

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Stanley Wagon

The Banach-Tarski Paradox

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 32 (1987), No. 4, 227--230

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139308>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1987

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

vzhůru. Její činnost, pokud se dá vyjádřiti v penězích, neměřil se již tisíci, ale desetitisíci, ba ještě spíše statisíci. Její význam kulturní a národní jest pak vůbec nedocenitelný.

Nezapomeňme však nikdy, že k tomuto velkolepému rozvoji dospěla Jednota jen radostnou součinností a oddaností všeho svého členstva, nadšenou a nezištnou obětavostí předních mužů z jeho řad, předních mužů národa. Její utěšený rozvoj a blahodárná, dalekosáhlá činnost získávaly jí vždy v stejném poměru svého vzrůstu nové přízně, nové přátele a pracovníky. Přečetné stránky této knihy jsou toho dokladem. Kéž tomu jest tak i v budoucnosti, kéž by také toto vypravování, jež osvětlilo tuto činnost, vyneslo na povrch tolik zásluh a lásky, kéž by i ono dovedlo rozmnožiti lásku a oddanost dnešních přátel Jednoty, kéž by i dovedlo získat jí nových.

*Ať žije, ať roste, ať vzkvétá Jednota českých matematiků!*

## Literatura

[1] POSEJPAL, V.: *Dějepis Jednoty českých matematiků*. JČM Praha 1912.

## Stan Wagon: The Banach-Tarski Paradox

Protismyslné jevy odporující našim představám se nazývají zpravidla *paradoxy*. Mají své místo v matematice zdánlivě ne-logicky, v mnohém však ovlivnily i její vývoj. Se změnou hloubky poznání ztrácejí postupně svůj mytický charakter. Dnes např. nikoho neudiví, že všech přirozených čísel „je stejně mnoho“ jako těch, která jsou čtverci jiného přirozeného čísla. Tento jev zpozoroval už Galileo Galilei (1564–1642), nicméně dnes bychom ho stěží označili za paradox. Dokonce i v pozmeněné formě rozkladu množiny všech přirozených čísel na disjunktní nekonečné spočetné množiny (např. sudých a lichých čísel) lze jím sotva překvapit člověka

seznámeného se základními poznatky teorie množin. Přesto však zde vystupuje myšlenka rozdělení celku na dvě disjunktní části stejně velké jako celá množina, tedy „zdvojení  $\mathbb{N}$ “.

Jsou-li  $X$  a  $Y$  zcela libovolně omezené množiny v trojrozměrném prostoru, které mají neprázdný vnitřek, lze  $X$  i  $Y$  rozložit na konečně mnoho (řekněme  $n$ ) po dvou disjunktních množin  $X_1, X_2, \dots, X_n$  a  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  tak, že  $Y_j$  je izometrickým obrazem  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Jinak řečeno, těleso  $X$  lze rozbit na konečný počet kousků, které po přeskupení (kousky je dovoleno jen posunovat a otáčet) lze složit tak, že dostaneme těleso  $Y$ .

Toto tvrzení je skutečně pravdivé a považuje se za jeden z nejpřekvapivějších matematických výsledků. Je zcela protismyslné, představíme-li si  $X$  jako bramboru a  $Y$  jako zeměkouli a varuje nás tak důrazně před směřováním „ideálních“ objektů matematiky s „konkrétními“ předměty z běžného života. V „matematickém

---

Recenze knihy S. WAGONA: *The Banach-Tarski Paradox*. Encyklopédia of Mathematics and its Applications vol. 24. Cambridge University Press, Cambridge, 1985, 251 stran.

světě“ je překvapující, nicméně platí a má řadu závažných důsledků v teorii míry, souvisí úzce s teorií grup a podstatně závisí na axiómech teorie množin. Říká se mu Banachův-Tarského paradox a pochází z r. 1924. Recenzovaná kniha je bilancí současného stavu bádání, které bylo stimulováno objevem tohoto paradoxu.

Pro přiblížení problematiky začněme krátkou exkurzí do teorie míry (označení „míra“ užíváme v širším smyslu). Je velmi pravděpodobné, že pod problémem měření objemu geometrických objektů v eukleidovském prostoru si představujeme všichni více méně totéž. Systém  $\mathcal{S}$  všech „měřitelných“ objektů by měl přinejmenším obsahovat tělesa známá z elementární geometrie (krychle, koule apod.). Přitom by měl být co největší, v ideálním případě by měl obsahovat všechny podmnožiny prostoru. Každé množině  $T \in \mathcal{S}$  chceme přiřadit její „míru“ (tj. v  $\mathbb{R}^3$  objem, v  $\mathbb{R}^2$  obsah, v  $\mathbb{R}^1$  délku) a na této množinové funkci  $\mu$  požadujeme, aby měla některé přirozené vlastnosti: měla by být nezáporná a mělo by platit  $\mu(T_1 \cup T_2) = \mu(T_1) + \mu(T_2)$ , pokud  $T_1, T_2 \in \mathcal{S}$  a  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$  (tzv. aditivita). Dále by se měla shodovat s elementárním objemem, tj. pro jednotkovou krychli  $W \subset \mathbb{R}^m$  by mělo platit  $\mu(W) = 1$  (normalizace) a eukleidovské transformace množin z  $\mathcal{S}$  by měly zachovávat jejich míru (invariance). Jinak řečeno  $\mu(\varphi(T)) = \mu(T)$  pro každou izometrii  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  a každé  $T \in \mathcal{S}$ , pro něž  $\varphi(T) \in \mathcal{S}$ .

