

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Petr Lála

Poruchy dráhy družice působené tlakem slunečního záření

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 15 (1970), No. 3-4, 152--166

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139144>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1970

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

- [15A] BAY Z.: Hung. Phys. Acta 1 (1946), 1.  
 [15B] DEWITT J. H., STODOLA E. K.: Proc. Inst. Radio Engrs. 37 (1949), 229.  
 [16] HAGFORS T. et al.: Science 150 (1965), 1153.  
 [17] PETTENGILL G. H., THOMPSON T. W.: Icarus 8 (1968), 457.  
 [18] RŽIGA O. N.: Kosmičeskije Issled. 7 (1969), 84.  
 [19] ASH M. E., SHAPIRO I., SMITH W. B.: Astron. J. 72 (1967), 338.  
 [20] PETTENGILL G. H., DYCE R. B.: Nature 206 (1965), 1240.  
 [21] PRICE P. E.: Science 129 (1959), 751.  
 [22] GOLDBREICH P.: Nature 209 (1966), 1117.  
 [23] ZOHAR S., GOLDSTEIN R. M.: Nature (27. 7. 1968), Sky and Telescope 36 (1968), 139.  
 [24A] KOTELNIKOV V. A. et al.: Doklady AN SSSR 151 (1963), 811.  
 [24B] GOLDSTEIN R. M.: Science 150 (1965), 1715.  
 [25] SAGAN C., POLLACK J. B., GOLDSTEIN R. M.: Astron. J. 72 (1967), 20.  
 [26] ZACHS A., FUNG A. K.: Space Science Rev. 10 (1969), 442.  
 [27] PETTENGILL G. H. et al.: Astron. J. 7 (1969), č. 4.  
 [28] KOTELNIKOV V. A. et al.: Doklady AN SSSR 155 (1964), 1037.  
 [29] GOLDSTEIN R. M.: Science 144 (1964), 842.  
 [30] RABE E.: Astron. J. 55 (1950), 112; opravy Astron. J. 72 (1967), 852.  
 [31] GOLDSTEIN R. M.: Science 168 (1970), 467.

## PORUCHY DRÁHY DRUŽICE PŮSOBENÉ TLAKEM SLUNEČNÍHO ZÁŘENÍ

PETR LÁLA, Ondřejov

Pohyb umělých družic Země je jedním z nejsložitějších problémů nebeské mechaniky, která zkoumá dráhy kosmických těles. Je to proto, že družice se pohybují blízko Země a sebemenší poruchy jejich dráhy se projeví při pozorování. Na pohyb družice působí nerovnoměrné rozložení hmoty uvnitř Země, odpor vzduchu, přitažlivost Slunce a Měsíce, tlak slunečního záření a další rušivé síly. Jestliže máme k dispozici teorii vlivu jednotlivých sil na pohyb družic, je možno z pozorování získat velmi důležité geofyzikální a geodetické údaje — především o přesném tvaru Země a o změnách hustoty vysoké atmosféry. Přesnost současných pozorování je tak velká, že je nutno velmi pečlivě vylučovat i malé efekty, které se původně považovaly za zanedbatelné. Tak je tomu i s tlakem slunečního záření, který se uvažoval pouze pro lehké balonové družice typu Echo.

### 1. VELIKOST TLAKU ZÁŘENÍ

Z kvantové teorie záření je známo, že každé kvantum monochromatického záření s frekvencí  $\nu$  nese kinetickou energii  $h\nu$ , kde  $h$  je Planckova konstanta  $6,6256 \cdot 10^{-27}$  erg.sec. Prochází-li  $1 \text{ cm}^2$  celkem  $N$  fotonů, pak nesou celkovou energii

$Nh\nu$ . Energií, kterou vysílá Slunce v časové jednotce do  $1 \text{ cm}^2$ , umístěného kolmo na směr paprsků ve vzdálenosti 1 astr. jednotky, nazýváme *sluneční konstanta*. Obvykle používaná hodnota je:

$$(1) \quad I = \int_0^{\infty} Nh\nu \, d\nu = 1,388 \cdot 10^6 \text{ erg.cm}^{-2}.\text{sec}^{-1} .$$

Každý foton přitom nese impuls  $h\nu/c$ , kde  $c$  je rychlost světla. Při kolmém dopadu rovnoběžného svazku fotonů na jednotkovou plochu se jí tento impuls předá a pro tlak záření můžeme psát

$$(2) \quad q_0 = I/c \doteq 4,65 \cdot 10^{-5} \text{ dyn/cm}^2 .$$

Celková hodnota působícího tlaku ovšem závisí na dalším osudu pohlceného záření. Podrobný rozbor provádí např. ELJASBERG 1965. Je třeba rozlišit nejméně tři případy. Pokud se žádné záření neodráží (v případě absolutně černého tělesa), je velikost tlaku dána přímo vztahem (3) a výsledná síla působí proti směru dopadajícího záření. Jestliže dochází k zrcadlovému odrazu dopadajícího záření, leží výsledná síla ve směru normály na zkoumanou plochu; pokud je rozptyl odraženého záření alespoň zčásti difusní, jsou zastoupeny obě složky (tedy proti směru záření i ve směru normály).

V praxi je nejdůležitější výpočet velikosti tlaku záření pro kulovou družici. Označíme-li průřez družice  $A = \pi R^2$ , (kde  $R$  je poloměr družice) je možno integrací základních vztahů pro velikost rušivého zrychlení tlaku záření obecně napsat vztah

$$(3) \quad f = k \frac{A}{m} q_0 ,$$

kde  $m$  je hmota družice. Numerický koeficient  $k$  je roven jedné pro případ dokonalého pohlcování nebo zrcadlového odrazu (což je poněkud nečekaný výsledek) a dosahuje maximální hodnoty 1,44 pro zcela difusní rozptyl. Hodnota koeficientu v každém konkrétním případě záleží na tom, jaká část odraženého záření je difusně rozptylována a především na tom, zda dochází k tepelné výměně uvnitř tělesa družice. Velikost tlaku záření tedy především záleží na poměru  $A/m$ , čili na převrácené hodnotě tzv. příčného zatížení.

Vzorec (3) však není možno mechanicky aplikovat na družice jiného než kulového tvaru. Pro jiné družice totiž nedochází k vzájemnému zrušení nenormálových složek tlaku na různých místech povrchu a výsledný tlak nemusí mířit proti směru dopadajícího záření.

