

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Grygar

Chaos ve sluneční soustavě

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 36 (1991), No. 3, 141--148

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139170>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1991

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Chaos ve sluneční soustavě

Jiří Grygar, Řež

„Bůh nehraje v kostky.“

A. Einstein M. Bornovi v r. 1948

*„Nejenže Bůh hraje v kostky, ale
vrhá je občas na místech, kde je
nelze vidět.“*

S. W. Hawking v r. 1977

1. Řád ve sluneční soustavě

Formulace Newtonova gravitačního zákona umožnila matematicky vyjádřit přesné analytické řešení problému dvou těles obíhajících ve vakuu kolem společného těžiště. Přitom ovšem musíme předpokládat, že rozměry těles lze vůči vzájemné vzdálenosti zanedbat – jinak se projeví slapové síly a popřípadě vliv nerovnoměrného rozložení hmoty tělesa uvnitř objektu, který navíc nemusí být kulově souměrný. Z toho důvodu není například nijak jednoduché počítat přesné dráhy těsných dvojhvězd, které jsou vzájemným slapovým působením silně deformovány a které se obvykle ovlivňují také zářeními a vysíláním elektricky nabitých částic hvězdného větru.

V porovnání s tím je sluneční soustava příkladem jednoduchosti a pořádku. Vzdálenosti planet od Slunce jsou tak velké, že jak samotné planety tak i plynné Slunce lze dobře nahradit matematickými body, v nichž je hmota těles soustředěna. Meziplanetární prostor je tak řídký, že při pohybu těles nepředstavuje žádnou měřitelnou překážku a rovněž sluneční záření ani korpuskulární částice (sluneční vítr) nemohou planety vyšinout z jejich drah. Není divu, že koncem 18. stol. se proslulému francouzskému matematikovi, fyzikovi a astronomovi P. S. Laplaceovi zdálo, že je jen technickou otázkou přesně spočítat polohy planet pro kterýkoli okamžik v minulosti i budoucnosti vesmíru. V té době se ještě nic nevědělo o vzdálenosti hvězd a existenci hvězdných soustav typu galaxií, avšak bylo zřejmé, že hvězdy jsou natolik vzdáleny, že pro pohyb těles sluneční soustavy není třeba jejich gravitační působení brát v úvahu. Laplace si zkrátka myslel, že když mu někdo zadá počáteční podmínky, pak z formulace gravitačního zákona lze planetární soustavu doslova vypočítat s přesností omezenou jen technickými schopnostmi počítače.

Další vývoj fyziky však Laplaceův názor nijak nepodpořil. Na přelomu 20. století ukázal velký francouzský teoretik H. Poincaré, že už přiobrání třetího tělesa do gravitační hry vylučuje přesné analytické řešení; tím spíše tedy nelze exaktně vyřešit mnohem komplexnější problém devíti těles (Pluto tehdy ještě nebyl objeven) sluneční soustavy. Relativní úspěch nebeské mechaniky, která se dráhovými výpočty prakticky zabývala,

RNDr. Jiří GRYGAR, CSc. (1936) je vedoucím vědeckým pracovníkem ve Fyzikálním ústavu ČSAV, 250 68 Řež.

byl dán tou šťastnou okolností, že hmotnosti planet jsou vůči Slunci prakticky zanedbatelné (nejhmotnější Jupiter činí pouze 0,1 % hmotnosti Slunce a úhrnná hmotnost ostatních planet nedosahuje ani poloviny hmotnosti Jupiteru), takže problém dynamiky sluneční soustavy se dal zjednodušit zavedením výpočtu poruch základní dráhy každé planety. To znamená, že základní dráha se řeší jako problém dvou, těles (Slunce – planeta) analyticky přesně a působení ostatních planet se bere jako přídavná rušivá síla, jež pouze málo ovlivňuje tuto základní dráhu. Poruchový počet dosáhl svého největšího věhlasu, když za jeho pomoci vypočetli v r. 1845 Angličan J. C. Adams a Francouz U. J. Leverrier polohu nové planety, jež byla v r. 1846 vskutku objevena J. G. Gallem v Berlíně a nakonec pojmenována Neptun.

