Zdeněk Horák
K modernizaci výuky elektromagnetismu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 16 (1971), No. 3, 145--151

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139081

VYUČOVÁNÍ MATEMATICE A FYZICE

K MODERNIZACI VÝUKY ELEKTROMAGNETISMU

ZDENĚK HORÁK, Praha

V posledních letech se ve světové literatuře objevilo několik učebnic fyziky, které si kladou za úkol vysvětlit magnetické pole jako relativistický efekt vzniklý pohybem nábojů. V tomto článku podávám několik připomínek ke způsobu, jakým byl tento úkol řešen — z hlediska modernizace úkol velmi významný — jednak v australské středoškolské učebnici [1], jednak ve dvou známých amerických vysokoškolských kursech [2] a [3]. Tyto dvě učebnice se mají překládat do češtiny a v recenzi [4] australské učebnice prof. FUKA uvažuje o vhodnosti zavést podobné úvahy do našich nových učebnic pro SVVŠ.

To byl přímý podnět k napsání tohoto článku. Relativistickým výkladem elektromagnetismu se zabývám od r. 1962 ([5]) a zařadil jsem jej i do učebnice pro strojní fakulty [6], protože mu přikládám zásadní pedagogický význam z těchto důvodů:

Již v r. 1892 si uvědomil H. A. LORENTZ, že Maxwellova abstraktní teorie elektromagnetického pole založená na Faradayových představách musí být modifikována uznáním existence nabitých částic. Tak dospěl ke své „elektronové teorii", která je vlastně syntézou předmaxwellovských „nábojových" teorií a teorie Maxwellovy užité na „mikropole" elektronů a iontů. Jeho teorie vedla k objevu Lorentzovy transformace, která je základem speciální teorie relativity. Tato teorie ovládá všechny fyzikální jevy, a je tedy nadřazena teorii elektromagnetického pole. Odpovídá tomu i historický vývoj, který se obvykle ubírá od objevení jednodušších konkrétních zákonů k formulaci obecnějších principů. Účelem fyziky je však pozorované jevy koordinovat a vysvětlovat na základě obecných zákonitostí, a proto považuji za správnější vykládat magnetismus jako důsledek speciální relativity než ze setrvačnosti sledovat historický vývoj. Z hlediska klasické fyziky je existence magnetického pole nejen nepochopitelná, ale přímo odporuje Coulombovu zákonu, protože přechodem od jedné inerciální soustavy k jiné nemůže podle klasické fyziky vzniknout nová síla. Proto je vznik magnetického pole rovnoměrným přímočarým pohybem náboje v rozporu s Newtonovou fyzikou. Lze jej naopak velmi dobře pochopit jako důsledek teorie relativity, čímž se zároveň prokazuje její praktický význam i při rychlostech mizivě malých proti rychlosti světla. Princip relativity se tak stává jedním ze základních pilířů fyziky, který nejen předpovídá některé sotva zjistitelné kuriózní efekty, ale může podat také vysvětlení všeobecně známých elementárních poznatků z oboru elektromagnetismu. Tyto závažné skutečnosti jistě nelze při modernizaci přehlédnout a měly by být řádně objasněny především na vysoké škole, ačkoli i na SVVŠ by s nimi měli být žáci seznámeni. Vyžadovalo by to ovšem zařadit do výuky na SVVŠ aspoň nejnutnější základy teorie relativity, jak to učinili např. autoři australské učebnice [1].

Aby čtenář mohl bezpečně posoudit, do jaké míry se autorům podařilo při nutném zjednodušování úvah a výpočtů zachovat fyzikální správnost, uvedu nejprve obecně platné vzorce, které odvodil HEAVISIDE již 1888 pro elektrické a magnetické pole náboje Q, který se pohybuje v pozorovací soustavě stálou rychlostí $\mathbf{v}$ libovolně blízkou rychlosti světla c:

$$(1) \qquad \mathbf{E}_H = \Gamma \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}^0 , \quad \mathbf{B}_H = \Gamma \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_H) ,$$

kde Heavisidův faktor

$$(2) \qquad \Gamma = (1 - v^2/c^2)(1 - |\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0|^2/c^2)^{-3/2} , \quad \mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r .$$

