Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Václav Vilhelm

O čtrnáctém Hilbertově problému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 2, 92--94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139235

Hilbertovy problémy

O čtrnáctém Hilbertově problému

Václav Vilhelm, Praha

Čtrnáctý problém je v pořadí druhým problémem spadajícím do algebry a D. Hilbert jej formuloval zhruba takto: Mějme m celých racionálních funkcí n proměnných

$$X_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{1}$$

Je-li $g(z_1, \ldots, z_m)$ racionální funkce a dosadíme-li do ní za proměnné z_i funkce X_i z (1), dostaneme opět racionální funkci v proměnných $x_1, \ldots, x_n$; je-li $g(X_1, \ldots, X_m)$ dokonce už celá racionální funkce v $x_1, \ldots, x_n$, nazveme funkci $g(z_1, \ldots, z_m)$ relativně celou. Zřejmě součet, rozdíl i součin relativně celých funkcí je opět relativně celá funkce. Problémem je nyní zjistit, zda ke každému systému racionálních funkcí (1) lze najít konečně mnoho relativně celých funkcí $g_1(z_1, \ldots, z_m), \ldots, g_l(z_1, \ldots, z_m)$ tak, že pro každou relativně celou funkci $g(z_1, \ldots, z_m)$ platí

$$g(X_1, \ldots, X_m) = P(g_1(X_1, \ldots, X_m), \ldots, g_l(X_1, \ldots, X_m))\,,$$

kde P je celá racionální funkce proměnných.

Problém lze formulovat v přehlednějším tvaru. Předpokládejme přitom hned, že koeficienty uvažovaných racionálních funkcí leží v nějakém (libovolně zvoleném) komutativním tělese k. Uvažujme těleso $k(x_1, \ldots, x_n)$ racionálních funkcí n neurčitých $x_1, \ldots, x_n$ nad k a k daným polynomům $f_1, \ldots, f_m$ z $k[x_1, \ldots, x_n]$ utvořme těleso $T = k(f_1, \ldots, f_m) \subset k(x_1, \ldots, x_n)$. Jeho prvky jsou tedy racionální funkce nad k v $f_1, \ldots, f_m$. Racionální funkce $g(z_1, \ldots, z_m)$ je zřejmě relativně celá, právě když $g(f_1, \ldots f_m) \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Problém spočívá tedy ve zjištění, zda obor integrity $J = T \cap k[x_1, \ldots, x_n]$ je konečného typu nad k, tj. zda existuje konečný systém prvků $g_1, \ldots, g_l$ z J takový, že $J = k[g_1, \ldots, g_l]$. Všimněme si ještě, že se na problému nic nezmění, vezmeme-li za těleso $T = k(f_1, \ldots, f_m)$ libovolné mezitěleso F, kde $k \subset F \subset k(x_1, \ldots, x_n)$: nechť $F \cap k[x_1, \ldots, x_n] = k[M]$, kde $M \subset k[x_1, \ldots x_n]$; pak zřejmě i $k(M) \cap k[x_1, \ldots, x_n] = k[M]$, takže místo tělesa F lze uvažovat těleso $k(M)$, a to lze vytvořit adjunkcí konečně mnoha prvků $f_1, \ldots, f_m$ z $k[x_1, \ldots, x_n]$. Problém tedy konečně má tento tvar: zjistit, zda pro libovolné těleso F, kde $k \subset F \subset k(x_1, \ldots, x_n)$ je obor integrity $F \cap k[x_1, \ldots, x_n]$ konečného typu nad k.

