Michal Křížek; Liping Liu
Matematika ve starověké Číně

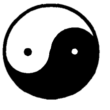
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 42 (1997), No. 5, 223--233

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139411

Matematika ve starověké Číně

Michal Křížek a Liping Liu, Praha

Podle staročínské filozofie všechny jevy vznikly z prachaosu, který se rozštěpil ve dva naprosté protiklady, *jin* a *jang*.



1. Úvod

Čínská civilizace je nejstarší dosud žijící civilizací [5]. To, že staří Číňané byli znamenití počtáři, dokazuje nejen množství unikátních astronomických výpočtů (např. předpovědi zatmění Slunce), zavedení vlastního lunisolárního kalendáře (viz [9, 13, 15]), ale i řada dalších fundamentálních objevů, které jsou obsahem stovek prací o staročínské matematice. O těch nejdůležitějších pojednává tento článek.

K prvním početním pomůckám ve starověké Číně patřily různé šňůrky a provázky s uzly, tyčinky z bambusu, dřeva, litiny, slonoviny či nefritu. Sloužily k uchovávání číselné informace a jednoduchému počítání. Později byly zaměněny za psané symboly.

Ve 14. století př. n. l. Číňané vyvinuli vlastní desítkovou soustavu čísel, jejíž nejvyšší jednotkou bylo 10 000. Je to doloženo vykopávkami, při nichž byly objeveny tisíce popsaných kostí a želvích krunýřů pocházejících ze 13. a 14. století př. n. l. Obsahovaly různé astronomické údaje o počtu dní, měsíců, objevení a zániku novy, údaje o počtu zvířat, lidí apod. (viz [10, 11]). Ze 14. až 11. století př. n. l. pocházejí i zápisy čísel na magických kostkách a keramických či bronzových předmětech. Jde vlastně o nejstarší desítkovou poziční soustavu [6].

Zápis číslovek se ale vyvíjel a měnil svoji podobu v různých částech Číny různě. Velké množství přehledných tabulek staročínských cifer je uvedeno v [11, str. 179 až 190]. Je sporné, zda nula byla objevena v Číně nebo zda se zde projevil indický vliv. Podle některých pramenů (viz např. [2]) se nula na počítacích destičkách znázorňovala prázdným místem již ve 4. století př. n. l. Avšak symbol nuly ve tvaru kroužku se v tisku objevuje až v roce 1247 v „Devíti knihách o matematice“ (viz [1, 6]). V tomto traktátu jsou shrnuty výsledky čínských matematiků od 1. tisíciletí př. n. l. Devět knih o matematice se často přepisovalo a rozšiřovalo. Přesná doba vzniku a autor však nejsou známy. Podle [6, 11] autorem byl pravděpodobně Zhang Cang[1]), který zemřel

[1]) V článku dáváme přednost nové čínské transkripci čínských jmen před českou.

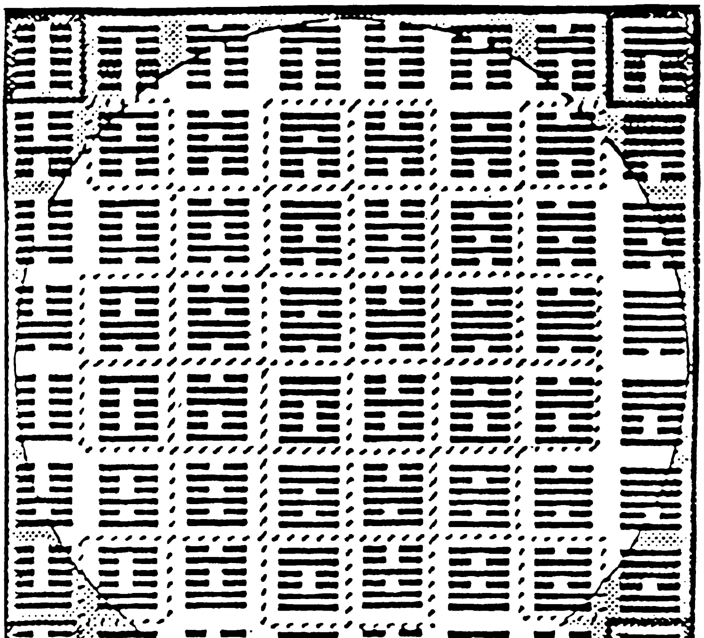
RNDr. Michal Křížek, DrSc. (1952), dr. Liping Liu (1960) jsou pracovníky Matematického ústavu AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@math.cas.cz, liu@math.cas.cz

Tato práce byla podpořena grantem Akademie věd ČR č. A1019601.

roku 152 př. n. l. První známá zmínka o záporné veličině pochází (viz [2, 11]) z období dynastie Han (206 př. n. l. – 200 n. l.).