V práci SHAPIROVĚ 1963 je diskutována velikost rušivého zrychlení v případě rotujícího disku a válce. Ukazuje se, že nejdůležitější složkou tlaku je v tomto případě právě složka kolmá na směr Slunce — družice. Rovněž v důsledku nesymetrie družice je rozdíl mezi případem úplné absorpce a zrcadlového odrazu. V druhém případě se projevuje výrazná závislost tlaku na orientaci družice.

Na první pohled se může zdát, že vliv tlaku záření na dráhu umělých družic je velmi malý a je třeba s ním počítat pouze u „lehkýčn“ družic, pro které poměr  $A/m$  dosahuje vysoké hodnoty. Je však možno dokázat, že tomu tak není a že od určité výšky nad Zemí je tlak záření důležitější než odpor atmosféry a to nezávisle na příčném zatížení (WYATT 1961). Odpor atmosféry vyvolává perturbační zrychlení

$$(4) \quad f_A = -\frac{1}{2}CV^2\rho A/m,$$

kde  $C$  je součinitel odporu,  $\rho$  hustota vzduchu a  $V$  rychlost družice vzhledem k atmosféře. Označíme-li tlak záření podle (3) jako  $f_R$ , platí pro poměr jejich absolutních hodnot

$$(5) \quad \frac{f_A}{f_R} = \frac{C\rho V^2}{2kq_0}.$$

Zatímco  $f_R$  nezávisí na výšce družice nad Zemí,  $f_A$  s výškou rychle klesá. Zvolíme-li  $c = 2$ ,  $k = 1$ ,  $V = 7,4$  km/sec je možno nalézt výšku, ve které jsou oba vlivy stejně významné. Hodnota  $\rho = 8,5 \cdot 10^{-17}$  g/cm<sup>2</sup> odpovídá za normálního stavu atmosféry výšce asi 800 km. Jestliže určujeme hustotu vzduchu ze změn drah družic ve větší výšce, může zanedbání tlaku záření podstatně ovlivnit výsledek.

Pro přehlednost zápisu budeme místo konstanty  $f$  ve vztahu (3) používat bezrozměrné hodnoty

$$(6) \quad F = kq_0Aa^2/(m\mu),$$

kde  $\mu = 3,986013 \cdot 10^{20}$  cm<sup>3</sup>/sec<sup>2</sup> je gravitační konstanta Země,  $a$  velká poloosa dráhy družice. Po dosazení  $k = 1$  a  $q_0$  podle (2) dostáváme

$$(7) \quad F = 1,1667 \cdot 10^{-25} Aa^2/m,$$

jsou-li  $A$ ,  $a$ ,  $m$  vyjádřeny v soustavě CGS.

Kromě přímého slunečního záření dopadá na družici samozřejmě i záření odražené od Země a působí i vlastní zemské tepelné záření. Matematické zachycení těchto vlivů je velmi komplikované a jeho podrobný popis by si vyžádal zvláštní článek. Kvalitativní popis poruch, vyvolávaných touto rušivou silou provedlo několik autorů, nejpodrobnější práce uvádí WYATT 1962 a SEHNAL 1964. Maximální efekt činí asi 25% vlivu přímého slunečního záření. Poprvé byl vliv odraženého záření na dráhu družice zjištěn z pozorování teprve v roce 1969. Protože se jedná o velmi malé změny, byly zjištěny pouze v pohybu balonových družic Echo 1 a Pageos, které mají poměr  $A/m = 130$  cm<sup>2</sup>/g.

V dalších odstavcích tedy budeme předpokládat, že na družici dopadá pouze rovnoběžný svazek paprsků ze Slunce. Změny vzdálenosti Slunce–Země se ve všech pracích zanedbávají, takže družice se pohybuje v homogenním poli slunečního

záření, které je narušeno pouze válcovým stínem Země. Podrobně se zkoumal pouze pohyb kulové družice a většinou se kladl koeficient  $k = 1$ , tj. předpokládalo se, že nedochází k difusnímu rozptylu dopadajícího záření.

## 2. VÝPOČET PORUCH DRÁHY DRUŽICE

Dráha umělé družice Země je určena šesti konstantami, tzv. *elementy dráhy*. Družice se pohybuje po elipse, jejíž ohnisko vždy leží ve středu Země. Označme jako  $a$  velkou poloosu této elipsy a její numerickou excentricitu jako  $e$ . Nejbližší bod dráhy se nazývá perigeum a jeho úhlová vzdálenost od místa, kde dráha protíná světový rovník (tzv. výstupný uzel) se obvykle nazývá argument perigea a označuje  $\omega$ . Dráha družice leží v rovině, která je určena polohou místa, kde protíná rovník (délka výstupného uzlu  $\Omega$ ) a sklonem k rovníku  $i$ .

Tyto elementy jsou však konstantní pouze v ideálním „nerušeném“ případě, kdy pohyb družice neovlivňují žádné „rušivé síly“. Ve skutečnosti ovšem působí na pohyb družice takových sil velmi mnoho — od zploštění Země, přes gravitační vliv Měsíce a Slunce k vlivu odporu vzduchu a tlaku záření. Elementy se potom s časem mění a proto se zavádí pojem *oskulačních elementů*. Jsou to elementy eliptické dráhy, po které by se družice pohybovala, kdyby rušivá síla náhle přestala působit. Často se používá také pojem *středních elementů*, ve kterých se uvažují pouze dlouhodobé změny elementů, změny krátkoperiodické jsou „vyhlazeny“.

Vzorce pro výpočet změn elementů jsou dobře známy z klasické nebeské mechaniky a nazývají se často rovnicemi Lagrangeovými. Zde uvedeme rovnice pouze pro změny velké poloosy  $a$  a excentricity  $e$ :

$$(8) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2naF}{\sqrt{(1-e^2)}} \left\{ e \sin vS + \frac{p}{r} T \right\}$$

$$(9) \quad \frac{de}{dt} = nF \sqrt{(1-e^2)} \{ \sin vS + (\cos v + \cos E) T \}.$$

V těchto rovnicích značí  $n$  střední denní pohyb družice (počet oběhů za den),  $r$  vzdálenost družice od středu Země,  $v$  její polohu ve dráze (úhlová vzdálenost družice od perigea — tzv. pravá anomálie),  $p = a(1-e^2)$  parametr dráhy družice. Jako  $E$  je označena excentrická anomálie, která se používá při převodu úhlu  $v$  na čas.