Zavedení mechanických a později elektromechanických kalkulátorů značně rozšířilo možnosti poruchového počtu, a tak se ukázalo, že zejména ve sluneční soustavě lze Poincarův „zákaz“ obejít numerickými výpočty, jejichž přesnost lze libovolně „nastavit“. To prakticky znamenalo nový návrat k Laplaceovu ideálu – návrat významně usnadněný, když se v polovině našeho století objevily první použitelné elektronické počítače s vyššími operačními rychlostmi a rozsáhlejšími paměťmi. Postupem doby se tak dařilo s vysokou přesností počítat polohy planet do minulosti i do budoucnosti. Takové výpočty ovšem mají řadu zajímavých aplikací (a to zcela pomijím astrologii!). Lze tak zejména spolehlivě ověřovat datování historických pramenů pomocí úkazů, jako je zatmění Slunce či Měsíce nebo konjunkce (těsná zdánlivá přiblížení) planet.

V téže době se také poprvé podařilo spolehlivě odhadnout stáří sluneční soustavy na 4,5 miliardy let. Fakt, že tu planety stále jsou, byl další nepřímý důkaz neobyčejné stability a řádu ve sluneční soustavě, a tak jen málokdo tušil, že to budou právě stále se zdokonalující počítače, jež nás od Laplaceova ideálu znovu – a to definitivně – odvedou.

2. První náznaky nepořádku

Nepřímým důkazem, že se planetární soustava vůbec nepodobá Laplaceovu ideálu, se staly postupně stále přesnější údaje o drahách a rotačních osách planet. Vždyť dráhy planet se zřetelně liší výstředností a sklonem k základní rovině ekliptiky (to je rovina oběžné dráhy Země kolem Slunce). Zatímco dráhy planet Venuše a Neptunu se jen nepatrně liší od kružnice (jejich výstřednost e je menší než 0,009), má dráha Merkuru výstřednost $e = 0,21$ a dráha Pluta dokonce $e = 0,25$. Poslední zmíněné planety mají také největší sklony drah k ekliptice (7° , resp. 17°). S výjimkou Merkuru, Venuše a Jupiteru jsou rotační osy všech planet poměrně výrazně skloněny k oběžné rovině. Většinou jde o sklony v rozmezí 23° až 29° , ale u Uranu a Pluta dosahují 82° , resp. 98° , což značí že tato tělesa se v oběžné rovině „kutálí naležato“. Rotační periody většiny planet se pohybují v rozmezí od 10 hodin pro obří planety Jupiter a Saturn do necelých 25 hodin pro Mars. Výjimku tvoří planety na začátku a na konci posloupnosti. Pluto se otočí kolem osy teprve za 6,4 dne, Merkur za 59 dnů, kdežto Venuše až za 243 dnů – ta se navíc točí proti směru oběhu planet kolem Slunce.

Zarážející jsou také rozdíly ve výskytu průvodců – přirozených družic planet. Merkur a Venuše nemají žádné družice, Mars má dvojici miniaturních družic nepravidelného

tvaru s „poloměrem“ kolem 10 km. Země a Pluto mají po jediné družici, ale relativně rozměrné a hmotné. Hmotnost Měsíce činí 1/80 hmotnosti Země, kdežto hmotnost Charonu dokonce 1/10 hmotnosti Pluta. Planety uprostřed posloupnosti od Jupiteru po Neptun se vyznačují početnějšími rodinami družic rozličných hmotností a rozměrů. Největší z těchto družic dosahují velikostí (nikoli však hmotností) rozměrů Merkuru. Planety bohatě obdařené přirozenými družicemi se navíc honosí soustavami prstenců – tenkých soustředných vrstev kosmického smetí – úlomků o rozměrech od zlomků milimetru do několika desítek metrů.

Jistě bychom si přáli, aby jakákoli nadějná domněnka o původu tak prazvláštní soustavy byla s to vysvětlit zmíněné anomálie. Zkušenost však ukazuje, že to vůbec není jednoduché – majestátní harmonie sfér, kterou ve sluneční soustavě hledal Jan Kepler, je narušena skřípajícími fakty neladu a neskladu opravdu na každém kroku napříč planetárním systémem.