Tyto vzorce byly mnohokrát odvozovány jak z Maxwellovy teorie, tak z relativistické elektrodynamiky. Z Coulombova zákona je pomocí Lorentzovy transformace odvodil poprvé PAGE ([7]) r. 1912. Pageova práce však zapadla, snad pro geometrický charakter jeho metody založené na změně hustoty siločar způsobené kontrakcí délek. Tak se stalo, že po padesáti letech jsem mohl nezávisle na Pageovi znovu dokázat ([5]), že vzorce (1) plynou z Coulombova zákona užitím obecné Lorentzovy transformace ve vektorovém tvaru. Své výsledky jsem podrobněji rozvedl v učebnici [6], kde jsem z Coulombova zákona odvodil pro malé rychlosti nábojů nejen Biotův-Savartův zákon, ale i magnetické pole Maxwellova proudu a obecný zákon elektromagnetické indukce. Pro rychlosti libovolně blízké rychlosti světla jsem odvodil vzorce (1) v práci [8]. Zde se omezím na konstatování, že pro pole rychlého náboje plynou ze speciální teorie relativity vzorce (1), vyjdeme-li z této fomulace Coulombova zákona:

Bodový náboj klidný v pozorovací soustavě působí na všechny ostatní náboje elektrostatickou silou nezávisle na jejich rychlostech.

Tato úplnější formulace plyne ze všech dosavadních zkušeností získaných na urychlovačích s velkou přesností i pro velmi rychlé náboje. Je z ní zřejmá důležitá skutečnost, že pro elektrodynamické síly neplatí zákon o rovnosti akce a reakce, a to ve shodě s tím, že podle teorie relativity se tento zákon omezuje na síly mezi tělesy v dotyku (viz např. [9]) a mezi náboji s nulovou relativní rychlostí.

Zdá se, že matematická složitost obecné Lorentzovy transformace, obecného vzorce pro transformaci síly a odvození elektrodynamické síly v obecném vektorovém tvaru brání zavedení exaktní metody do výuky. Proto zde uvedu přesné odvození elektrodynamické síly ve zvláštním případě dvou libovolně rychlých nábojů pohybujících se kolmo k jejich spojnici, znázorněném na obr. 1.

Při tomto postupu budeme potřebovat tyto poznatky:

A. Z matematiky: pojem derivace a derivace lineární funkce.

B. Z klasické mechaniky: Okamžitá rychlost $\boldsymbol{u}$ bodu o souřadnicích x, y má složky

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u^2 = u_x^2 + u_y^2 . \tag{3}$$

C. Ze speciální teorie relativity: Lorentzova transformace

$$x' = \alpha(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \tag{4}$$

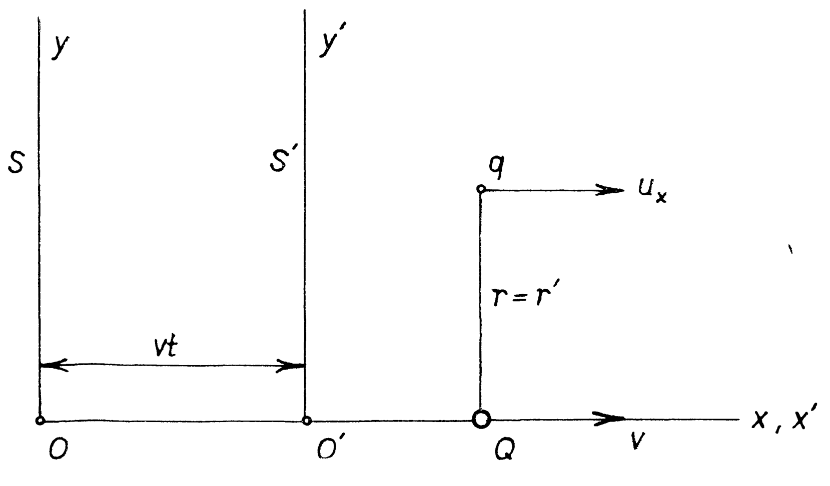
$$t' = \alpha(t - vx/c^2), \quad \alpha = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \tag{5}$$

závislost hmotnosti na rychlosti bodové částice

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}}, \quad m' = \frac{m_0}{\sqrt{(1 - u'^2/c^2)}}, \tag{6}$$

a relativistické pohybové rovnice

$$\frac{d(m\boldsymbol{u})}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad \frac{d(m'\boldsymbol{u}')}{dt'} = \boldsymbol{F}'. \tag{7}$$



Obr. 1.