2. Objev dvojkové soustavy?

V jedné z nejstarších čínských knih *Yi Jing* (Kniha proměn), která vznikla přibližně v 8. stol. př. n. l., je uveden obrázek (tzv. hexagram) obsahující 8 × 8 políček. Uvnitř každého z nich je 6 horizontálních čar (viz obr. 1). Přerušená čára znamená starý čínský princip *Yin* a plná princip *Yang* (česky *jin – jang*), které jsou v protikladu. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) spojuje tento hexagram s objevem dvojkové soustavy (viz [11, 12]). Budeme-li místo přerušené čáry uvažovat nulu a místo plné čáry jedničku, pak symboly v políčkách zleva doprava (horním řádkem počínaje) lze postupně interpretovat jako čísla $0, 1, 2, \ldots$ První číslo v levém horním políčku je tedy již diskutovaná *nula*, i když tento její zápis pravděpodobně nebyl v 8. století př. n. l. používán pro operace s čísly. Poslední číslo v pravém dolním rohu odpovídá 63, které se ve dvojkové soustavě zapisuje šesti jedničkami. Tento fenomenální objev dvojkové soustavy našel praktické uplatnění až v dnešní době počítačů, tj. téměř o tři tisíce let později. Je zajímavé, že symboly Yin – Yang lze nalézt na jihokorejské vlajce.



Obr. 1

3. Abakus

Někteří sinologové se domnívají (viz [6, 11]), že možná již ve 2. století n. l. (ale nejpozději v 6. stol.) se počítací tyčinky pokládaly na speciální desku podobnou šachovnici. To dalo vznik abaku, který byl již určen ke složitějšímu počítání. Původně to tedy byla dřevěná, kovová nebo kamenná deska s vodorovnými či svislými zářezy nebo s jamkami, do nichž se ukládaly tyčinky, kaménky, kuličky apod. Na podobném principu jsou vlastně založeny i dnešní elektronické kalkulačky. To, že je nebo není v nějaké jamce kulička, je v podstatě ekvivalentní tomu, že v paměťové buňce počítače je 0 nebo 1.

Tvar abaku se postupně vyvíjel, až získal současnou podobu (viz obr. 2) připomínající dětské počitadlo. Tento důmyslný prapředek počítačů je v Číně hojně používán dodnes. Zruční počtáři umějí na abaku nejen sčítat, odečítat, násobit a dělit (viz [3]), ale jsou schopni počítat i druhé a třetí odmocniny. Na obrázku 2a) je znázorněn abakus v základní poloze. Na každé jeho dřevěné tyčce (nebo drátěné osičce) je navlečeno 7 kroužků. Pět dolních symbolizuje prsty jedné ruky a horní dva kroužky symbolizují dvě ruce. Tyčky odpovídají desítkovým řádům. Jejich počet bývá různý, např. 9, 11, 13, 17 i více.