Je známo, že zvolíme-li za  $\mathcal{S}$  systém všech množin měřitelných v Jordanově-Peanově smyslu, je na něm taková  $\mu$  předcházejícími požadavky jednoznačně určena. Tento systém je však z hlediska matematické analýzy příliš chudý, neobsahuje například ani všechny otevřené množiny v  $\mathbb{R}^m$ . Definiční obor  $\mu$  lze ještě dále rozši-

řovat, nikoli však neomezeně. Banachův-Tarského paradox ve verzi pro  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$ , ukazuje, že nelze žádat, aby  $\mathcal{S}$  byl systém všech podmnožin  $\mathbb{R}^m$  (volte např. za  $X$  jednotkovou kouli, za  $Y$  sjednocení dvou stejně velkých takových disjunktních koulí a s využitím aditivity a izometrie odvodte  $\mu(X) = \mu(Y)$ ). Vtip je v tom, že části  $X_1, \dots, X_n$  vystupující v tvrzení nemohou být všechny měřitelné pro žádnou aditivní normalizovanou míru invariantní vůči izometriím. Banachův-Tarského paradox má tedy ve vícerozměrném prostoru za následek *neexistenci* míry s určitými příjemnými vlastnostmi.

Čtenáři je jistě podezřelé, že jsme taktně pomlčeli o situaci na přímce a v rovině. To má hlubší důvod: na  $\mathbb{R}^1$  i na  $\mathbb{R}^2$  invariantní aditivní normalizované míry definované na systému všech podmnožin prostoru existují. Tento výsledek náleží Banachovi; říká nám, že se na  $\mathbb{R}^1$  a  $\mathbb{R}^2$  žádný Banachův-Tarského paradox nekoná. Existence zmíněné míry na  $\mathbb{R}^1$  a  $\mathbb{R}^2$  nemá však tak velký význam, jak by se mohlo na první pohled zdát: taková míra není určena jednoznačně a její konstrukce – jak se dá očekávat – je založena na axiómu výběru.

Jak jsme již zdůraznili, Banachův-Tarského paradox má úzký vztah k otázce existence měř s určitými přirozenými geometrickými vlastnostmi. Tato souvislost je v recenzované knize velmi podrobně prozkoumána; zhruba polovina knihy je věnována konstrukcím jistých paradoxních rozkladů (ty mají za následek neexistenci jistých měř) a zbytek se týká konstrukce speciálních měř (ty naopak ukazují, že za určitých okolností nemohou paradoxní rozklady existovat). Spojovacím článkem je kap. 9, z níž vysvítá, že ve skutečnosti existence paradoxního rozkladu (vzhledem k jisté grupě) je ekvivalentní neexistenci

invariantní (opět vzhledem k uvažované grupě) normalizované aditivní míry.

Měli bychom poznamenat, že odlišnost situace v  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$  je zaviněna rozdílnými grupově teoretickými vlastnostmi izometrií; proto tedy nepřekvapuje, že se v knize klade velký důraz na algebraické aspekty paradoxních rozkladů; věnujme se však obsahu poněkud podrobněji.

Úvodní kapitola přináší abstraktní pohled na paradoxní rozklady. Do popředí zde vystupuje již zmíněná myšlenka „zdvojení“. Jejím jiným příkladem je tzv. Sierpińskiego-Mazurkiewiczův paradox, který říká, že existuje neprázdná množina  $X \subset \mathbb{R}^2$ ,  $X_0 \subset X$ , otočení  $\varrho$  a posunutí  $\tau$  v rovině  $\mathbb{R}^2$  tak, že

$$\varrho(X) = X_0, \quad \tau(X) = X \setminus X_0.$$

Takovou množinu  $X$  je možno popsat „efektivně“, tj. bez použití axiómu výběru. Vadou na kráse je, že  $X$  je neomezená a spočetná (je známo, že  $X$  nemůže být omezená množina s neprázdným vnitřkem).

Následující kapitola obsahuje důkaz paradoxu Hausdorffova: existuje spočetná podmnožina  $D$  jednotkové sféry  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  taková, že  $S^2 \setminus D$  je  $SO_3$  – paradoxní. Podrobněji: lze definovat spočetnou množinu  $D$  a množiny  $G_1, G_2, G_3$  tak, že  $S^2 \setminus D = G_1 \cup G_2 \cup G_3$  a přitom pro vhodnou dvojici rotací  $\varphi, \psi$  platí

$$\varphi(G_1) = G_2 \cup G_3, \quad \psi(G_1) = G_2, \\ (\psi \circ \varphi)(G_1) = G_3.$$

Je zajímavé, že jak Hausdorffův tak Sierpińskiego-Mazurkiewiczův paradox se objevují v tomtéž roce, tj. v r. 1914.