Poslední formulace nám dovoluje jednoduše ukázat motivy, které vedly D. Hilberta k vyslovení čtrnáctého problému. Ty spočívají v teorii algebraických invariantů. Nechť G je nějaká grupa automorfismů okruhu $k[x_1, \ldots, x_n]$ nad k. Označme F podtěleso tělesa $k(x_1, \ldots, x_n)$ vytvořené všemi těmi prvky $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, které jsou invariantní vůči G, tj. pro něž platí $g(f) = f$ pro každé $g \in G$; je $k \subset F \subset k(x_1, \ldots, x_n)$. Označíme-li nyní $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ okruh těch prvků z $k[x_1, \ldots, x_n]$, které jsou vůči G invariantní, pak zřejmě

$$k[x_1, \ldots, x_n]^G = F \cap k[x_1, \ldots, x_n] .$$

Jednou z hlavních úloh teorie invariantů je pak zjistit, zda okruh $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ je konečného typu nad k. V době, kdy D. Hilbert formuloval svůj čtrnáctý problém, byla už známa kladná odpověď na tuto úlohu pro řadu klasických grup, např. pro podgrupy projektivní grupy; Hilbert sám dokázal konečný typ okruhu $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ nad k pro projektivní grupu G. Byla tedy oprávněná domněnka, že okruh $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ je snad vždy konečného typu nad k; čtrnáctý Hilbertův problém je jejím jednoduchým zobecněním.

Tomuto ryze algebraickému problému dal v roce 1954 zajímavou geometrickou interpretaci O. Zariski ([1]); ta nakonec umožnila problém vyřešit. Abychom však mohli věc poněkud blíže vysvětlit, budeme potřebovat některé pojmy z algebraické geometrie, především pojem divizoru. Je-li $f(x)$ racionální funkce proměnné x nad tělesem komplexních čísel C (tj. na afinní přímce nad C), pak $f(x)$ je až na nenulový násobek jednoznačně určena množinou svých nulových bodů a pólů opatřených příslušnými násobnostmi a obráceně každé konečné množině $\{x_1, \ldots, x_s\}$ bodů z C opatřených celistvými násobnostmi $k_1, \ldots, k_s$ odpovídá racionální funkce mající v x_i nulový bod s násobností k_i pro $k_i > 0$ nebo pól s násobností k_i pro $k_i < 0$. Souhrn těchto bodů x_i s násobnostmi k_i můžeme popsat formálním součtem $\sum_{i=1}^{s} k_i\{x_i\}$ a chápat jej jako prvek volné Abelovy grupy generované množinou všech bodů z C. Je-li nyní V libovolná algebraická ireducibilní varieta dimenze n nad tělesem k, pak analogicky s předešlým rozumíme divizorem D na V konečnou množinu $\{V_1, \ldots, V_s\}$ ireducibilních podvariet V_i dimenze $n - 1$ na V opatřených násobnostmi $k_1, \ldots, k_s$; píšeme opět $D = \sum_{i=1}^{s} k_i V_i$. Divizory jsou tedy prvky volné Abelovy grupy generované množinou všech ireducibilních $(n - 1)$-rozměrných podvariet variety V. Můžeme je tedy sčítat a násobit celými čísly; platí-li pro divizor $D = \sum_{i=1}^{s} k_i V_i$ $k_i \geqq 0$ pro všecka i, píšeme $D \geqq 0$. Nosičem divizoru $D = \sum l_j V_j$ se rozumí sjednocení všech těch V_j, pro něž $l_j \neq 0$. Je-li f racionální funkce na V (a množina singulárních bodů má dimenzi $\leqq n - 2$), pak opět lze funkci f přiřadit určitý divizor $(f) = \sum k_i V_i$ tak, že f má na V „nulu", resp. „pól" řádu k_i, je-li $k_i > 0$, resp. $k_i < 0$. Je-li např. V n-rozměrný projektivní prostor nad k, pak racionální funkce f na V má tvar f_1/f_2, kde f_1, f_2 jsou formy stejného stupně; je-li $f_1 = \prod g_i^{k_i}$, $f_2 = \prod h_j^{k_j}$ jejich rozklad na ireducibilní formy, pak $(f) = \sum k_i V(g_i) - \sum k_j V(h_j)$, kde $V(g_i)$, resp. $V(h_j)$ je nadplocha určená rovnicí $g_i = 0$, resp. $h_j = 0$. Je-li V normální varieta (speciálně nemá-li V singulární body), pak platí $(f) \geqq 0$, právě když je f definována v každém bodě variety V.