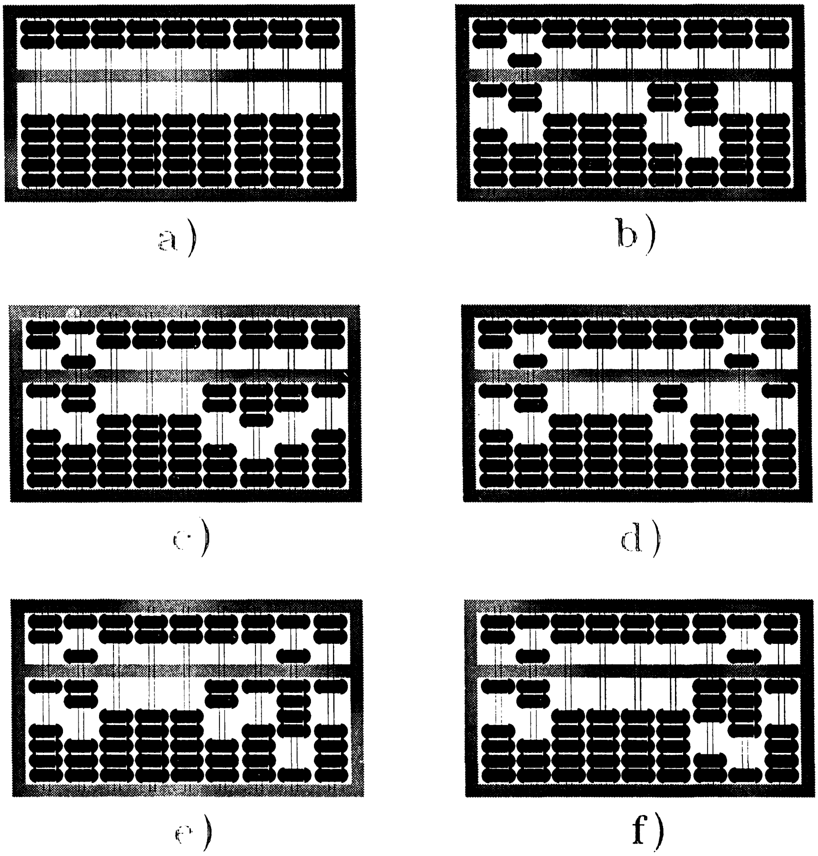
Pro zajímavost si ukážeme, jak se na abaku vynásobí 17 krát 23 (znalost malé násobilky je k tomu ovšem nutná). Na obrázku 2b) je 17 na prvních dvou tyčkách, přičemž sedmička na druhé tyčce odpovídá dvěma prstům a jedné ruce (s pěti prsty). Číslo 23 je na šesté a sedmé tyčce. Zřejmě

$$\begin{aligned} 17 \times 23 &= (3 + 20) \times (7 + 10) = \\ &= (3 \times 7) + (3 \times 10) + (2 \times 7 \times 10) + (2 \times 100) = 391. \end{aligned}$$

Číslo 391 získáme postupným sčítáním čtyř výše uvedených sčítanců na posledních tyčkách abaku. Ty jsou rezervovány pro výsledek tak, že na poslední tyčce budou jednotky, na předposlední desítky atd. Obrázek 2c) znázorňuje prvního sčítance $3 \times 7 = 21$. V dalším kroku (viz obr. 2d)) se přičítá 3×10, tj. ke dvěma kroužkům na předposlední tyčce by se měly přisunout 3 zbývající. Pět prstů je ovšem ekvivalentních jedné ruce, proto se posune kroužek z horní části abaku a kroužky z části dolní se vrátí do základní polohy. Sedmá tyčka se vynuluje, protože obě násobení trojkou z této tyčky se již provedla. Na předposledním obrázku 2e) je k částečnému součtu přičteno $2 \times 7 \times 10 = 14 \times 10$. Konečně na posledním obrázku 2f) se přičítá 2×100, tj. 2 kroužky na sedmé tyčce. Šestá tyčka je vynulována, protože obě násobení dvojkou z této tyčky se již provedla. Z obrázku 2f) tedy vidíme, že výsledek násobení je 391. Na dostatečně velkém abaku lze podobným způsobem násobit i mnohem větší čísla.

4. Algebra a geometrie

V 1. stol. př. n. l. Číňané znali algoritmy pro stanovení přibližných hodnot druhých a třetích odmocnin. Kolem počátku našeho letopočtu již dovedli řešit soustavy li-



Obr. 2

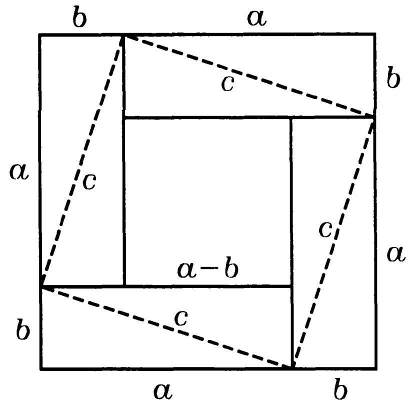
neárních algebraických rovnic o dvou a třech neznámých. Koeficienty každé rovnice se zapisovaly do tabulky shora dolů. Každý sloupec tak odpovídal jedné rovnici. Na tento „maticový" zápis soustavy se používala metoda fangcheng (viz [11]), která je ekvivalentní Gaussově eliminaci, tj. výsledná tabulka měla trojúhelníkový tvar.