Rovnice (8) lze použít pro libovolnou rušící sílu, musíme však dosadit příslušné výrazy pro velikost této síly  $F$  (v našem případě podle (7)) a pro její směrové kosíny  $S$ ,  $T$ ,  $W$ . Směr rušivého zrychlení se obvykle rozkládá do těchto tří složek:  $S$  ve směru průvodiče družice  $r$ ,  $T$  v rovině dráhy družice a kolmo na průvodič a  $W$  kolmo na rovinu dráhy. Tím je definován pravouhlý pravotočivý systém se středem v družici.

Při výpočtu poruch působených tlakem slunečního záření zavedeme proto jednotkový vektor  $u_0$ , mířící od Slunce, tedy vlastně do středu zemského stínu. Jestliže provedeme transformaci souřadnic, dostaneme po řadě úprav (viz např. KOZAI 1961)

$$(10) \quad \begin{aligned} S &= - \sum_{i=1}^6 \alpha_i \cos(v + \gamma_i) \\ T &= + \sum_{i=1}^6 \alpha_i \sin(v + \gamma_i) \\ W \cos \omega &= - \sum_{i=1}^6 \beta_i \sin \gamma_i \\ W \sin \omega &= + \sum_{i=1}^6 \beta_i \cos \gamma_i. \end{aligned}$$

Symbody  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  jsou uvedeny v tab. 1, kde  $l$  je délka Slunce ve dráze (úhlová vzdálenost od jarního bodu) a  $\varepsilon$  sklon ekliptiky.

Tab. 1

$i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\gamma_i$
1	$+\frac{1}{4}(1 + \cos i)(1 - \cos \varepsilon)$	$-\frac{1}{4} \sin i (1 - \cos \varepsilon)$	$\omega + \Omega + l$
2	$+\frac{1}{4}(1 + \cos i)(1 + \cos \varepsilon)$	$-\frac{1}{4} \sin i (1 + \cos \varepsilon)$	$\omega + \Omega - l$
3	$-\frac{1}{2} \sin i \sin \varepsilon$	$-\frac{1}{2} \sin \varepsilon$	$\omega + l$
4	$+\frac{1}{4}(1 - \cos i)(1 - \cos \varepsilon)$	$+\frac{1}{4} \sin i (1 - \cos \varepsilon)$	$\omega - \Omega - l$
5	$+\frac{1}{4}(1 - \cos i)(1 + \cos \varepsilon)$	$+\frac{1}{4} \sin i (1 + \cos \varepsilon)$	$\omega - \Omega + l$
6	$+\frac{1}{2} \sin i \sin \varepsilon$	$+\frac{1}{2} \sin \varepsilon$	$\omega - l$

Jestliže tedy dosadíme vztahy (10) do rovnic (8) a (9), získáme po jejich integraci hledané výrazy pro změny elementů. Tuto integraci však není možno provést zcela exaktně – elementy, jejichž změny hledáme, vystupují totiž současně i na pravých stranách rovnic. Tak zvané poruchy *prvního řádu* získáme integrací Lagrangeových rovnic za předpokladu, že elementy na pravých stranách jsou konstantní (z tohoto důvodu bylo možno zahrnout poloosu dráhy  $a$  do konstanty  $F$  podle vztahu (7)). Nezávisle proměnná, přes kterou se integruje, je čas  $t$ , zatímco na pravé straně vystupují také pravá anomálie  $v$  a excentrická anomálie  $E$ , které obě se mění nerovnoměrně s časem, což dále komplikuje problém integrace Lagrangeových poruchových rovnic.

Tuto integraci je možno samozřejmě provést dvěma způsoby – buď numericky nebo se pokusit nalézt řešení analytické. I když numerická integrace je, zejména v éře samočinných počítačů, schůdným řešením, nepodává obecný přehled o fyzikál-

ních zákonitostech poruch a je vhodná pouze pro konkrétní výpočty u jednotlivých družic. Soustředíme se proto na stručný přehled analytických řešení daného problému.

### 3. DLOUHODOBÉ ZMĚNY PŮSOBENÉ TLAKEM ZÁŘENÍ

Protože pozorování družic v prvních letech kosmické éry nebyla příliš přesná ani vhodně rozložená v čase a prostoru, stačilo uvažovat pouze změny elementů, které byly dostatečně velké a neprobíhaly periodicky v krátké době (např. během zlomků oběžné doby družice). Tak tomu samozřejmě bylo i u tlaku záření. V tomto případě stačí vzít na pravé straně každé z rovnic (8) nebo (9) pouze členy nezávislé na anomálii  $v$  nebo  $E$ , protože ty by dávaly vznik pouze krátkoperiodickým změnám.

Všechny práce popisující tyto změny zanedbávaly vliv průchodu družice zemským stínem. Musely však uvažovat poruchy, působené zploštěním „zeměkoule“. Složky rušivého zrychlení  $S$ ,  $T$ ,  $W$  jsou totiž podle (10) a tab. 1 funkcemi elementů  $\omega$ ,  $\Omega$  a délky Slunce  $l$ . Z teorie poruch drah vlivem zploštění je přitom známo, že oba elementy se mění prakticky lineárně s časem (např. LÁLA 1965):

$$(11) \quad \omega = \omega_0 + 3J_2 \left( \frac{R_0}{p} \right)^2 \left( 1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right) nt$$

$$(12) \quad \Omega = \Omega_0 - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_0}{p} \right)^2 (\cos i) nt,$$

kde  $R_0 = 6378,15$  km je rovníkový poloměr Země a bezrozměrný koeficient  $J_2 = +1,0827 \cdot 10^{-3}$  charakterisuje zploštění Země a čas  $t$  je měřen ve dnech. Zanedbáme-li excentricitu dráhy zemské, je možno také délku Slunce považovat za lineární funkci času

$$(13) \quad l = l_0 + 0,98565t \text{ (°/den)}.$$

Ostatní elementy dráhy družice se obvykle považují za konstantní, takže v tab. 1 je  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  konstantní a  $\gamma_i$  jsou lineární funkcí času. Jestliže označíme rychlosti obecně  $\dot{\gamma}_i$ , lze psát pro každou kombinaci  $\gamma_i = \gamma_0 + \dot{\gamma}_i t$ . Dosazením do rovnic (8) a (9), ve kterých ponecháme pouze členy nezávislé explicitně na anomálii, dostáváme po integraci

$$(14) \quad a = a_0$$

$$(15) \quad e = e_0 - \frac{3}{2} nF \sqrt{(1 - e^2)} \sum_{i=1}^6 \frac{\alpha_i}{\dot{\gamma}_i} \cos \gamma_i.$$