Dalším klasickým důkazem nepořádku ve sluneční soustavě se stalo studium rozložení drah drobnějších těles v prostoru mezi Marsem a Jupiterem. Tato tělesa o rozměrech nanejvýše stovky kilometrů nazýváme planetky; první byla objevena v r. 1801 a dnes je jich katalogizováno na 4500. Dráhy planetek se zřetelně „vyhýbají“ určitým vzdálenostem od Slunce. V soustavě oběžných drah planetek se tak vyskytují nápadné mezery, nazvané na počest objevitele *mezerami Kirkwoodovými*.*) Dynamický rozbor ukázal, že za tyto mezery je odpovědný Jupiter, jenž doslova „vymetá“ z dráhy takové planetky, jejichž oběžné doby jsou souměřitelné s oběžnou dobou Jupiteru v poměru malých celých čísel. V tom případě totiž dochází k rezonancím, které jsou základem pro vznik mezer. Největší taková mezera odpovídá souměřitelnosti oběžných dob 3 : 1; to znamená, že prakticky neexistují planetky ve vzdálenosti 2,5násobku vzdálenosti Země–Slunce (AU).

Podobná rezonance naopak zabraňuje, aby se někdy srazily Neptun s Plutem, přestože jejich dráhy se protínají (právě v současnosti, od r. 1979 do r. 1999, je Pluto ke Slunci blíže než Neptun). Mechanismus pohybu těles ve sluneční soustavě je zkrátka tak „zašmodrchaný“, že vytvořit jeho názorný trvale fungující model přesahuje nejen možnosti přesného strojírenství, ale i schopnosti výpočetní techniky.

3. Současné doklady o nepořádku

Nezávisle na problémech astronomie sluneční soustavy se s obdobnými projevy pořádného nepořádku (nebo nepořádného pořádku?) setkávali také pracovníci jiných oborů

*) DANIEL KIRKWOOD (1814–1889), profesor na univerzitě v Bloomingtonu (Indiana), popsal mezeru ve vzdálenostech planetek roku 1867 a problém opakovaně diskutoval v řadě pojednání, zejména pak roku 1875 v *Mont. Not. Royal Soc. sv. 35* a v *Astron. Nachrichten*. Avšak v roce 1858 publikoval KAREL HORNSTEIN (1824–1882), brněnský rodák, pozdější profesor astronomie v Praze a ředitel hvězdárny v Klementinu, rozsáhlou přednášku o systému planetek (*Neueste Fortschr. d. Astronomie*, Wien 1858), kde možnost existence mezer ve vzdálenostech těchto těles je naznačena. Nezávislý objev Kirkwoodových mezer Hornsteinovi připisuje například jeho žák G. GRUSS. (Pozn. redakce).

přírodních věd. Snad nejzřetelněji se to projevilo v meteorologii při snahách o zdokonalování předpovědi počasí. Na rozdíl od dynamiky planetární soustavy je zde nesmírné množství vstupních parametrů (údaje o okamžitém stavu počasí po celé zeměkouli) a podstatně komplikovanější fyzika. Poměrně malá úspěšnost předpovědí počasí se před takovými třiceti lety zdůvodňovala nedostatečnou znalostí počátečních podmínek. Údaje o stavu počasí byly získávány téměř výhradně z pozemních a námořních stanic, naprosto nerovnoměrně rozprostřených po celé Zemi. Proto se vkládala velká naděje do družicových měření, jež pokrývají rovnoměrně celou Zemi, umožňují i vertikální sondáž atmosféry a dají se neustále aktualizovat. Souběžně s rozvojem družicové meteorologie se podstatně zvýšil výkon moderních superpočítačů, takže zdánlivě nic nestálo v cestě tomu, aby se předpovědi počasí nápadně zlepšily.

Je pravda, že ke zlepšení vskutku došlo, ale zdaleka ne v míře očekávané odborníky. O vysvětlení neúspěchu se již v r. 1963 zasloužil E. Lorenz, který právě na tomto problému demonstroval zásady koncepce chaosu. Ve svých počítačových simulacích vývoje počasí totiž opakoval výpočet předpovědi počasí za nepatrně změněných počátečních podmínek. Očekával, že dostane výsledné počasí jen málo odlišné od předpovědi původní. Výsledky simulací však nic takového nepotvrdily. Ukázalo se, že zcela nepatrné změny počátečních podmínek vedou k drasticky odlišnému počasí. Podle slov jednoho meteorologa „mávnutí křídel motýla v Hong-Kongu zřetelně ovlivní, jaké bude o měsíc později počasí v Londýně“. Matematik hovoří o silně nelineárních systémech a fyzik (popřípadě astronom) je blízek zoufalství. V takto chaotickém světě se přece nedá předpovědět vůbec nic, a k čemu je pak veškerá fyzika?