Ve 3. století n. l. Číňané uměli vypočítat kořeny kvadratické rovnice a dokázat Pythagorovu větu následujícím způsobem. Z obrázku 3 je patrno, že pro obsahy čtverců o stranách $a + b$ a c platí

$$(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2,$$
$$2ab + (a-b)^2 = c^2.$$

Sečtením obou těchto rovnic dostaneme, že $a^2 + b^2 = c^2$. Tento vizuální důkaz Pythagorovy věty pochází od Liu Hui (3. stol.). Lze jej však ještě zjednodušit. Ze vztahu $(a+b)^2 = c^2 + 2ab$ totiž Pythagorova věta plyne okamžitě, což se dodnes uvádí v učebnicích středoškolské matematiky.

Liu Hui se také zabýval výpočtem Ludolfova čísla π. Jeho hodnotu aproximoval zlomkem $\frac{157}{50} = 3{,}14$. Podle [17] v 5. století Zu Chongzhi (429–500) stanovil dolní



Obr. 3

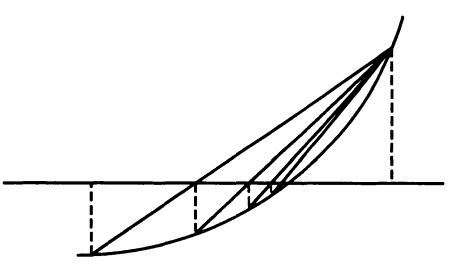
a horní hranici vymezující π takto:

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

(jiný pramen [11] uvádí podobnou hodnotu $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$, srov. též [6, str. 64]).[2]) Navíc jeho syn Zu Xuan odvodil vzorec pro výpočet objemu koule. Již předtím se vědělo, že obsah kruhu je roven polovině obvodu násobeného polovinou průměru.

Pro tuto dobu byl charakteristický zájem o pravidla pro výpočet obsahů rovinných útvarů a objemů různých těles (kužel, komolý jehlan apod.). Objemy složitějších těles se počítaly tak, že se tělesa rozdělila na jednodušší části.

Pro přibližné řešení algebraických rovnic třetího stupně byla v 7. století úspěšně použita metoda *regula falsi* (metoda sečen), při jejímž použití se každý reálný kořen hledá iteračně pomocí posloupnosti sečen (viz obr. 4).



Obr. 4

[2]) Připomeňme, že Archimédes (287–212 př. n. l.) použil kružnici s opsaným a vepsaným pravidelným 96-úhelníkem, a tak určil přibližnou hodnotu π na tři desetinná místa. Nizozemský matematik Ludolf van Ceulen (1540–1610) pomocí pravidelného mnohoúhelníku o 1 073 741 284 vrcholech stanovil π na 35 desetinných míst.

Poznamenejme ještě, že r. 1248 Li Zhi zavedl záporné exponenty neznámých veličin. Eliminací neznámých v soustavě čtyř rovnic vyšších stupňů se zabýval Zhu Shijie v r. 1303. Více podrobností o staročínské geometrii a algebře je obsaženo např. v [16].

5. Čínská věta o zbytcích

Sunzi Suanjing ve své knize o aritmetice předkládá řešenou úlohu, která dala vznik „čínské větě o zbytcích“, což je jedno z nejužitečnějších tvrzení v teorii čísel. Přesný vznik této knihy není znám, ale určitě spadá do období 280–473 n. l. Úloha zní takto: Je dán neznámý počet x předmětů. Počítáme-li je po trojicích, zbudou dva, počítáme-li je po pěticích, zbudou tři, a konečně počítáme-li je po sedmi, zbudou dva. Kolik je x?