Velká poloosa dráhy je konstantní, protože je měřítkem celkové energie družice. Protože předpokládáme homogenní pole slunečního záření, je energie, kterou družice

ztratí při pohybu proti slunečnímu záření stejná jako energie, kterou získá na druhé části dráhy. Ostatní elementy dráhy podléhají dlouhoperiodickým poruchám s různými amplitudami a periodami. Z rovnice (15) vyplývá, že amplituda poruch je nepřímo úměrná rychlosti  $\dot{\gamma}_i$ , přičemž nejvýznamnější jsou členy s malou rychlostí a tedy dlouhou periodou (perioda je  $360/\dot{\gamma}_i$  dní, je-li  $\dot{\gamma}_i$  ve  $^\circ/\text{den}$ ).

Zvláště významný je případ, kdy některá z rychlostí  $\dot{\gamma}_i = 0$ , což nazýváme *resonance*. Příslušný člen ve vztahu (10) je potom konstantní a jeho integraci dostáváme nikoliv periodické, ale *sekulární* (lineárně závislé na čase) poruchy. Ostatní členy v (10) dají vznik opět dlouhoperiodickým poruchám daným vztahem (15), kde se ovšem sčítá pouze přes idnexy  $i$  různé od resonančního.

Podmínky, kdy resonance nastává je možno určit položením  $\dot{\gamma}_i = 0$  podle tab. 1. Rychlost pohybu Slunce  $\dot{l}$  je konstantní, ale  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{\Omega}$  závisí podle (11) a (12) především na sklonu dráhy, na její velké poloose  $a$  a v menší míře na její excentricitě  $e$ . Vhodnou volbou dráhy družice je tedy možno splnit jednu nebo více podmínek resonance. Nejdůležitější je případ polární družice ( $i = 90^\circ$ ), kdy  $\dot{\Omega} = 0$  a volbou  $\dot{\omega} = -\dot{l}$  je možno splnit současně tři podmínky. Dosazením do (11) zjistíme, že kruhová dráha družice musí ležet ve výši 3800 km nad Zemí. Tento případ není pouze teoretický, ale byl prakticky realizován. Jednalo se o prstenec 300 milionů jehliček (každá 1,77 cm), které byly rovnoměrně rozptýleny podél téměř ideálně resonanční dráhy. Uvedený efekt způsobil skutečně prakticky rovnoměrný vzrůst excentricity dráhy každého tělíska, takže během čtyř let se perigeum původně kruhové dráhy snížilo natolik, že celý prstenec zanikl (SHAPIRO 1966). Tato dráha byla zvolena proto, aby jehličky, které měly v projektu West Ford sloužit komunikačním pokusům zanikly a nerušily případně radioastronomická měření.

Pro jiné sklonky dráhy je možno splnit jednu nebo dvě podmínky resonance vhodnou volbou výšky dráhy. Tyto podmínky jsou důležité i v případě že nejsou splněny. Jestliže pro konkrétní družici vypočteme hodnoty  $\dot{\gamma}_i$ , je možno bez dalšího zkoumání odhadnout, jak se elementy dráhy budou měnit. V tab. 2 jsou s využitím práce POLJACHOVA 1963 uvedeny amplitudy a periody pro několik družic, nejdůležitější členy jsou zdůrazněny. U družice Explorer 19 je téměř splněna podmínka  $\dot{\gamma}_5 = 0$  a přes takto vyvolané poruchy se překládá efekt s periodou 370 dní. Podobně u družice Pageos se přes změny s velmi dlouhou periodou překládá efekt 188 denní (viz obr. 7 a 8).

První teorie pohybu družice pod vlivem tlaku záření publikovali MUSEN 1960 a KOZAI 1961. První praktické ověření existence tlaku záření podle pozorování změn výšky perigea družice Vanguard 1 provedli MUSEN, BAILIE a BRYANT 1960. Podle tab. 2 jsou pro tuto družici nejdůležitější změny s periodou 895 dní, ovšem vzhledem k hodnotě  $A/m = 0,208 \text{ cm}^2/\text{g}$  je amplituda tohoto efektu pouze 1—2 km. Přesto jeho zahrnutí do teoretických změn vedlo k odstranění systematických odchylek od pozorování. Další publikované práce se zabývaly především rozбором pohybu v okolí resonance a sledováním dlouhodobých efektů na balonových družicích (Echo 1 mělo  $A/m = 115$ , Echo 2  $A/m = 51,6$  a Pageos  $A/m = 130 \text{ cm}^2/\text{g}$ ).



Tab. 2

Družice $\gamma_i$	Vanguard 1 $i = 34^\circ$		Echo 1 $i = 47^\circ$		Explorer 19 $i = 79^\circ$		Echo 2 $i = 81^\circ$		Pageos $i = 87^\circ$	
	$\alpha_i/\gamma_i$	P (dny)	$\alpha_i/\gamma_i$	P (dny)	$\alpha_i/\gamma_i$	P (dny)	$\alpha_i/\gamma_i$	P (dny)	$\alpha_i/\gamma_i$	P (dny)
$\omega + \Omega + l$	+0,0159	152	+0,0398	415	-0,0128	186	-0,0099	149	+0,3759	6207
$\omega + \Omega - l$	+2,1766	<b>895</b>	-0,7279	<b>326</b>	-0,1468	92	-0,1255	82	-0,2635	<b>188</b>
$\omega + l$	+0,0208	67	+0,0369	91	+0,2007	<b>370</b>	+0,1234	225	-1,3637	2466
$\omega - \Omega - l$	+0,0006	56	+0,0013	71	-0,0084	182	-0,0064	131	-0,0113	207
$\omega - \Omega + l$	+0,0099	43	+0,0218	51	-42,7889	<b>40000</b>	-0,5209	<b>460</b>	+1,9410	<b>1538</b>
$\omega - l$	+0,0328	105	+0,0735	181	+0,0664	122	+0,5552	101	+0,1090	197

## 4. VLIV STÍNU NA OBĚŽNOU DOBU DRUŽICE

Podle vztahu (14) nepodléhá velká poloosa dráhy dlouhodobým změnám a protože podle třetího Keplerova zákona závisí oběžná doba pouze na  $a$ , lze psát pro změnu periody  $P$

$$(16) \quad \Delta P = \frac{3}{2na} \Delta a .$$

Rovnice (14) platí ovšem pouze za předpokladu, že družice nevstupuje do zemského stínu. V opačném případě totiž nelze zanedbat periodické členy v (8) a (9), protože integrace se neprovádí přes celý oběh, ale pouze přes osvětlenou část dráhy. Proto i tyto členy mohou vyvolat dlouhoperiodické změny dráhy a tak pozměnit závěry minulého odstavce. Nejdůležitější je tento vliv právě u velké poloosy, která by jinak zůstávala konstantní.