Lorenz a celá řada dalších odborníků postupně ukázala, že tento fyzikální chaos v sobě skrývá hlubší řád, jehož odhalení povede k dalšímu rozvoji přírodních věd. Také astronomové vděčně sáhli po východisku, které umožnilo nově posoudit již naznačené a také některé předtím netušené problémy astronomie sluneční soustavy.

První aplikací teorie chaosu v astronomii se stala studie amerického astronoma J. Wisdoma [1] z r. 1983, jenž se zabýval zmíněnou hlavní Kirkwoodovou mezerou v drahách planetek z hlediska přenosu materiálu z mezery do blízkosti Země.*) Planetka která se vlivem poruch ocitne v mezeře, se totiž nejpozději za 200 000 let stane obětí chaosu, a je z mezery vymetena na zcela odchylnou dráhu, která jí s pravděpodobností 1 : 5 přivede do takové blízkosti Země, že se dříve či později se Zemí srazí. Tak lze vysvětlit, proč na Zemi čas od času dopadají meteority, ačkoli se Země nachází velmi daleko od hlavního pásma planetek. Jinými slovy, nebýt chaosu v drahách planetek, neměli bychom na Zemi tolik dokladů o existenci drobného smetí v meziplanetárním prostoru v podobě meteoritů.

O rok později objevil týž J. Wisdom další doklad chaosu ve sluneční soustavě, tentokrát při zkoumání snímků Saturnovy přirozené družice Hyperion, pořízených kosmickou sondou Voyager 2 v r. 1981. Hyperion je obří balvan velmi nepravidelného tvaru

*) V posledních letech se u nás tímto problémem zabýval dr. MILOŠ ŠIDLICHOVSKÝ, DrSc., z Astronomického ústavu ČSAV, který publikoval řadu významných studií o „mapování“ drah s kometurabilitou (souladitelností period) 5 : 2. Význam Šidlichovského prací tkví v tom, že kvazianalytické řešení umožňuje zrychlit numerický výpočet až o tři řády. (Pozn. redakce)

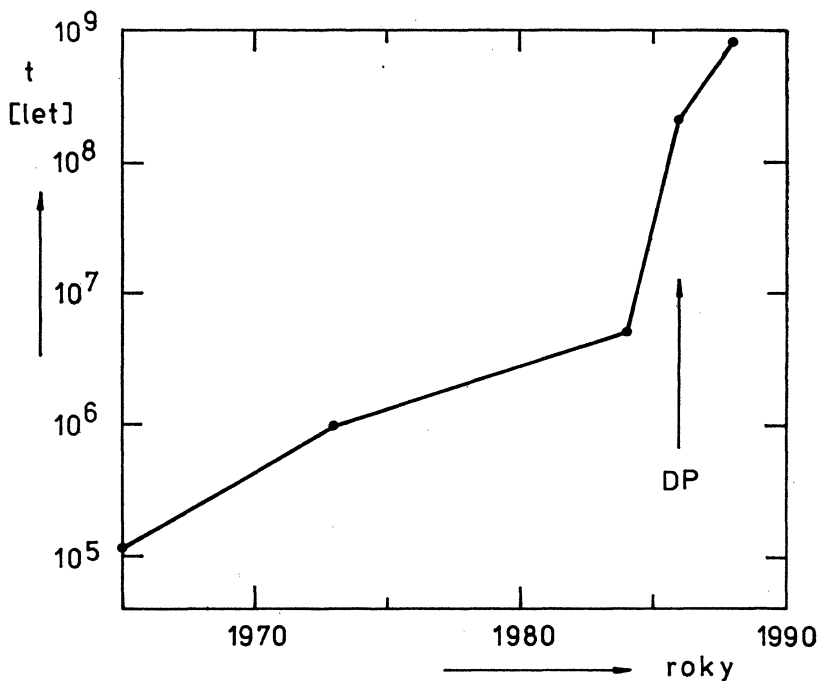
o rozměrech přibližně $350 \times 240 \times 200$ km. Wisdomovi se na posloupnosti snímků nepodařilo určit polohu rotační osy Hyperionu ani délku jeho rotační periody [2]. Proto vyslovil domněnku, že Hyperion nic takového nemá; na své oběžné dráze kolem Saturnu se prostě chaoticky převaluje, přičemž oběžná doba Hyperionu činí 21,3 dne. Wisdomův výsledek byl neuvěřitelný – všechny do té doby studované přirozené družice planet měly definovanou rotační osu a stejně jednoznačně určenou dobu rotace. Velmi často jde o rotaci vázanou jako například u našeho Měsíce, který se kolem své osy otočí za stejnou dobu, za kterou oběhne jednou kolem Země. Wisdom ukázal, že existuje rezonance oběžných dob Hyperionu a největšího Saturnova průvodce Titanu, která podporuje chaotickou rotaci (převalování) Hyperionu. Druhou příčinou chaosu je silně nepravidelný tvar Hyperionu, za nějž rovněž může Titan. Podle všeho byl totiž kdysi v minulosti sluneční soustavy Hyperion rozbit srážkou s jinou Saturnovou družicí nebo zachycenou planetkou. Dynamika srážek naznačuje, že relativně rychle, tj. během miliónu let, se taková rozpadlá družice na původní dráze opět poskládá do původního tvaru. V tomto zvláštním případě však gravitace Titanu vyvolala chaotické změny drah úlomků původního Hyperionu a ty se z dosahu Saturnovy gravitace vzdálily. Přirozeně tak chyběly při zpětném poskládání Hyperionu v jednoduše těleso. Wisdomovu domněnku potvrdil v r. 1989 jeho student J. Klavetter [3], jenž po dlouhou dobu měřil soustavně změny jasnosti Hyperionu, a nenašel v nich žádnou periodicitu (vyvolanou rotací) v intervalu od 1 hodiny do 7 týdnů.