Pomocí Gaussova způsobu zápisu můžeme tuto prastarou úlohu napsat jako soustavu kongruencí[3])

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \bmod 3, \\ x &\equiv 3 \bmod 5, \\ x &\equiv 2 \bmod 7. \end{aligned} \tag{1}$$

Yang Hui ve své knize z r. 1275 popisuje dalších pět podobných příkladů. Čínská věta o zbytcích (angl. Chinese Remainder Theorem) se v současnosti formuluje takto:

Věta. *Nechť $m_1, m_2, \ldots, m_k$ jsou po dvou nesoudělná přirozená čísla. Pak pro soustavu kongruencí*

$$\begin{aligned} x &\equiv z_1 \bmod m_1, \\ x &\equiv z_2 \bmod m_2, \\ &\ldots \\ x &\equiv z_k \bmod m_k, \end{aligned} \tag{2}$$

kde z_i jsou celá čísla, existuje právě jedno řešení x modulo M, kde

$$M = m_1 m_2 \cdots m_k.$$

Konstrukce takového řešení x je v [11] popsána následovně: Definujme M_i pomocí rovností

$$M = m_1 M_1 = m_2 M_2 = \cdots = m_k M_k. \tag{3}$$

Protože m_i a M_i jsou nesoudělná, existují celá čísla y_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, určená jednoznačně modulo m_i tak, že[4])

$$M_i y_i \equiv 1 \bmod m_i. \tag{4}$$

[3]) Zápis $x \equiv z \bmod m$ znamená, že m dělí $x - z$ beze zbytku.

[4]) Nechť m a M jsou nesoudělná. Pro $n = 1, \ldots, m-1$ definujme $Z_n \in \{1, \ldots, m-1\}$ pomocí kongruence $Mn \equiv Z_n \bmod m$. Sporem se snadno přesvědčíme, že všechna Z_n jsou vzájemně různá. Lineární kongruence $My \equiv 1 \bmod m$ má tedy právě jedno řešení y modulo m.

Obecné řešení (2) je pak tvaru

$$x \equiv z_1 M_1 y_1 + z_2 M_2 y_2 + \cdots + z_k M_k y_k \bmod M. \tag{5}$$

Abychom se přesvědčili, že takto definované číslo x řeší soustavu (2), zvolme $i \in \{1, \ldots, k\}$ pevně. Z (3) vidíme, že všichni sčítanci kromě i-tého z pravé strany (5) obsahují činitele m_i, a tudíž nepřispívají do zbytku modulo m_i. Odtud plyne, že

$$x \equiv z_1 M_1 y_1 + z_2 M_2 y_2 + \cdots + z_k M_k y_k \equiv z_i M_i y_i \equiv z_i \bmod m_i,$$

kde poslední ekvivalenci dostaneme tak, že kongruenci (4) vynásobíme z_i.

Abychom dokázali jednoznačnost, předpokládejme, že x_1 a x_2 jsou dvě řešení soustavy (2). Pak $x_1 \equiv x_2 \bmod m_i$ pro každé $i = 1, \ldots, k$. Protože m_i jsou vzájemně nesoudělná, je $x_1 \equiv x_2 \bmod M$. Řešení (2) je tedy určeno jednoznačně modulo M.

Ve 13. století Qin Jiushao řešil kongruenci (4) způsobem (srov. [14, str. 97]), který je obdobný Euklidovu algoritmu.[5]) Úlohu hledání y_i splňujícího kongruenci (4) lze též převést na řešení diofantické rovnice $M_i y_i - m_i v_i = 1$ pro neznámé y_i a v_i (viz [14]).

Řešení soustavy (2) speciálně pro $k = 2$ lze též charakterizovat takto: Nechť $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ jsou nesoudělná a nechť existují přirozená čísla $y_1 < m_1$ a $y_2' < m_2$ tak, že $m_2 y_1 - m_1 y_2' = 1$. Pak

$$x \equiv z_1 \bmod m_1 \;\&\; x \equiv z_2 \bmod m_2 \iff x \equiv z_1 m_2 y_1 - z_2 m_1 y_2' \bmod M.$$

Dvojnásobným použitím této ekvivalence na soustavu (1) dostaneme její řešení $x = 23$.

