za přesně stejných počátečních podmínek.

*Keplerovy zákony* nám tedy potvrzují ekvivalenci gravitační a setrvačné hmotnosti, a to s přesností, která odpovídá přesnosti, s jakou popisují pohyb planet sluneční soustavy.

Někdy se Keplerových zákonů užívá přímo k definici gravitační hmotnosti tělesa. Použijeme-li Keplerových zákonů za experimentální základ definice gravitační hmotnosti, máme již v tomto základě obsaženou ekvivalenci pasívní gravitační hmotnosti a setrvačné hmotnosti. Tohoto přístupu užil KOŠŤÁL ([3]). Výhoda je v tom, že ve výrazu pro zrychlení

$$\mathbf{a} = -\varkappa \frac{M_g^{(a)}}{r^2} \mathbf{r}^0 ,$$

které uděluje prvé (zdrojové) těleso o aktivní gravitační hmotnosti $M_g^{(a)}$ druhému tělesu, vystupuje pouze jedna gravitační hmotnost. Nevýhoda je v tom, že tento postup neumožňuje kvantitativně posoudit experimenty potvrzující rovnost (pasívní) gravitační hmotnosti a setrvačné hmotnosti (ve všech výrazech v této 3. kapitole by potom přímo bylo $\alpha = 1$). Určení souvislosti gravitační a setrvačné hmotnosti v práci [3], str. 311, je z tohoto hlediska určení souvislosti aktivní gravitační hmotnosti se setrvačnou hmotností, která je rovna pasívní gravitační hmotnosti. Naproti tomu všechny jevy a experimenty popsané v této kapitole potvrzují ekvivalenci setrvačné a pasívní gravitační hmotnosti, když předem byla teoreticky určena rovnost aktivní a pasívní gravitační hmotnosti jako důsledek principu akce a reakce — viz vztah (1).

Identita gravitační a setrvačné hmotnosti vyplývá ještě přesvědčivěji ze samé *existence planet a jiných vesmírných těles*, jak dokázal HORÁK ([15]). I nepatrný rozdíl gravitační a setrvačné hmotnosti by se projevil v dobách, kdy planety obíhaly kolem Slunce v netuhém stavu, neboť molekuly s různým poměrem setrvačné a gravitační hmotnosti by byly nuceny obíhat kolem Slunce po různých drahách a s různými periodami, což by vedlo k oddělení látek s různým poměrem obou hmotností. Projevilo by se to i při vlastní rotaci planet. Skutečnost, že Země si zachovala tvar přibližně rotačního elipsoidu po miliardy let, svědčí o velmi přesné rovnosti obou hmotností stejně jako dlouhodobá existence jiných vesmírných těles.

## 4. Závěr

*Hmotnost je mírou všeobecné vlastnosti materiálních objektů, která současně určuje jejich setrvačnost a gravitační interakci.*

Při důsledně logické výstavbě fyziky, která musí stavět na experimentech, není možné hned zavést pojem hmotnosti v celé šíři. V mechanice postupně zavedeme nejprve setrvačnou hmotnost a sílu zobecněním dynamických experimentů a pak gravitační hmotnost zobecněním experimentů na statických (Cavendishových) vahách.

Potom definujeme jednotky těchto veličin a hledáme vztah mezi oběma hmotnostmi na základě výsledků různých experimentů nebo astronomických jevů. Nakonec je pak možné vyslovit obecnou definici hmotnosti.

## Literatura


[1] JAMMER, M.: *Ponjatije massy* (s komentářem N. F. OVČINIKOVA). Izd. „Progress", Moskva 1967. Překlad z angl. originálu: *Concepts of Mass.* Harvard University Press, Cambridge—Massachusetts, 1961.

[2] OVČINNIKOV, N. F.: *Ponjatija massy i energii v ich istoričeskom razvitii i filosofskom značenii.* Moskva 1957.

[3] KOŠŤÁL, R.: *Hmota tíhová, hmota setrvačná a síla.* Práce Brněnské základny ČSAV, *29* (1957), sešit 6, 302.

[4] HORÁK, Z., KRUPKA, F., ŠINDELÁŘ V.: *Technická fyzika,* SNTL, Praha 1960.

[5] TRKAL, V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa,* NČSAV, Praha 1956.

[6] NEWTON, I.: *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Book 3, Proposition VI., Theorem VI. The Royal Society, London 1687, (Praha 1780).

[7] BESSEL, F. W.: Astronomische Nachrichten — *Schuhmacher — 10* (1833), 97. Annalen der Physik und Chemie — *Poggendorf — 25* (1832), 401.

[8] POTTER, H. H.: Proc. Roy. Soc. *104,* (1923), 588.

[9] EÖTVÖS, R. v.: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn *8* (1890), 65.

[10] EÖTVÖS, R. v., PEKÁR, D., FEKETE, E.: Annalen der Physik *68* (1922), 11.

[11] ROLL, P. G., KROTKOV, R., DICKE, R. H.: Ann. of Phys. *26* (1964), 422.

[12] DICKE, R. H.: *Gravitation and the Universe.* American Phylosophical Society, Philadelphia, 1970. Překlad do ruštiny: *Gravitacia i vselennaja.* Izd. „Mir". Moskva 1972.

[13] ILKOVIČ, D.: *Fyzika.* SVTL Bratislava, SNTL Praha 1962, 135.

[14] WESTPHAL, W.: Die Naturwissenschaften *10* (1922), 261.

[15] HORÁK, Z.: *Congrès International des Mathématiciens.* Oslo 1936.

[16] BRAGINSKIJ, B. V., PANOV, V. J.: Žurnal exp. i teoret. fiziki *61* (1971), vyp. 3, 875.


---

Nejlepším způsobem, jak postavit do protikladu přesnost a intuici, je příběh z jedné naší přední university. Konal se tam topologický seminář pro pokročilé, ve kterém přednášející věnoval celou hodinu zapsání zcela přesného důkazu. Když popsal všechny tabule, zjistil, že ho nikdo nesleduje, ani jeho vlastní kolega, který vyskočil a řekl: „Hele, já tomu důkazu vůbec nerozumím. Pokoušel jsem se tě sledovat, ale někde mi něco uniklo. Vůbec jsem to nepochopil." Přednášející se na chvíli zarazil, podíval se na něho a pak pravil: „Tys tomu neporozuměl? Podívej se, to je jako když se dva prostory takhle spojí" a propletl si ruce do pitoreskního tvaru. A pak kolega zvolal: „Teď jsem pochopil celý důkaz".

V tomto příběhu je mnoho typického z matematických výzkumů. Můžete psát dlouhé formule, aby důkaz byl úplný a přesný, dokonce *musíte* psát dlouhé formule a každý krok zdůvodnit. Avšak velmi často existuje klíčová idea, a když tu pochopíte, je ostatek věcí rutiny. Jestliže však idea zůstane nepochopena, nemá celý důkaz smysl pro studenta ani pro vědeckého pracovníka.

---