Označme úhel družice – střed stínu jako  $\lambda$  a považujme stín Země za válec o polooměru  $R_0$ . Z geometrických podmínek plyne, že platí

$$(17) \quad \cos \lambda = A_1 \cos v + A_2 \sin v$$

$$(18) \quad \sin \Phi = \frac{R_0}{r} ,$$

kde  $\Phi$  je hodnota  $\lambda$  při průchodu hranicí stínu a parametry  $A_1, A_2$  jsou určeny podle tab. 1 jako

$$(19) \quad \begin{aligned} A_1 &= - \sum_{i=1}^6 \alpha_i \cos \gamma_i \\ A_2 &= + \sum_{i=1}^6 \alpha_i \sin \gamma_i . \end{aligned}$$

Rovnici (8) pro změny velké poloosy řešili různí autoři, přičemž nejnázornější výsledek podal HORVATH 1969, podle kterého platí

$$(20) \quad \Delta a = 2F(\sqrt{(r_1^2 - R_0^2)} - \sqrt{(r_2^2 - R_0^2)}).$$

Velikost změny poloosy  $a$  podle (16) i periody závisí tedy explicitně pouze na konstantě  $F$  definované podle (7) a na rozdílu průvodičů při vstupu  $r_1$  a výstupu  $r_2$  ze stínu. Tato změna je nulová pouze ve třech případech. Především když družice do stínu vůbec nevstupuje, potom je-li dráha kruhová, takže  $r = \text{konst.}$  a nakonec je-li dráha symetricky orientována vzhledem ke Slunci (perigeum leží na ose střed stínu, střed Země), protože potom  $r_1 = r_2$ .

Jestliže družice vstupuje do stínu ve větší výšce než v jaké vystupuje, dochází ke zvětšování velké poloosy, v opačném případě k jejímu zmenšování. To je výrazný rozdíl proti vlivu odporu atmosféry, který vyvolává pouze zmenšování oběžné energie a tedy i poloosy.

K tomu, abychom mohli podle rovnice (20) určit velikost těchto změn, musíme ovšem znát velikost průvodiče v okamžiku, kdy družice vstupuje a vystupuje ze stínu. K tomu je třeba řešit tzv. *rovnici stínu*, kterou pomocí vztahů (17) a (18) zapíšeme jako

$$(21) \quad 1 - \cos^2 \lambda = \left(\frac{R_0}{r}\right)^2,$$

přičemž  $\cos \lambda > 0$ , protože jinak bychom dostali průsečíky dráhy s válcovým stínem na denní straně (ke Slunci), což nemá fyzikální smysl. Dosazením za  $\lambda$  a  $r$  můžeme rovnici upravit na funkci excentrické anomálie  $E$ , nebo pravé anomálie  $v$ . Dostáváme přitom transcendentní rovnici, jejíž řešení je jednoduché pouze pro kruhové dráhy, které nás ovšem příliš nezajímají. Jinak se rovnice stínu řeší pouze numericky metodou postupného přibližování (která ale, jak ukázal např. CHOVITZ 1967, nemusí vždy dávat výsledek), nebo se transformací  $y = \text{tg } E/2$  převádí na algebraickou rovnici čtvrtého stupně, kterou je možno řešit známými metodami vyšší algebry. Protože je však přitom třeba vybírat pouze reálné kořeny, uvažovat podmínku  $\cos \lambda > 0$  atd., není možno výsledek zapsat jako jednoduchou funkci elementů dráhy, což je nutný předpoklad pro vypracování analytické poruchové teorie. Tuto metodu je možno použít například pro vyloučení vlivu ilaku záření při určování hustoty vzduchu ze změn periody, nebo pro kontrolu analytického řešení. Testování, zda daná poloha družice leží ve stínu nebo nikoliv je jednodušší, protože je možno použít přímo vztahů (17) a (18). Toho se využívá např. při výpočtu efemerid umělých družic (LÁLA 1968a) a jestliže volíme jednotlivé polohy družice dostatečně hustě, je možno takto nalézt i místa vstupu či výstupu ze stínu s dostatečnou přesností.

## 5. KRÁTKOPERIODICKÉ A KVASISEKULÁRNÍ PORUCHY

Se zvyšující se přesností a četností pozorování se ukázalo, že k jejich plnému využití pro geofyzikální a geodetické účely je třeba vypracovat teorie rušivého vlivu, které by zahrnovaly i krátkoperiodické efekty, tj. řešit Lagrangeovy perturbáční rovnice (z nichž dvě jsou uvedeny jako (8) a (9)) bez zanedbání členů obsahujících anomálie  $v$  nebo  $E$ . Protože takovéto přesné řešení potřebujeme většinou pouze na krátkém časovém intervalu, je možno polohu dráhy vzhledem ke Slunci považovat za konstantní, takže parametry  $A_1, A_2$  ve vztahu (19) jsou konstantní a jejich dosazením do Lagrangeových rovnic (8) a (9) dostáváme

$$(22) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2aF}{\sqrt{(1-e^2)}} \{eA_2 + A_2 \cos v - A_1 \sin v\}$$

$$(23) \quad \frac{de}{dt} = F \sqrt{(1-e^2)} \{A_2 + eA_2 \cos v + (1-e^2) A_2 \cos^2 v - \\ - eA_1 \sin v - (1-e^2) A_1 \sin v \cos v\},$$

čili obecně lze psát pro změnu kteréhokoliv ze šesti elementů

$$(24) \quad \frac{d\sigma}{dt} = 2nFA \left\{ \sum_{I=1}^{MS+1} XC_I \cos^{I-1} v + \sum_{I=1}^{MS} XS_I \cos^{I-1} v \sin v \right\},$$

kde koeficienty  $FA, XC_I$  a  $XS_I$  jsou konstantní a jsou závislé pouze na hodnotě elementů dráhy družice. Řešení takto upravených Lagrangeových poruch provedl LÁLA 1968b nejprve při zanedbání přítomnosti stínu. Výsledkem byly krátkoperiodické (s periodou rovnou jednomu nebo polovině oběhu) a kvasisekulární (tedy „zdánlivě sekulární“) poruchy. Výsledky byly srovnávány s numerickou integrací a s pozorovanými dlouhoperiodickými změnami, přičemž byl zjištěn dobrý souhlas.