4. Není chaosu bez trpělivosti

Mezitím se zlepšily technické podmínky pro rozbor hlavního problému dynamiky planetární soustavy, totiž pro řešení otázky, jak dalece jsou stabilní dráhy planet ve sluneční soustavě ([4], [5]). Víme, že přesné analytické řešení neexistuje, čili že se musíme spokojit s numerickými výpočty, jejichž přesnost je omezena zejména kumulací zaokrouhlovacích chyb v běžných počítačích. Tyto chyby narůstají tak rychle, že ještě v r. 1965 nebylo možné spolehlivě počítat dráhy planet na dobu delší než 120 000 let, a to za předpokladu platnosti Newtonova gravitačního zákona. Přesné relativistické výpočty jsou ještě mnohem obtížnější a až dosud nejsou s to překlenout období delší než 4400 let.

Nástup výkonných počítačů 3. a 4. generace dovolil protáhnout tyto dynamické výpočty na podstatně delší období, jak dokládá graf na obr. 1. V grafu je patrný dramatický skok v délce intervalu kolem r. 1985. To bezprostředně souvisí s konstrukcí speciálního superpočítače pracovníky MIT v USA, jenž přes nevelké rozměry dosahuje 1/3 operační rychlosti známých superpočítačů firmy Cray [6]. Dostal název *digitální planetostroj* podle mechanických modelů sluneční soustavy, oblíbených před 2–3 stoletími.

Digitální planetostroj řeší problém mnoha těles fantasticky rychle a dostatečně přesně, takže hned po jeho uvedení do chodu bylo možné spočítat dráhy planet na dobu 200 miliónů let [7]. Mnoho lidí se tehdy domnívalo, že je to trochu luxus, že se jen potvrdí to, co bylo známo z výpočtů na pomalejších počítačích. Zdálo se, že když je planetární soustava stabilní po dobu až 5 miliónů let, je tím zaručena její stabilita i po celou dobu



Obr. 1. Vývoj numerických výpočtů pohybu planet ve sluneční soustavě v závislosti na letopočtu. Na svislé ose je udán nejdelší interval t , překlenutý výpočetní technikou daného období. Šipka DP udává zahájení provozu digitálního planetostroje.

její existence. Nicméně už tyto výpočty ukázaly na přítomnost rezonance 3 : 2 oběžných dob Pluta a Neptunu, což — jak se nakonec ukázalo — bylo předzvěstí dynamického chaosu v drahách planet vůbec. Digitální planetostroj to vskutku nejprve potvrdil právě pro Pluto. Ukázalo se, že sklon dráhy Pluta k ekliptice kolísá mezi $14,6^\circ$ a $16,9^\circ$ s periodou 34 miliónů let [8].