Čínská věta o zbytcích vlastně říká, že každé přirozené číslo x, které nepřevyšuje M, lze jednoznačně charakterizovat pomocí k-tice zbytků $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$, kde

$$0 \leqq z_i < m_i.$$

Tomu se říká sino-reprezentace. Tak například pro $k = 2$, $m_1 = 3$ a $m_2 = 5$ dostaneme tabulku:

z_2	0	1	2	3	4
$z_1 = 0$	0	6	12	3	9
$z_1 = 1$	10	1	7	13	4
$z_1 = 2$	5	11	2	8	14

Vidíme, že vnitřek tabulky obsahuje každé z čísel $0, \ldots, 14$ právě jednou. Povšimněme si dále, že se tato čísla zvětšují o jedničku ve směru diagonál. Podobnou strukturu má také tabulka (srov. [9, str. 274] nebo [15, str. 238]), která je základem tradičního čínského kalendáře založeného na šedesátiletém cyklu.

[5]) Pomocí Euklidova algoritmu se hledá největší společný dělitel (j, m) přirozených čísel $j \geqq m$. Jestliže m dělí j, pak $(j, m) = m$. V opačném případě je $(j, m) = (z, m)$, kde z je zbytek při dělení j číslem m. Větší problém se tak převádí na menší. Další kroky algoritmu probíhají obdobně. Problém se redukuje na menší a menší, dokud nedostaneme zbytek 0.

Čínská věta o zbytcích má v současné době řadu praktických aplikací (viz [14]) při digitálním počítání konvolucí či Fourierových transformací, při řešení kvadratických kongruencí apod.

6. Hornerovo schéma a Pascalův trojúhelník

Okolo roku 1050 Jia Xian zavádí metodu[6]) výpočtu hodnot polynomů, která je v naší literatuře známa pod jménem *Hornerovo schéma.* Funkční hodnotu

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

v bodě x_0 můžeme postupně počítat takto: $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1 + b_0x_0$, $b_2 = a_2 + b_1x_0$, $\dots$, $f(x_0) = b_n = a_n + b_{n-1}x_0$. Povšimněme si, že v každém kroku této metody se využívá předchozího mezivýsledku a používá se jen jedno násobení a jedno sčítání. Nemusí se tedy počítat žádné mocniny, a tak se šetří počet prováděných aritmetických operací. Hornerovo schéma lze zapsat též takto:

$$f(x) = (\dots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \dots + a_{n-1})x + a_n.$$

V 11. a 12. století začali Číňané používat obdobu Pascalova[7]) trojúhelníku binomických koeficientů pro práci s rovnicemi vyšších stupňů. V čínské literatuře je tento trojúhelník pojmenován po matematikovi Yang Hui, který jej publikoval ve své knize z roku 1261 až do stupně 6. Na obrázku 5 je znázorněna jedna z pozdějších podob tohoto trojúhelníka z r. 1353. Šikmé spojnice na obrázku naznačují, že Číňané již znali platnost vztahu

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \qquad \text{pro } 0 \leqq k < n,$$

i když jej takto nezapisovali.

V práci [7] se popisuje zajímavá historie následujícího vztahu mezi binomickými koeficienty

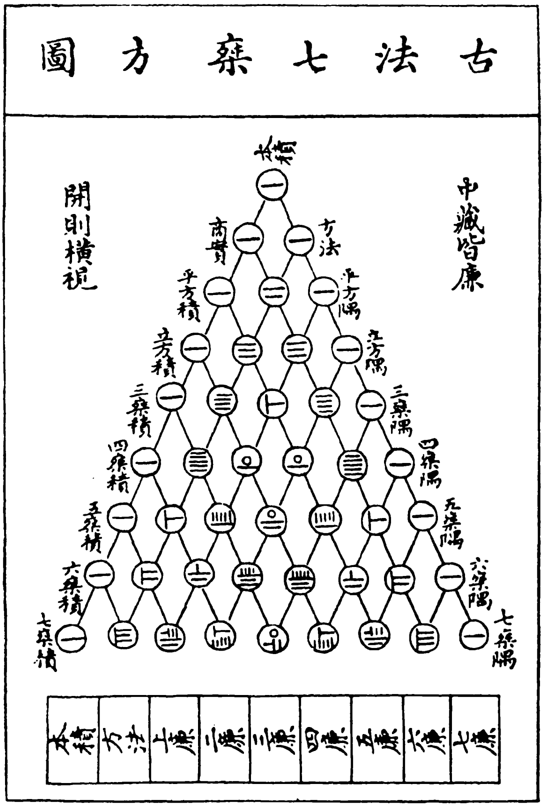
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2,$$

který byl objeven v Číně, ale podle staré čínské tradice byl publikován bez důkazu. V tomto století byl dokázán různými způsoby několika evropskými matematiky.