Řešení rovnic (24) je však značně komplikováno, chceme-li uvážit i vliv stínu, protože jak bylo uvedeno v minulém odstavci, není možno analyticky vyjádřit hranice stínu. Jinou metodu navrhl FERRAZ-MELLO 1964, který zavedl *funkci stínu*, která je rovna jedné, je-li družice osvětlena a rovna nule je-li ve stínu. Jestliže provedeme integraci rovnic (24) vynásobených takovouto funkcí, bude výsledek vyjadřovat i vliv stínu, aniž bychom věděli, kde jím družice prochází. FERRAZ-MELLO navrhl zápis této funkce ve tvaru Fourierovy řady, avšak praktická aplikace této myšlenky se neosvědčila.

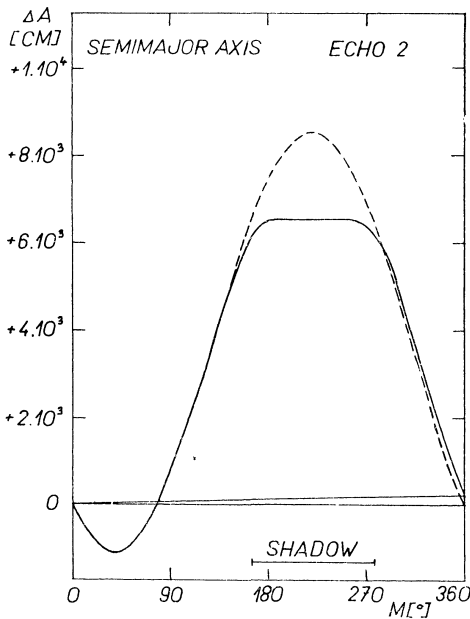
První praktické výsledky byly uvedeny v práci LÁLA, SEHNAL 1969, kde autoři použili jinou definici funkce stínu. Zavedeme-li nezávisle proměnnou  $X = \lambda - \Phi$ , kde  $\lambda$  je definováno vztahem (17) a hranice stínu  $\Phi$  vztahem (18), lze funkci stínu  $\varkappa$  psát takto:

$$(25) \quad \varkappa = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{(1 - \cos^2 x)}} \right).$$

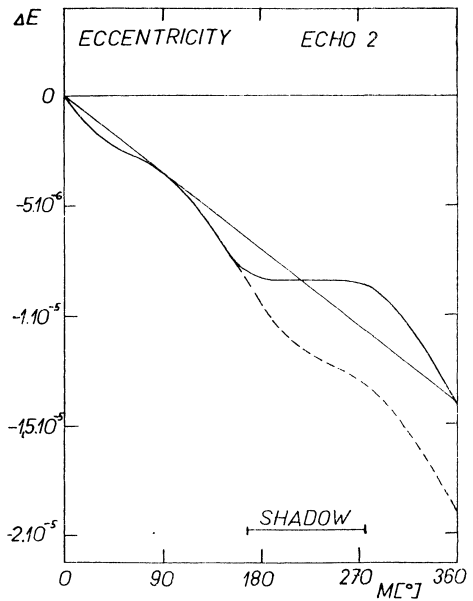
Snadno se přesvědčíme, že skutečně pro  $\lambda < \Phi$ , kdy je družice ve stínu je  $\kappa = 0$  a pro  $\lambda > \Phi$  je  $\kappa = 1$ . Výraz  $(1 - \cos^2 x)^{-\frac{1}{2}}$  lze rozložit do absolutně konvergentní mocninné řady a dalšími úpravami, dosažením ze (17) a (18) atd. nakonec dostaneme funkci stínu vyjádřenou pomocí konstantních koeficientů a pravé anomálie  $v$ . Přesnost aproximace funkce stínu závisí na počtu členů, které při výpočtu uvažujeme a který musí být poměrně veliký. Takto rozloženou funkcí stínu násobíme (24) a po řadě úprav, které zde nelze popisovat, dostaneme pro změny obecného elementu konečný výraz

$$(26) \quad \Delta\sigma = FA \left\{ SEK M + \sum_{J=1}^{MP} PEC_J \sin(JM) + \sum_{J=1}^{MP} PES_J (1 - \cos(JM)) \right\}.$$

Velikost kvasisekulárních změn je dána koeficientem  $SEC$ , změn periodických koeficienty  $PEC_J$  a  $PES_J$ . Nezávisle proměnnou je střední anomálie  $M = nt$ , která je lineární funkcí času, měřeného od prvního průchodu družice perigeem. Jestliže známe velikost těchto koeficientů, můžeme z (26) určit změnu počáteční hodnoty



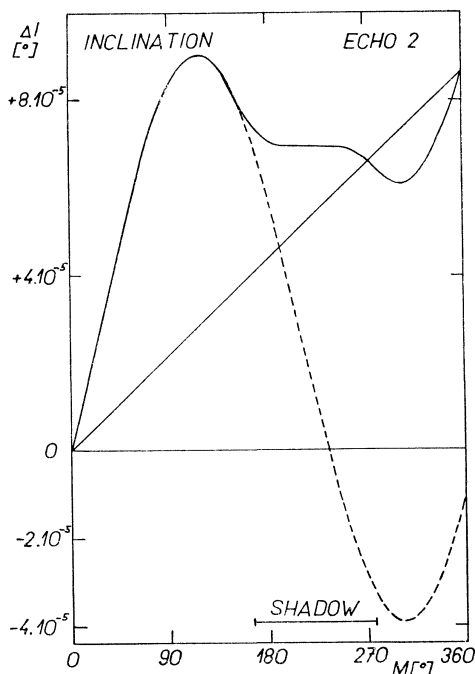
Obr. 1. Změny velké poloosy dráhy družice Echo 2 během jednoho oběhu. Čárkovaně jsou znázorněny výsledky výpočtu při zanedbání stínu, plnou čarou včetně stínu. Poloha stínu je znázorněna pouze pro informaci. Kvasisekulární změna poloosy je poměrně malá, protože dráha byla téměř kruhová.