Třetí kapitola podává důkazy různých verzí Banachova-Tarského paradoxu. Podstata věci spočívá v odstranění výše zmíněné spočetné množiny  $D$ , což již otvírá cestu k jeho „silné formě“, uvedené ve druhém

odstavci recenze. Část kapitoly je též věnována problematice rozkladu mnohoúhelníků (srv. Wagonův článek otištěný v překladu v PMFA 28 (1983), 320–328).

Čtvrtá kapitola se zabývá „optimalizací“ paradoxních rozkladů z hlediska počtu prvků rozkladu. Z r. 1947 pochází např. výsledek, že jednotkovou kouli lze rozložit na 5 částí (jedna je dokonce jednobodová), které lze „přestavět“ na dvě disjunktní koule o poloměru 1. I když zřejmě není možné, aby těchto 5 částí bylo vesměs měřitelných ve smyslu Lebesgueovy teorie, nejsou tyto části z topologického hlediska nutně příliš špatné; je známo, že každá z nich může být souvislá a lokálně souvislá. Číslo 5 je pro paradoxní rozklad koule minimální, paradoxní rozklad na menší počet částí možný není.

Další kapitola je věnována problematice prostorů vyšší dimenze, resp. paradoxním rozkladům v neeukleidovských prostorech. Jeden z problémů zde řešených stojí za zmínku: Steinhausův had je posloupnost (alespoň dvou) shodných pravidelných čtyřstěnů v  $\mathbb{R}^3$  taková, že sousední čtyřstěny mají společnou právě jednu stěnu a každý čtyřstěn je různý od předchůdce svého předchůdce. Nyní se ptáme, zda existuje takový Steinhausův had, aby jeho poslední čtyřstěn byl posunutím prvního čtyřstěnu. Odpověď je negativní, takový had neexistuje.

V šesté kapitole se studují volné grupy rotací a s nimi související paradoxy, v sedmé pak se objasňují paradoxy vzhledem ke speciálním grupám transformací v prostorech nízké dimenze. Poslední kapitola první části knihy je věnována abstraktní teorii shodné rozložitelnosti.

Pomineme spojovací a již dříve zmíněnou kapitolu 9 a budeme se věnovat druhé části knihy. Kapitoly 10 a 12 jsou věnovány pojmům amenability a superamenability

ty – zkoumají se míry na grupách invariantní vůči grupové operaci a jsou charakterizovány ty grupy, na nichž takové netriviální míry existují. Poslední kapitola poskytuje srozumitelný výklad o roli axiómu výběru při vyšetřování otázek teorie míry a paradoxních rozkladů. Pro pohodlí čtenáře připojené dodatky jsou věnovány Jordanově objemu a grupám eukleidovských transformací. Ke knize je též připojen seznam 19 problémů, z nichž některé jsou otevřené od třicátých let našeho století. Jeden z nich souvisí s obsahem kapitoly 11, o které jsme dosud nemluvili.

V r. 1923 formuloval polský matematik Ruziewicz tento problém: je Lebesgueova míra jediná invariantní normalizovaná *aditivní* míra na systému všech omezených lebesgueovsky měřitelných množin z prostoru  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$ ? (Je vcelku běžně známo, že Lebesgueova míra je jediná  $\sigma$ -aditivní míra s uvedenými vlastnostmi.) Na pozitivní řešení tohoto problému však bylo přesto nutné čekat téměř 60 let (D. Sullivan, G. A. Margulis). Přitom je pozoruhodné, že zaměníme-li ve formulaci problému „lebesgueovsky měřitelné“ množiny za „borelovské“, odpověď na vzniklý problém není dosud známa. Známé metody v této situaci zcela selhávají. Potíž spočívá

v tom, že množina míry nula má obecně mnoho neborelovských podmnožin.

Při pozitivním řešení Ruziewiczova problému sehrál důležitou roli i Banachův-Tarského paradox. Dá se ho totiž využít k důkazu toho, že každá míra z Ruziewiczova problému je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře (viz již dříve citovaný článek S. Wagona v PMFA). To otevírá cestu k použití metod funkcionální analýzy.

Kniha je psána poutavě a s vysokou matematickou kulturou. Obsahuje podrobné komentáře o vývoji problematiky a seznam citovaných prací čítá přes 250 položek. První tři kapitoly jsou dostupné čtenáři s minimální matematickou průpravou – stačí znát něco o spočetných množinách, lineární algebře a teorii grup. Zbytek knihy je náročnější – ten totiž ukazuje, že teprve spojení moderní analýzy a algebry vede k úspěšnému řešení těžkých a zajímavých problémů. Jemnost probírané látky umocňuje úzká vazba na otázky základů matematiky, související zejména s axiómem výběru.

Kniha pěkně ilustruje nutnost vzájemné interakce matematických disciplín. Potvrzuje, že hledání hranic mezi algebrou, geometrií, analýzou apod. je nejen nesmyslné, ale i zcela beznadějně.

*Ivan Netuka a Jiří Veselý*