Podle obr. 1 se částice s nábojem Q pohybuje v pozorovací soustavě $S(O, x, y)$ stálou rychlostí v po ose Ox. Q má v okamžiku t stejnou souřadnici x jako druhá částice s nábojem q, která se ve vzdálenosti $r = y$ pohybuje okamžitou rychlostí $u = u_x$ rovnoběžně s v. Abychom zjistili, jakou silou působí Q na q, přejdeme k soustavě $S'(O', x', y')$, která se pohybuje vzhledem k S stejnou rychlostí v jako Q.

Podle hořejší formulace Coulombova zákona působí ve své klidové soustavě S' náboj Q na q silou

$$(8) \qquad F'_x = 0\,, \quad F'_y = \frac{Q'q'}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = qE$$

nezávislou na rychlosti $\boldsymbol{u}'$ náboje q v S', neboť náboje se při transformaci nemění. Sílu, jaké podléhá částice q v pozorovací soustavě S, najdeme zpětným přechodem od S' k S. Protože v, c, α nezávisí na čase, souvisí přírůstek času $\mathrm{d}t'$ v S' podle (5) s přírůstkem $\mathrm{d}t$ v S vztahem:

$$(9) \qquad \mathrm{d}t' = \alpha(\mathrm{d}t - v\,\mathrm{d}x/c^2) = \alpha(1 - vu_x/c^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\alpha(1 + vu'_x/c^2)}\,.$$

Poslední výraz plyne z transformace inverzní k (5), která se od (5) liší jen znaménkem u v. Pro složky rychlosti $\boldsymbol{u}'$ v soustavě S' dostaneme z (4) a (9)

$$(10) \qquad u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \alpha(u_x - v)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}\,,$$

$$(11) \qquad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = u_y\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_y}{\alpha(1 - vu_x/c^2)}\,.$$

Odtud plyne snadným počtem

$$1 - u'^2/c^2 = \frac{1 - u^2/c^2}{\alpha^2(1 - vu_x/c^2)^2}\,,$$

takže podle (6)

$$(12) \qquad \frac{m'}{m} = \sqrt{\left(\frac{1 - u^2/c^2}{1 - u'^2/c^2}\right)} = \alpha(1 - vu_x/c^2) = \frac{1}{\alpha(1 + vu'_x/c^2)}\,.$$

Složky hybnosti se tedy transformují podle rovnic

$$m'u'_x = m\alpha(u_x - v)\,, \quad m'u'_y = mu_y$$

a podle (7)

$$F'_x = \frac{\mathrm{d}(m'u'_x)}{\mathrm{d}t'} = \alpha\left(\frac{\mathrm{d}(mu_x)}{\mathrm{d}t} - v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \alpha\left(F_x - v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\,,$$

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}(m'u'_y)}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}(mu_y)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = F_y\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\,.$$

Protože síla F' je kolmá k Ox', a tedy i k rychlosti částice, nekoná práci, a proto je energie částice $W' = m'c^2$ v S' a ovšem i hmotnost m' stálá. Podle (12) je také m

stálé a vzhledem k (9) a (8)

$$(13) \qquad F_x = 0\,, \quad F_y = \alpha(1 - vu_x/c^2)\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = q\left(\alpha E - \frac{\alpha}{c^2}\,Evu_x\right).$$

To plně odpovídá obecnému vzorci pro Lorentzovu sílu

$$(14) \qquad \mathbf{F} = q(\mathbf{E}_H + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_H)\,,$$

položíme-li

$$(15) \qquad \mathbf{E}_H = \alpha\frac{Q\mathbf{r}^0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,, \quad \mathbf{B}_H = \alpha\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0) = \frac{1}{c^2}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{E}_H)\,.$$

V našem jednoduchém případě je $|\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0| = v$ a podle (2) $\Gamma = \alpha$, takže rovnice (15) souhlasí přesně s Heavisidovými vzorci (1). Vzorec (13) platí tedy přesně pro rychlosti u, v libovolně blízké c a můžeme ho použít k bezpečnému posouzení správnosti výsledků obsažených ve výše uvedených učebnicích.