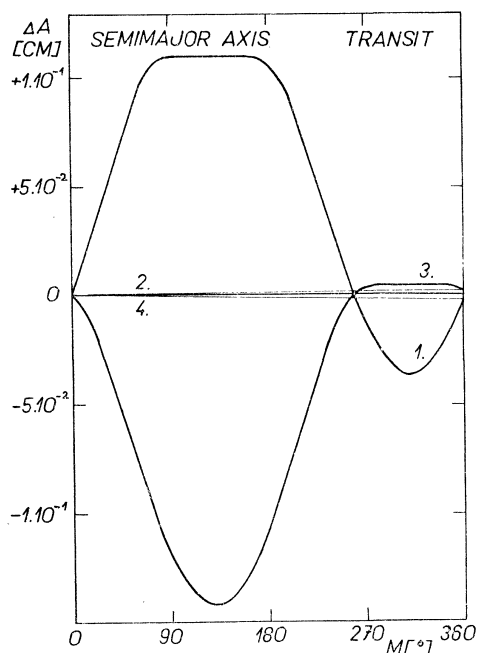
Obr. 2. Změny excentricity dráhy družice Echo 2 během jednoho oběhu. Označení je stejné jako na obr. 1.

zkoumaného elementu v libovolném čase za předpokladu, že orientace dráhy zůstala konstantní. Přesnost vyjádření změn závisí na počtu koeficientů, tedy na velikosti limity  $MP$ .

Výpočet koeficientů ve vztahu (26) je velmi komplikovaný, takže bylo nutno použít k získání praktických výsledků středního samočinného počítače IBM 360/65 pracujícího rychlostí asi milion operací za vteřinu. Výpočty byly provedeny autorem článku při studijním pobytu ve francouzském kosmickém středisku v Bretigny sur Orge. Do programu byly uloženy veškeré algoritmy výpočtu perturbačních koeficientů, který by se jinak prováděl ručně. Nevýhodou tohoto postupu ovšem je, že získáváme pouze numerické hodnoty výsledných koeficientů, nikoliv jejich analytické vyjádření. Ve světě už ale existují speciální převaděče, které umožňují získat pomocí počítače přímo analytické vyjádření výsledku. Jejich použití by umožnilo získání kompletní analytické teorie vlivu tlaku záření.



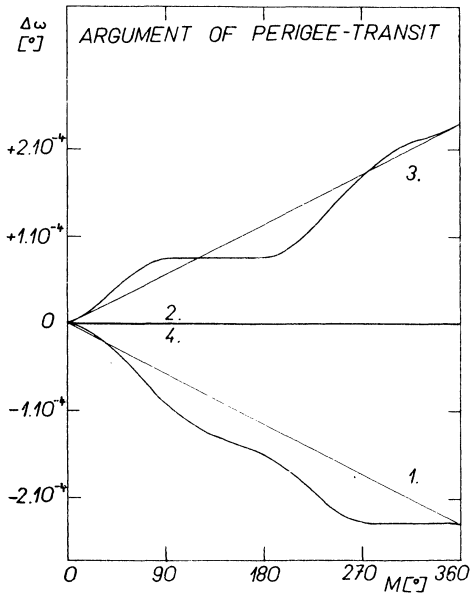
Obr. 3. Změny sklonu dráhy družice Echo 2 během jednoho oběhu. Označení je stejné jako na obr. 1.



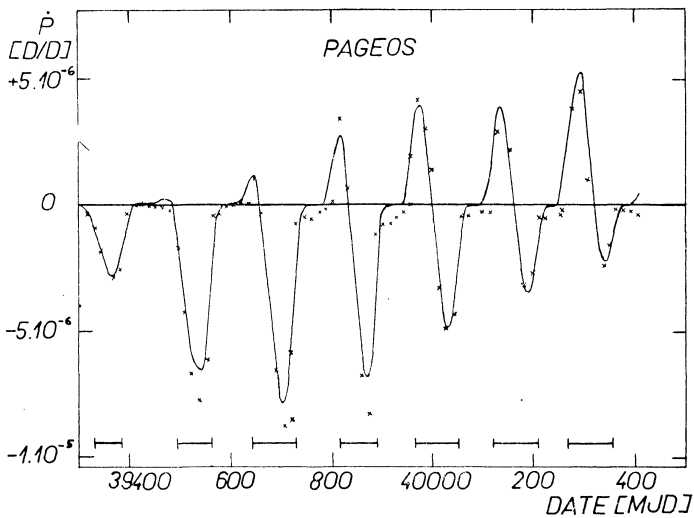
Obr. 4. Změny velké poloosy dráhy družice Transit během jednoho oběhu. Křivka č. 1 odpovídá případu, kdy úhel  $I - \Omega = 0^\circ$ , křivka 3— $180^\circ$ . Pokud je dráha kolmá na směr střed stínu — střed Země (křivka 2— $90^\circ$ , křivka 4— $270^\circ$ ) jsou změny pro polární dráhu nulové.

Na obr. 1—5 je znázorněn průběh poruch různých elementů během jednoho oběhu pro družice Echo 2 a Transit. Čárkovane jsou pro srovnání uvedeny výsledky získané při zanedbání stínu. Na obr. 4 a 5 jsou srovnány poruchy pro různou orientaci dráhy

družice vzhledem ke Slunci. Poloha stínu je uvedena pouze pro orientaci. Na obr. 6–8 jsou uvedeny změny elementů dráhy družice Pageos během prvních 3,5 let její existence. Na vodorovné ose je astronomické číslování dní, úsečky označují období,

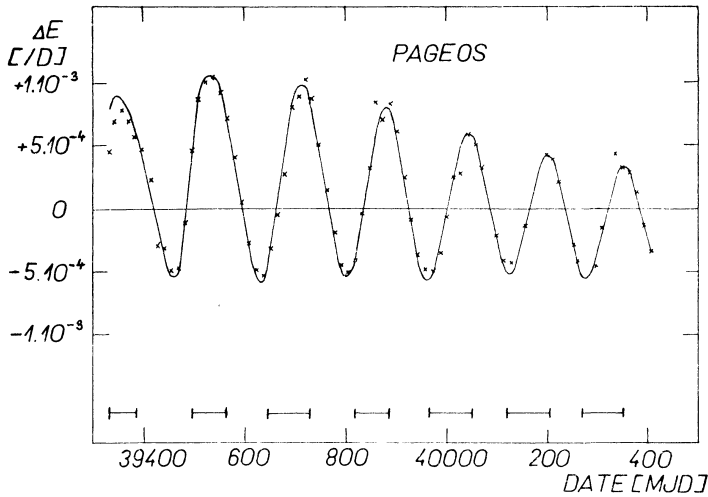


Obr. 5. Změny argumentu perigea dráhy družice Transit během jednoho oběhu. Označení stejné jako na obr. 4.