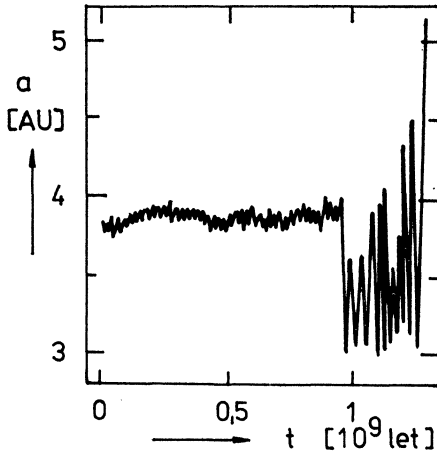
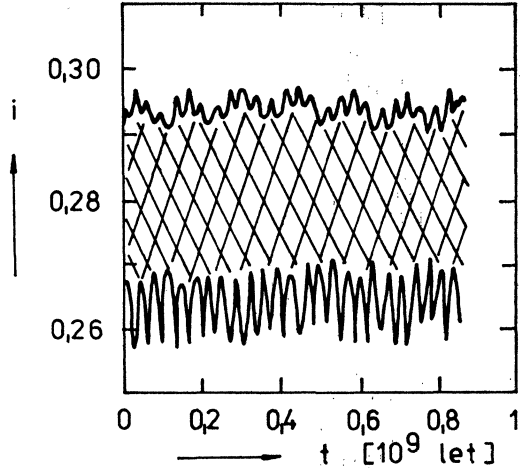
To povzbudilo autory výpočtu k prodloužení intervalu na dosud rekordních 845 miliónů let (viz obr. 2). Je těžké učinit si představu o rozsáhlosti projektu, kde integrační krok činil pouze 32,7 dne, takže k překlenutí intervalu bylo potřeba 10^{10} kroků. Digitální planetostroj to zvládl za 5 měsíců nepřetržitého provozu! K ověření přesnosti výpočtu se totiž počítají polohy planet „dopředu“ a pak zase „zpět“ za celé období. Souhlas původních a konečných poloh je důkazem dostatečné přesnosti výpočtu [9]. Tak například chyba v určení ekliptikální délky Jupiteru za celých 845 miliónů let činí jen 5° .

V poslední době zejména J. Laskar ([10], [11]) rozšířil výpočty stability na všechny planety sluneční soustavy a zjistil, že chaotické změny dráhových parametrů se vyskytují u Pluta na stupnici 20 miliónů let a u vnitřních planet (od Merkuru po Mars) již na stupnici 5 miliónů let. Tento chaos však musíme chápat tak, že vnitřní planety nemění podstatně tvar a poloosy drah (tj. excentricitu a oběžnou dobu), nýbrž spíše se mění vzájemná orientace drah v prostoru (např. délka perihelu, resp. uzlové přímky ve dráze, nebo sklon dráhy) — čili už po této době nelze jednoznačně říci, zda v daném okamžiku

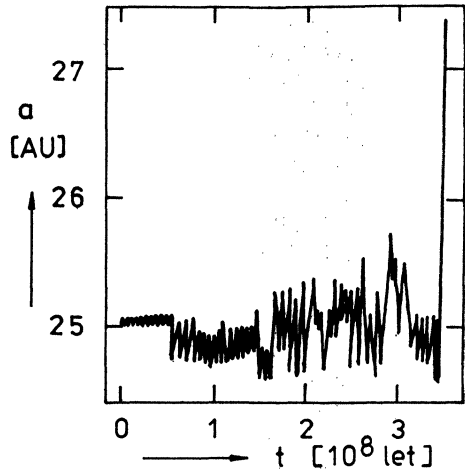
se bude například Venuše pro pozemského pozorovatele jevit na východ nebo na západ od Slunce.

Chaos v minulosti sluneční soustavy hrál tedy mnohem významnější roli, než jsme si mysleli ještě před pouhými pěti lety ([12], [13], [14], [15]). Umožňuje planetkám, aby prchaly z původních drah mezi Marsem a Jupiterem jak směrem ke Slunci, tak zejména

Obr. 2. Změny sklonu i (v radiánech) dráhy Pluta k ekliptice v závislosti na čase t ukazují na přítomnost periodických oscilací s periodami 34, 150 a 600 milionů let. Graf je dokladem chaotických vlastností oběžné dráhy Pluta (podle [8]).



Obr. 3. Změny délky velké poloosy a v jednotkách vzdálenosti Země—Slunce (1 AU) v závislosti na čase t pro planetku, která na počátku období obíhá kolem Slunce po kruhové dráze s poloměrem 3,8 AU. Chaotický charakter dráhy se projeví až po 1 miliardě let a vede nakonec k vymetení planetky ze sluneční soustavy (poloměr dráhy Jupiteru je 5,2 AU) — podle [15].