---

[6]) Britský matematik William George Horner (1786–1837) později znovu objevil tuto metodu — viz Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A *1* (1819), 308–335. Před ním totéž schéma publikoval také Paolo Ruffini v roce 1804.

[7]) Blaise Pascal — významný francouzský matematik a fyzik žijící v letech 1623–1662.



Obr. 5

7. Test prvočíselnosti

Staří čínští matematici používali následující „ekvivalenci“ pro testování prvočíselnosti přirozených čísel. Slovo ekvivalence píšeme v uvozovkách, neboť ve skutečnosti platí jen jedna implikace. Staročínský test prvočíselnosti říkal (viz [14]), že

$$p \text{ je prvočíslo} \quad „\Longleftrightarrow“ \quad p \mid 2^p - 2, \tag{6}$$

tj. p dělí $2^p - 2$. Je-li p prvočíslo, pak podle malé věty Fermatovy $p \mid n^p - n$ pro každé přirozené číslo n (viz [8])[8]), tedy speciálně i pro $n = 2$. Implikace $\Longrightarrow$ proto platí.[9]) Pro $n = 2$ si můžete ověřit, že $5 \mid 2^5 - 2$, $7 \mid 2^7 - 2$ atd.

Jestliže naopak p není prvočíslo a navíc $p < 341$, pak lze prověřit, že p nedělí $2^p - 2$. Staří Číňané však nikdy nevyzkoušeli případ složeného čísla $p = 341 = 11 \times 31$.

[8]) Například $3 \mid n^3 - n$, protože $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ je součin tří po sobě jdoucích čísel.

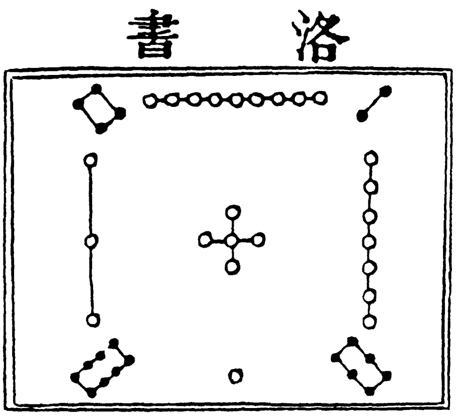
[9]) Jinými slovy, pokud p nedělí $2^p - 2$, pak je p složené. Takto tedy můžeme snadno zjistit, že p je složené, aniž bychom znali nějakého dělitele.

Snadno totiž zjistíme, že $2^{10} \equiv 1 \bmod 341$, a tedy $2^{340} \equiv 1 \bmod 341$. Vynásobíme-li tuto kongruenci dvěma, vidíme, že 341 dělí číslo $2^{341} - 2$ beze zbytku. Implikace $\Longleftarrow$ tedy neplatí. Při vší úctě ke starým čínským matematikům tento fakt mohli na abacích jen těžko zjistit, neboť číslo $2^{341} - 2$ má přes 100 cifer a použitá pravidla pro počítání s kongruencemi tehdy nebyla známa.

Existují ještě dvě složená trojciferná čísla $p = 561$ a $p = 645$, která dělí $2^p - 2$. Pro ostatní $p < 1000$ je „ekvivalence“ (6) splněna. Složené číslo p, pro něž $p \mid 2^p - 2$, se nazývá *pseudoprvočíslo* (vzhledem k základu 2). Snadno lze například ukázat, že každé Fermatovo číslo $F_m = 2^{2^m} + 1$ (viz [8]) je prvočíslo anebo pseudoprvočíslo. Staročínský test prvočíselnosti dal tedy podnět k zavedení nového matematického pojmu — pseudoprvočísla. Poznamenejme ještě, že pseudoprvočísla jsou na číselné ose rozmístěna velice řídce a je dokázáno, že je jich nekonečně mnoho.