V sydneyské učebnici se uvádí vzorec 14—17, který v našem označení zní:

$$(16) \qquad F_{\text{Syd}} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\alpha(1 - vu_x/c^2)/\sqrt{(1 - u^2/c^2)} = \frac{F_y}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}}\,.$$

Souhlasí se správným vzorcem (13) jen pro $u = 0$, kdy na klidný náboj q vůbec magnetické pole nepůsobí. Pokud $u \neq 0$, dává nesprávné výsledky jak pro elektrickou, tak pro magnetickou sílu, což by se projevilo velmi nápadně při pohybu rychlých elektronů ($u \approx c$) v elektromagnetickém poli. Tak např. zrychlení elektronu v elektrostatickém poli by podle (16) bylo

$$a = \frac{F_{\text{Syd}}}{m} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2\sqrt{(1 - u^2/c^2)}m} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2 m_0}\,,$$

tedy nezávislé na jeho rychlosti, takže by mohl dosáhnout libovolně velké rychlosti přesahující c. *Přibližně* správnou sílu dává (16) jen v případě dvou *rovnoběžných kondukčních* proudů (u, $v \ll c$). Původ nesprávnosti vzorce (16) je v chybném užití teorie relativity: *do vzorce pro kontrakci délek byla zcela nelogicky místo rychlosti* $\mathbf{v}$ *měřené v pozorovací soustavě dosazena relativní rychlost obou nábojů.* Proto je výsledek správný jen pro $u = 0$.

Výklad vycházející ze zásadně chybného úsudku, který vede též k chybnému výsledku, není přijatelný ani pro výuku na SVVŠ, a tím méně na vysoké škole. V citovaných vysokoškolských kursech se sice vzorce (16) neužívá, ale ani tam není relativistická podstata magnetického pole vyložena zcela uspokojivě.

V § 5.9 učebnice [2] se na základě kontrakce délek vyvozuje vznik síly, kterou nekonečná přímá řada kladných a záporných nábojů stejné délkové hustoty $\pm\lambda$, pohybujících se proti sobě stejnou rychlostí $\pm v_0$, působí na náboj q; tento náboj letí rychlostí v rovnoběžně s proudícími náboji ve vzdálenosti r od osy proudu. V klidové soustavě náboje q se elektrické síly od kladných a záporných nábojů zcela neruší, protože jejich hustoty se kontrakcí nezmění stejně. Zdá se, že ani sám autor nepokládá tento výklad za zcela přesvědčivý, protože v poznámce pod čarou na str. 174 vysvětluje, že to v případě nekonečného nábojového vlákna není v rozporu s invariancí náboje. Na str. 177 však vyzdvihuje všeobecnou platnost odvozeného vzorce (v Gaussově soustavě jednotek)

$$F_y = \frac{4q\lambda v v_0}{rc^2} = \frac{2qvI}{rc^2}, \quad I = 2\lambda v_0, \tag{17}$$

aniž uvádí, že platí pro rychlosti libovolně blízké c, jen pokud je proud *nekonečný* (viz [8]). Srovnáním (17) s (14) pak dostává $B = 2I/rc$, odkud odvozuje I. Maxwellovu rovnici v integrálním tvaru, jejíž platnost pro jiné než nekonečné přímkové proudy (např. pro uzavřenou proudovou smyčku) přijímá výslovně jako *další postulát* ověřený ve svých důsledcích experimentálně. Pak obvyklým postupem přes vektorový potenciál odvozuje Biotův-Savartův zákon

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}^0}{cr^2} = \frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{cr^2}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}^0) = \frac{\mathrm{d}Q}{cr^2}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}^0), \tag{18}$$

který však pro *rychlé náboje neplatí ani přibližně*, protože v něm chybí faktor $\Gamma = \alpha$ vystupující v přesném vzorci (1).

Když už autor pokládal za vhodné odvodit na str. 160 přesný vzorec 5 (12) totožný s (1) pro elektrické pole rychlého náboje, měl tím spíše uvést stejně přesný vzorec pro pole magnetické nebo aspoň upozornit na přibližnost vzorce (18). S obdobným odvozením elektrodynamických sil mezi kondukčním proudem a nabitou částicí založeným na kontrakci délek se potkáváme také v druhé moderní americké učebnici FEYNMANOVĚ [3] kap. 13, § 6. Myslím, že studentu musí znít dosti paradoxně tvrzení, že se sice náboj pohybem nemění, ale že kovová tyč protékaná proudem je neutrální, pokud je v klidu; jeví se však nabitou, je-li uvedena do pohybu podél své osy. Nikde se výslovně neuvádí, že úvahy se týkají nekonečně dlouhé tyče, ačkoli výsledek je správný jen v tomto limitním případě, který nelze realizovat.