Vraťme se opět ke zmíněné Zariského geometrické interpretaci čtrnáctého Hilbertova problému. Zariski vzal předně místo okruhu polynomů $k[x_1, \ldots, x_n]$ obecněji libovolný obor integrity J celistvě uzavřený a konečného typu nad k. Nechť T je podílové těleso okruhu J, F libovolné mezitěleso mezi k a T, a $O = F \cap J$. Zariski ukázal, že k tělesu T a okruhu O existuje normální varieta V s tělesem racionálních funkcí T a kladný divizor D na V takový, že O je množina všech těch racionálních funkcí f na V, pro něž $(f) + iD \geqq 0$ pro dostatečně velká i, tj. O je množina těch racionálních funkcí na V, které nemají vně nosiče divizoru D póly. Metodami algebraické geometrie se pak Zariskému podařilo dokázat, že i v tomto obecnějším tvaru má Hilbertův problém kladné řešení (tj. okruh O je konečného typu nad k), je-li dimenze variety $V \leqq 2$ a k má charakteristiku 0. V případě, že V je křivka, odvodil tento výsledek užitím Riemannovy-Rochovy věty. Použití prostředků algebraické geometrie vneslo pak brzy do 14. problému jasno. M. NAGATA nejprve dále zobecnil Zariského výsledek, avšak už v roce 1958 se mu podařilo dokázat překvapující fakt, že totiž domněnka vyslovená ve 14. Hilbertově problému neplatí ([2]). M. Nagata tu dokonce ukázal, že pro každé těleso k, které má nad svým prvotělesem stupeň transcendence r^2, kde $r \geqq 4$, existuje grupa G automorfismů okruhu polynomů $k[x_1, \ldots, x_n]$ $(n = 2r^2)$ tak, že okruh $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ není konečného typu nad k. (Podrobněji se o tomto Nagatově protipříkladu může čtenář dovědět v MANINOVĚ referátu o 14. Hilbertově problému v [3], 171—174.) Tím byl tedy čtrnáctý Hilbertův problém vyřešen: odpověď na něj je záporná, a to i v jeho speciálním případě, který se vztahuje k teorii invariantů.

Literatura

[1] O. ZARISKI, *Interprétations algébro-géometriques du quatorzième problème de Hilbert.* Bull. Sci. Math. *78* (1954), 155—168.

[2] M. NAGATA, *On the fourteenth problem of Hilbert.* Proc. Internat. Congress Math. 1958, 459—462. Cambridge Univ. Press, New York, 1960.

[3] *Problemy Gil'berta,* Moskva, izd. Nauka, 1969.

(Kvadratura kruhu.) Kteří mezi nimi nejučenější byli, sstupovali se do prostřed a pokoušeli se očsi velmi úsilně, načež viděl jsem, že jiní všickni s otevřenými ústy očekávají; a bylo o tom řečí mnoho, jak by to nade všeho světa subtilnosti divnější bylo, a kdyby se vynalezlo, že by již nic nebylo nemožného. Já tedy, co to jest, věděti žádostiv jsa, přistoupil jsem a spatřil, že kolo mezi sebou mají, o něž otázka jest, jak by z něho quadrát udělán býti mohl. A když se toho s nevypravitedlnou prací vyhledávalo, rozstoupili se zase, aby každý o tom přemyšloval, sobě poručíc. Tožť po malé chvíli nenadále jeden vyskočí, volaje: „Mám, mám tajemství odkryté mám!“ I shlukli se k němu všickni, viděti a divit se chvátajíce. A on vynesa velikou knihu in folio, ukazoval jim. I stali se hlasové a prokřikování, jakéž po vítězství bývá. Ale tomu plésání jiný hned brzo přítrž učinil, co hlasu měl křiče, aby se mámiti nedali, že quadrát není; a postaviv ještě větší knihu, všecky onoho domnělé quadráty zase v kola obrátil, mocně to provodě, že oč se onen pokusil, toho dovésti člověku možné není. I sklopili všickni hlavy a navrátili se k čarám a klikám svým.