Ivan Netuka; Jiří Veselý

Mezinárodní matematická soutěž ISTAM ´83

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 29 (1984), No. 1, 46--47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139022

vyučování

MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ SOUTĚŽ ISTAM '83

Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha

S dvouletým odstupem se opět vracíme k účasti studentů matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy na bělehradském ISTAMU, tradičně pořádaném svazáky bělehradské matematicko-přírodovědné fakulty při příležitosti Dne studentstva (4.4.). Na bedrech pedagogů této fakulty leží jen odpovědnost za výběr úloh; ve spolupráci s vedoucími družstev zajišťují též opravu řešení a jejich hodnocení. Stejně jako v minulých letech mohl každý účastník získat za úspěšné řešení čtyř zadaných úloh celkem 100 bodů, takže maximální bodový zisk družstva je 300 bodů bez ohledu na to, v jaké kategorii jeho členové soutěží. V první kategorii určené pro studenty prvních dvou ročníků není možnost výběru, každý řeší čtyři zadané úlohy. Ve druhé kategorii si účastníci předem volí dvojici předmětů, ze kterých řeší po dvou úlohách.

K výčtu tradic lze připojit i fakt, že obdobně jako v roce 1982 uniklo vítězství našemu družstvu o jediný bod. Na ISTAMU 82 skončili naši studenti se 159 body druzí za družstvem z Bělehradu, zatímco při ISTAMU 83 stačilo družstvu z Budapešti na první místo 151 bodů. Zisk druhého a čtvrtého místa při účasti 14 družstev znamená mírné zlepšení proti předešlému ročníku (druhé a sedmé místo).

V soutěži jednotlivců získali v roce 1982 J. Tkadlec, P. Pyrih a P. Savický ve druhé kategorii 4., 6. a 8. místo a J. Nekovář se v první kategorii dělil o 4. místo. Vynahradil si to plně v tomto ročníku, kdy s velkou převahou zvítězil ve druhé kategorii. Také 3. místo O. Virdzka v první kategorii je hezkým úspěchem.

Většině soutěžících v první kategorii se nepodařilo zvládnout tuto úlohu:

Označme D množinu všech funkcí f z $C^2(\langle 0, \pi \rangle)$, které nejsou identicky rovny nule a pro něž platí $f(0) = f(\pi) = 0$. Pro $f \in D$ definujeme $L(f) =$

$$= \inf \{f''(x)/f(x);\ x \in (0, \pi), f(x) \neq 0\} .$$

Najděte maximum funkcionálu L na D a všechny funkce, pro něž se tohoto maxima nabývá.

S řešením si velmi vtipně poradil A. Szenes z Budapešti (obsadil se ziskem 53 bodů 1. místo v této kategorii). Uvažoval takto: Nechť $f \in D$ a $f(\alpha) = 0$ pro nějaké $\alpha \in \in (0, \pi)$. Ukážeme, že pak lze najít funkci $f_1 \in D$, $f_1 < 0$ na $(0, \pi)$ tak, že $L(f_1) > > L(f)$. Protože $L(f) = L(-f)$, lze předpokládat existenci čísla $\beta \in (0, \pi)$ takového, že $f(\beta) > 0$. Zřejmě existují body y_1, y_2 tak, že $0 \leqq y_1 < \beta < y_2 \leqq \pi$, $f(y_1) = f(y_2) = 0$ a $f > 0$ na (y_1, y_2). Protože $f(\alpha) = 0$, není zároveň $y_1 = 0$ a $y_2 = \pi$. Je-li tedy $\lambda = (y_2 - y_1)/\pi$, je $\lambda < 1$. Kdyby $f'' \geqq 0$ na (y_1, y_2), byla by funkce f na intervalu (y_1, y_2) konvexní, a tedy nekladná, což není možné. Proto platí $L(f) < 0$. Položme $\varphi(x) = y_1 + \lambda x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$. Pak $\varphi(\langle 0, \pi \rangle) = \langle y_1, y_2 \rangle$ a pro funkci $f_1 = f . \varphi$ zřejmě platí $f_1 \in D$. Dále je $f_1 > 0$ na $(0, \pi)$ a $f_1'' = \lambda^2(f'' \circ \varphi)$. Odtud plyne, že $L(f_1) \geqq \lambda^2 L(f) > L(f)$.