Také Feynman (rovněž obvyklým postupem) dochází jen k přibližnému Biotovu-Savartovu zákonu (18) pro pomalé náboje, aniž na to upozorní. Je zřejmé, že *postup od magnetického pole nekonečného proudu k elementárnímu Biotovu-Savartovu zákonu* není didakticky nejvhodnější a vyžadoval by podrobnější rozbor.

Domnívám se, že zásadně *nejsprávnější je postup založený na relativistickém vzorci pro transformaci síly*, jehož přesný obecný tvar (rovnice 2.9 (37) v [6] nebo rovnice (11) v [8]) plynoucí z obecné Lorentzovy transformace je ovšem dosti nepřehledný. Složitost je nezávisle na užitém postupu dána prostorovým rozložením sil v elektromagnetickém poli a lze ji odstranit jen omezením obecnosti. Proto jsem v tomto článku zvolil nejjednodušší případ pohybu dvou nábojů naznačený na obr. 1. Počet potřebných základních poznatků z teorie relativity je velmi malý a výpočet je zcela elementární, takže stačí znát pojem okamžité rychlosti a derivaci lineární funkce. Celé odvození, ačkoli platí i pro velmi rychlé částice, zůstává na úrovni výuky na SVVŠ. Pro základní kurs fyziky na vysokých školách by bylo možno stejného postupu užít i při libovolných pohybech nábojů a při tom ještě vycházet z jednoduché Lorentzovy transformace (4), (5). Pole pomalých nábojů se však nejlépe odvodí z transformace obecné (viz. [10]).

Literatura

[1] *Senior Science for High School Students*, Part 1: *Physics*, The University of Sydney, 1966.

[2] PURCELL E. M., *Electricity and Magnetism*, Berkeley Physics Course, Vol. 2, McGraw-Hill, New York, 1965.

[3] FEYNMAN R. P., LEIGHTON R. B., SANDS G., *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 2 *Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley Reading, 1964.

[4] FUKA J., Nová učebnice pro vyšší střední školy v Austrálii, PMFA *13* (1968) 100.

[5] HORÁK Z., Elektromagnetické a gravitační pole. Elektrotechnický obzor *52* (1962) 505.

[6] HORÁK Z., KRUPKA F., *Fyzika*, SNTL, Praha 1966.

[7] PAGE L., A Derivation of the Fundamental Relations of Electrodynamics from those of Electrostatics. Am. J. Sci, *34* (1912) 57.

[8] HORÁK Z., Heaviside Field, Elektrotechn. obzor *57* (1968) 356.

[9] SYNGE J. L., *Relativity: The Special Theory*, 2d Ed., p. 162, North Holland Publ. Comp., Amsterdam 1965.

[10] HORÁK Z., Relativistické pojetí elektromagnetismu ve výuce na vysokých školách, Elektrotechn. obzor *60* (1971) č. 6.

H. FREUDENTHAL:

V reformním hnutí převládá dosud mínění universitních čistých matematiků, kteří jsou imunní proti didaktickým ohledům a ohledům na aplikace, jsou vedeni idejemi o struktuře matematiky a dobře motivovanými principy čistoty metod, tj. idejemi a principy antididaktickými. Připouštím, že pokud jde o didaktiku a aplikace matematiky, nejsem větším expertem než oni, ale zároveň si lichotím, že jsem si alespoň vědom své neznalosti. Dosud jsme slyšeli téměř výhradně hlas čisté universitní matematiky. Je třeba lépe organizovat úsilí těch, kteří znají didaktiku a aplikace matematiky.

A. MARKUŠEVIČ:

Všeobecně se souhlasí s odstraněním těch mezí, kterými je pro školskou matematiku rámec tzv. elementární matematiky. Rozumí se tím taková témata jako je podrobné studium aritmetických metod řešení algebraických úloh (bez zjevného použití rovnic), geometrické konstrukce omezenými prostředky, geometrie trojúhelníka a čtyřstěnu, úpravy výrazů před logaritmováním, logaritmické, exponenciální a goniometrické rovnice, studium průběhu funkce bez použití derivace, výpočty obsahů a objemů bez užití integrálů atd. Jak patrno, jde ve většině případů o řešení problémů bez použití nejpřirozenějších prostředků, které jsou obvykle nejúčinnější. T r a d i č n í m a t e m a t i k u l z e k v a l i f i k o v a t j a k o m a t e m a t i k u, k t e r á j e d o j i s t é m í r y u m ě l e o m e z e n á, plná všelijakých tabu, jež už dávno ztratila svůj význam.