Obr. 4. Pouhých 50 milionů let stačí, aby se projevil chaotický charakter dráhy hypotetického malého tělesa, které se původně nachází v prostoru mezi Uranem a Neptunem na kruhové dráze o poloměru 25 AU. Na vodorovné ose je uveden čas t , uplynulý od počátku sledovaného období a na svislé ose délka velké poloosy a dráhy tělesa v astronomických jednotkách (AU) (podle [15]).

směrem ven, a tím natrvalo opustily sluneční soustavu (viz obr. 3 a 4). Dovoluje družicím planet, aby se náhodně převalovaly na oběžných drahách dříve, než se usadí na synchronní dráze s vázanou rotací. Zdá se, že právě tak se v minulosti chovaly Marsovy družice Phobos a Deimos.

Jestliže na časové stupnici tisíců až statisíců let šlape sluneční soustava téměř jako hodinky, na časové stupnici řádu 10^7 let dochází ke zlomu – jednoduchý řád je vystřídán chaosem, jehož zákonitosti lze odhalit teprve nejvýkonnějšími superpočítači nové generace. Albertovi Einsteinovi se zásadně nelíbila neurčitost kvantové mechaniky a stěží by ho uspokojilo Hawkingovo zjištění, že kvantové neurčitosti se mohou odehrávat také kdesi po horizonty černých děr, nepřístupny jakémukoli pozorování. Co by asi Einstein říkal dnes, kdy nás superpočítače přesvědčily, že ani klasická fyzika nedává kloudné předpovědi, pokud má někdo vskutku božskou trpělivost čekat na výsledek 10 miliard let?

Literatura

- [1] WISDOM, J.: *Icarus* 56 (1983), 51.
- [2] MURRAY, C. D.: *Nature* 311 (1984), 705.
- [3] KLAFFETTER, J. J.: *Astron. J.* 97 (1989), 570.
- [4] MILANI, A., NOBILI, A.: *Mem. Soc. Astron. Ital.* 55 (1984), 485.
- [5] WISDOM, J.: *Bull. Amer. Astron. Soc.* 19 (1987), No. 4, 1106.
- [6] APPLGATE, J. H., et al.: *IEEE Trans. Comput. C-34* (1985), 822.
- [7] APPLGATE, J. H., et al.: *Astron. J.* 92 (1986), 176.
- [8] SUSSMAN, G. J., WISDOM, J.: *Science* 241 (1988), 433.
- [9] MILANI, A., NOBILI, A. M., CARPINO, M.: *Icarus* 82 (1989), 200.
- [10] LASKAR, J.: *Astron. Astrophys.* 198 (1988), 341.
- [11] LASKAR, J.: *Nature* 338 (1989), 237.
- [12] KERR, R. A.: *Science* 244 (1989), 144.
- [13] KILIAN, A. M.: *Sky and Telescope*, August (1989), 136.
- [14] NOBILI, A. M., BURNS, J. A., *Science* 244 (1989), 1425.
- [15] HARTLEY, K.: *Astronomy*, May (1990), 34.

Nič nie je pôsobivejšie ako fakt, že tou mierou, ako matematika postupne prechádzala do vyšších oblastí čoraz abstraktnejšieho myslenia, vracala sa späť na zem, nadobúdajúc čoraz väčší význam pre analýzu konkrétneho faktu ... Dnes sa úplne potvrdil paradox, že najväčšie abstrakcie sú tými pravými nástrojmi, ktorými kontroluje svoje uvažovanie o konkrétnych faktoch.

Je pozoruhodným znakom dejín myslenia, že odvetvia matematiky, ktoré sa vyvinuli pod vplyvom imaginálnych impulzov a boli takto kontrolované, nadobudli napokon významnú aplikovateľnosť.

Čistá matematika, ako sa vyvíjala v moderných časoch, môže o sebe tvrdiť, že je najoriginálnejší výtvar ľudského ducha. Iným uchádzačom o toto miesto je hudba ... Originalita matematiky spočíva v tom, že v matematickej vede sú vyjadrené vzťahy medzi vecami, ktoré sa bez sprostredkovania ľudským rozumom nedajú vôbec postihnúť.

Nijaká skutočná vedecká činnosť nemôže existovať bez všeobecne rozšíreného inštinktívneho presvedčenia o existencii poriadku vecí a osobitne poriadku prírody.

A. N. WHITEHEAD