Předpokládejme nyní, že $f \in D$ a $L(f) > > -1$. Pak existuje $f_1 \in D$ tak, že $f_1 > 0$ na $(0, \pi)$ a $L(f_1) > -1$. Tedy $f_1'' + f_1 > 0$ na $(0, \pi)$, takže $\int_0^\pi (f_1'' + f_1) \sin > 0$. Integrací per-partes však dostáváme, že integrál je roven nule. Proto $L(f) \leqq -1$ pro všechna $f \in D$.

Je-li $k \neq 0$, $f = k\ .\ \sin$, pak $f \in D$ a $L(f) = -1$.

Nechť $f \in D$ a $L(f) = -1$. Podle první části důkazu je buďto $f > 0$ na $(0, \pi)$, nebo $f < 0$ na $(0, \pi)$, a tedy $f'' + f = 0$ na $(0, \pi)$. Dokončeme důkaz bez odkazů na poznatky o řešení diferenciálních rovnic. Definujme dále $\varphi(x) = f'(x) \sin x - f(x) \cos x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$. Pak $\varphi(0) = \varphi(\pi)$ a $\varphi'(x) = (f''(x) + f(x)). \sin x = 0$ pro každé $x \in (0, \pi)$. Odtud však snadno plyne, že $\varphi(x) = 0$, kdykoli $x \in \langle 0, \pi \rangle$. Platí $(f/\sin)' = \varphi/\sin^2$ na $(0, \pi)$, takže $f = k \sin$ a zřejmě $k \neq 0$.

Tedy funkcionál L nabývá na D maximální hodnoty -1, a to právě pro funkce, které jsou nenulovým násobkem funkce sinus.

Jednu z úloh lineární algebry řešených účastníky první kategorie lze též řešit metodami analýzy probíranými v prvním dvouletí – v diskusi při opravování jsme se dozvěděli tento pěkný obrat, který se mezi řešeními účastníků neobjevil:

Nechť A je matice typu (m, n) s reálnými prvky a b je reálný vektor typu $(m, 1)$. Potom existuje řešení soustavy $A^T A x = A^T b$, kde A^T je transponovaná matice k matici A. (V soutěži bylo ještě třeba rozhodnout o platnosti tohoto tvrzení v případě, že prvky matice A a složky vektoru b jsou čísla komplexní.)

V podprostoru $A(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ existuje nejbližší bod k bodu b. Odtud plyne existence bodu $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ve kterém funkce $\varphi(x) = \|Ax - b\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, nabývá svého minima; v tomto bodě se anulují všechny derivace $\partial\varphi/\partial x_k$, $k = 1, \ldots, n$. Jednoduchý výpočet ukazuje, že tato podmínka je ekvivalentní rovnosti $A^T A x_0 = A^T b$.

Abychom čtenáři přiblížili alespoň částečně obtížnost úloh ve druhé kategorii, vybíráme po jedné úloze z každého předmětu (jde vesměs o úlohy z letošního ročníku).

Reálná analýza:

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná zdola omezená funkce. Dokažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje bod $x \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\|f'(x)\| < \varepsilon$.

Komplexní analýza:

Nechť $f(z) = \sum a_n z^n$, $a_n \geqq 0$ a nechť poloměr konvergence této řady je roven 1. Dokažte, že funkce f má singularitu v bodě $z = 1$.

Algebra:

Abelova grupa $(A, +)$ se nazývá dělitelná, má-li rovnice $nx = a$ řešení v A pro všechna $a \in A$ a všechna kladná celá čísla n. Je-li S systém rovnic nad dělitelnou Abelovou grupou A, pak S má řešení, právě když má řešení v A každý konečný podsystém systému S. Dokažte.

Funkcionální analýza:

Nechť X je úplně regulární Hausdorffův prostor a nechť $C(X)$ je prostor všech spojitých reálných funkcí na X s topologií stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách X. Dokažte, že je-li F nenulový spojitý lineární funkcionál na $C(X)$, pak existuje nejmenší kompaktní množina $K \subset X$ tak, že $F(f) = 0$ pro každou $f \in C(X)$, pro kterou $f(K) = \{0\}$.

Topologie:

Nechť S je spirála $\{(\cos t;\ \sin t;\ t^{-1});\ t > 0\}$. Rozhodněte, zda lze v prostoru $\mathbb{R}^3 \setminus S$ kontrahovat do konstanty kružnici $\{(0, 1 + \cos t, 1 + \sin t);\ t \in \langle -\pi, \pi \rangle\}$.

Programování:

Napište program pro hraní hry MASTERMIND. Uvažujte oba případy: člověk versus počítač a počítač versus člověk. Utajené číslo, které je třeba v průběhu hry určit, je zapsáno pomocí čtyř různých cifer.