8. Závěrečné poznámky

Kontakty staročínských matematiků s matematiky Japonska, Koreje, Mongolska, Tibetu, Indie, Vietnamu a islámských zemí jsou podrobně popsány v [11]. Díky misionářům máme i důkazy o kontaktech s evropskými matematiky od konce 16. století.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. 6

V roce 1723 vznikla matematická encyklopedie *Shuli jingyun*, která obsahovala téměř veškeré matematické znalosti dostupné v tehdejší Číně. Staročínské matematické práce ovšem neměly strukturu: definice–věta–důkaz. Ani se nebudovaly nové matematické teorie na základě nějakých axiomů, jako tomu bylo ve starém Řecku. Staročínská matematika měla spíše počtářský charakter. Nové myšlenky se většinou předkládaly ve formě řešených příkladů, navržených postupů (algoritmů) apod. K tomu Číňané využívali různé empirické a heuristické metody, metody srovnání a analogie. Výklad byl často velice stručný a dosažené výsledky se většinou předkládaly bez důkazů (což bylo charakteristické nejen pro staročínskou matematiku). Výsledky se předávaly z generace na generaci v ústní nebo psané formě. Pro zajímavost uveďme, že první čínský matematický časopis *Suanxue bao* byl založen až v roce 1899.

Na závěr ještě připomeňme, že kořeny čínské podoby hry v šachy, jejíž prvotní pravidla se značně lišila od současných, sahají až do 3. stol. př. n. l. Číňané rovněž vytvořili hru go (která se do Japonska rozšířila až v roce 735 n. l.). Vynalezli i hru mlýnek, řadu magických kruhů a čtverců (viz např. obr. 6), tangramy, známý hlavolam *čínské kroužky* apod. Mnoho dalších zajímavostí nalezne čtenář například v [4, 11, 14].

Děkujeme RNDr. Janu Chlebounovi, CSc., za hodnotné připomínky k tomuto článku a RNDr. PhDr. Aleně Šolcové za zapůjčené materiály a řadu cenných podnětů.

Literatura

[1] E. I. BEREZKINA: *O „Matematike v děvjati knigach“.* Istoriko-matematičeskie issledovanija, díl 10, Moskva 1957.

[2] W. BÖTTGER: *Kultura ve staré Číně.* Panorama, Praha 1984.

[3] J.-CH. FERRON: *Le guide pratique du boulier Chinois.* Editions Sand & Tchou 1987.

[4] H. GERICKE: *Mathematik in Antike und Orient.* Springer, Berlin 1984.

[5] J. GERNET: *History of Chinese civilization.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1985.

[6] A. P. JUŠKEVIČ: *Dějiny matematiky ve středověku.* Academia, Praha 1977.

[7] J. KAUCKÝ: *O jednom problému z dějin čínské matematiky.* Mat.-fyz. časopis *13* (1963), 32–40.

[8] M. KŘÍŽEK: *O Fermatových číslech.* PMFA *40* (1995), 243–253.

[9] M. KŘÍŽEK, L. LIU: *Struktura tradičního čínského kalendáře.* Rozhledy mat.-fyz. *73* (1996), 270–275.

[10] V. LIŠČÁK: *Astronomie ve starověké Číně.* Nový Orient *41* (1986), 302–304.

[11] J.-C. MARTZLOFF: *The history of Chinese mathematics.* Springer, Berlin 1997.

[12] T. PAPPAS: *More joy of mathematics.* Wide World Publ., Tetra 1991.

[13] S. I. SELEŠNIKOV: *Člověk a čas. Dějiny kalendáře a chronologie.* Práce, Praha 1974.

[14] M. R. SCHROEDER: *Number Theory in Science and Communication.* Springer, Berlin 1990.

[15] K. SLAVÍČEK: *Listy z Číny do vlasti.* Vyšehrad, Praha 1995.

[16] B. L. VAN DER WAERDEN: *Geometry and algebra in ancient civilizations.* Springer-Verlag, Berlin 1983.

[17] Kol. autorů pekingského planetária: *Úspěchy starověké čínské astronomie* (čínsky). Beijing Scientific and Technology Publishers 1987.