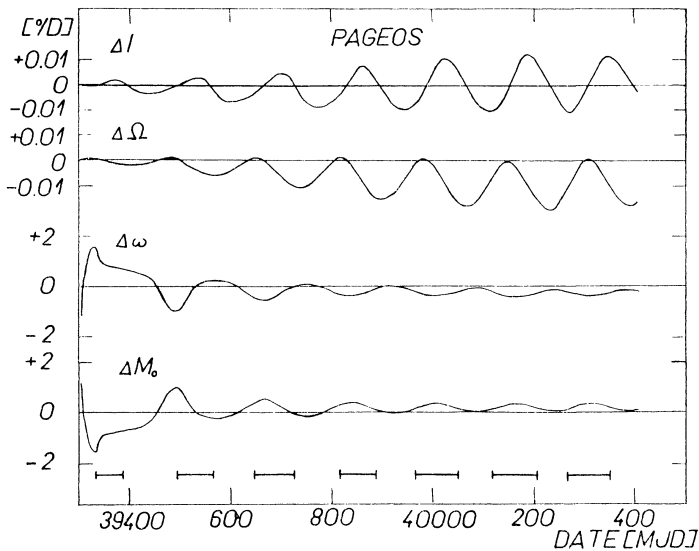
Obr. 6. Kvasisekulární změny periody družice Pageos během prvních 3,5 let její existence. Na vodorovné ose je astronomické datum (MJD — modifikované juliánské datum), změny periody jsou v jednotkách dny/den. Křivkou jsou znázorněny výsledky výpočtů (v intervalu asi 14 dní), křížky značí pozorované hodnoty. Úsečky určují období, kdy dráha družice procházela stínem Země.

kdy dráha zasahovala do zemského stínu. Křivka zachycuje změny vypočítané teoreticky, v intervalu vždy asi 14 dní, křížky značí pozorované hodnoty. Během



Obr. 7. Kvasisekulární změny excentricity dráhy družice Pageos během prvních 3,5 let její existence. Označení jako na obr. 6.

zkoumaného období se excentricita dráhy neustále zvětšovala (viz tab. 2), takže amplituda změn sklonu  $i$  a délky uzlu  $\Omega$  (pro které příslušná konstanta  $FA$  obsahuje



Obr. 8. Kvasisekulární změny sklonu, délky výstupného uzlu, argumentu perigea a počáteční střední anomálie pro družici Pageos. Pouze vypočtené hodnoty.

excentricitu) rovněž rostla. Naopak pro argument perigea a počáteční hodnotu střední anomálie  $M_0$  je amplituda nepřímo úměrná excentricitě, takže se neustále zmenšuje (obr. 8). Srovnání s pozorováním ukazuje velmi dobrý souhlas u změn excentricity, rozdíly ve změnách periody (patrné zejména v období, kdy družice nevstupovala do stínu) jsou způsobeny vlivem odporu atmosféry. Družice Pageos se pohybuje ve výšce okolo 4000 km, kde vliv tlaku záření podstatně převyšuje odpor vzduchu (viz odst. 1).

#### Literatura

- ELJASBERG P. J. 1965, *Vvedenije v teoriju poleta ISZ*, Moskva.  
 CHOVITZ B. H. 1967, 48th Annual Meeting of the AGU, April 17—20, 1967.  
 KOZAI Y. 1961, SAO Special Report 56.  
 LÁLA P. 1965, Čs. čas. fys. 15, str. 348.  
 LÁLA P. 1968a, ITCP Bulletin Sept. 12, Washington D. C.  
 LÁLA P. 1968b, Bull. astr. Inst. Csl. 19, str. 233.  
 LÁLA P., SEHNAL L. 1969, Bull. astr. Inst. Csl. 20, str. 327.  
 MUSEN P. 1960, J. Geophys. Res. 65, str. 1391.  
 MUSEN P., BRYANT R., BAILIE A., 1960, Astr. J. 65, str. 342.  
 POLJACHOVA E. N. 1964, Bjull. Inst. teor. Astr. IX, str. 440.  
 SEHNAL L. 1964, Symposium IAU No. 25, str. 345, Thessaloniki.  
 SHAPIRO I. I. 1963, J. Geophys. Res. 68, str. 5349.  
 SHAPIRO I. I. 1966, Science 154, str. 1445.  
 WYATT S. P. 1961, SAO Special Report No. 60.  
 WYATT S. P. 1962, *Dynamics of Satellites* str. 180, Paris.

#### Jupiterova Rudá skvrna osciluje

H. E. SOLBERG z Observatory of New Mexico State Univ. zjistil na základě 1200 fotografií, pořízených od r. 1963, periodické oscilace v jovigrafické délce Rudé skvrny. Amplituda je  $0,8^\circ$  a perioda asi 90 dní. Jde o jedno z nejvýznamnějších zjištění v historii pozorování Jupitera, avšak příčiny a mechanismus oscilací neznáme (Planetary and Space Science 17 (1969), 1573).

Rudá skvrna byla poprvé pozorována HOOKEM r. 1664 a potom CASSINIM, MARALDIM aj. až do r. 1713, kdy zmizela (zestlábla), podobně jako později r. 1882 nebo r. 1920. Změny viditelnosti souvisí zřejmě se změnami zabarvení. Šířka skvrny se nemění, délka se mění v rozmezí  $+720^\circ$  až  $-400^\circ$  za posledních 130 let. Podle REESEHO (1962) činí nyní rotace  $9^h 55^m 41,7^s$  a její jovigrafická délka v II. systému stoupá. Průměrná velikost je nyní  $40\,000 \times 13\,000$  km. Podstata Rudé skvrny zůstává zatím neznámá; jedno z posledních mínění nedávno vyslovil HIDE (1961): vysvětluje Rudou skvrnu jako hydrodynamický jev obdobný tzv. Taylorovu sloupu. U nás o tomto názoru píše podrobněji PŘÍHODA (Kosmické rozhledy 7 (1969), 31).

MARCEL GRÜN