Ján Černý

Ako minimalizovať nepravidelnosť?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 30 (1985), No. 3, 145--150

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138976

Ako minimalizovať nepravidelnosť?

Ján Černý, Žilina

Niekedy sa tomu hovorí nepravidelnosť, inokedy nespravodlivosť alebo nerovnomernosť. Zvyčajne vlastnosť nepríjemná, ktorú sa snažíme odstrániť, a ak sa nedá, tak aspoň minimalizovať.

S takýmito problémami sa veľmi často stretávame v doprave a cieľom tohto príspevku je ukázať čitateľom PMFA niektoré zaujímavosti z týchto stretnutí. Začneme príkladmi.

Príklad 1.

Majme v kameňolome pripravených 6 kusov kameňa o hmotnosti 15, 10, 10, 7, 7 a 6 ton a ďalej 3 automobily s návesmi o nosnosti 25 ton, ktoré ich prepravia na miesto určenia. Úlohou je rozdeliť tieto kamene na autá.

Pokiaľ neurčíme žiadnu ďalšiu požiadavku okrem neprekročenia nosnosti, môže príslušný dispečer určiť autám tento náklad: 25 t $(= 15 + 10)$, 24 t $(= 10 + 7 + 7)$ a 6 t. V prípade, keby sme navyše ako kritérium zvolili čo najkratší čas prepravy, bolo by treba dosiahnuť, aby maximálny náklad bol čo najmenší, čomu vyhovuje riešenie 20 t $(7 + 7 + 6)$, 20 t $(10 + 10)$ a 15 t. Ak by kritériom bol minimálny rozdiel zárobku vodičov, ktorý závisí od hmotnosti nákladu, zvolilo by sa riešenie 21 t $(15 + 6)$, 17 t $(10 + 7)$ a 17 t $(10 + 7)$.

Ak by sme mali k dispozícii návesy s nosnosťou 30 t, stačili by dva a optimálne riešenie pri obidvoch spomínaných kritériách by bolo 28 t $(15 + 7 + 6)$ a 27 t $(10 + 10 + 7)$.

Príklad 2.

Majme v niektorom meste 2 autá určené na zvoz odpadkov a predpokladajme, že na každý deň od pondelka do soboty máme pre ne 2 uzavreté okružné trasy, ktoré prinesú vodičom zárobky uvedené v Kčs v nasledujúcej matici

$$\begin{Vmatrix} 155 & 115 & 130 & 94 & 140 & 82 \\ 140 & 105 & 123 & 88 & 130 & 75 \end{Vmatrix}$$

Keby sme prvému vodičovi pridelili vždy úlohu z prvého riadku a druhému z druhého, zarobil by prvý za týždeň 716 Kčs a druhý 671 Kčs (teda o 55 Kčs menej ako prvý, čo by ho asi netešilo). Úlohou je určiť každému vodičovi na každý deň taký okruh, aby rozdiel týždenných zárobkov vodičov bol minimálny. Inými slovami treba permutovať prvky v každom stĺpci matice tak, aby riadkové súčty mali minimálny rozdiel. Napíšme si pre každý stĺpec rozdiel medzi väčším a menším prvkom:

$$15,\ 10,\ 7,\ 6,\ 10,\ 7$$

a rozdeľme ju na dve časti s najmenším rozdielom súčtov. Keďže ide o čísla zhodné s príkladom 1, vieme, že v prvej skupine má byť 15, 7, 6 a v druhej 10, 10, 7. V stĺpoch, kde sú čísla druhej skupiny, vymeňme poradie prvkov (je to 2., 5. a napr. 6. stĺpec), čím dospejeme k matici

$$\begin{Vmatrix} 155 & 105 & 130 & 94 & 130 & 75 \\ 140 & 115 & 123 & 88 & 140 & 82 \end{Vmatrix}$$

s riadkovými súčtami 689 a 688, s čím budú vodiči isto spokojní.

Príklad 3.

Predstavme si sieť električkových liniek v Bratislave (predpokladáme, že ju čitatelia poznajú; kto ju nepozná, môže si predstaviť podobný problém na sieti iného mesta). Úlohou je pri danom počte súprav na každej linke a daných minimálnych obežných časoch určiť odchody jednotlivých spojov tak, aby boli minimálne časové straty cestujúcich.

Je známe, že pokiaľ súprava odvezie všetkých čakajúcich cestujúcich, je stredná časová strata jedného z nich pri čakaní na spoj MHD úmerná štvorcu intervalu medzi po sebe nasledujúcimi spojmi (použiteľnými pre cestujúceho, samozrejme). Ďalej je známe, že ak dané kladné číslo a rozdelíme na n sčítancov $x_1, \ldots, x_n$, t.j. $x_1 + \ldots + x_n = a$, pak súčet $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ nadobúda minimálnu hodnotu pri voľbe $x_1 = \ldots = x_n = a/n$ čiže „najpravidelnejšie" intervaly sú najvýhodnejšie.

Uvažujme teraz o linke č. 1 zo Záluh na hlavnú stanicu, ktorej minimálny čas obehu je 75 min a na ktorú je pridelených 6 súprav. Z pohľadu cestujúcich, ktorí majú vyhranený záujem o použitie práve tejto linky, by bolo teda ideálne, keby všetky intervaly boli 10,5 min. Ak by odchody spojov MHD museli byť v celých minútach, dá sa ukázať, že minimálny súčet druhých mocnín dostaneme pri striedaní 10 a 11minútových intervalov.

Podobnú úvahu by sme mohli zopakovať pre linku 4 s obežným časom 93 min. a 11 súpravami, kde by sa striedali 8 a 9minútové intervaly, linku 5 s 12 súpravami na 105 min. a striedaním 8 a 9 a napokon pre linku 9 (11 súprav 95 min., striedanie 8 a 9).

Ak by sme postupovali týmto spôsobom, minimalizovali by sme časové straty cestujúcich, ktorí majú vyhranený záujem o cestovanie jednou konkrétnou linkou zpomedzi 1, 4, 5, 9. Na druhej strane by sme však nebrali do úvahy veľmi významnú skupinu cestujúcich, ktorí cestujú iba z Karlovej Vsi do centra mesta a môžu použiť ktorúkoľvek z týchto liniek; stredná časová strata jedného z nich bude závislá od súčtu štvorcov intervalov medzi spojmi na spoločnom úseku bez ohľadu na číslo linky, a teda by sa mohlo stať, že najpravidelnejšie intervaly na individuálnych linkách by mohli spôsobiť veľkú nepravidelnosť na spoločnom úseku.

Podobná situácia môže nastať aj vtedy, keď použijeme inú než kvadratickú mieru nepravidelnosti, napríklad „minimaxového" typu, ktorú sme v príklade 1 uvádzali ako druhú.

Miery nepravidelnosti

Mieru nepravidelnosti (nerovnakosti) $f(z_1, \dots, z_m)$ budeme definovať pre ľubovoľné prirodzené číslo $m \geqq 2$ a ľubovoľné reálne $z_1 \geqq 0, \dots, z_m \geqq 0$, pričom budeme používať označenie $\bar{z} = (z_1 + \dots + z_m)/m$.

Funkcia f by mala mať tieto samozrejmé vlastnosti:

I. $f(z_1, \dots, z_m) \geqq 0$ na E_m, pričom rovnosť platí len pre $z_1 = \dots = z_m = \bar{z}$.

II. f je symetrická na E_m.

III. f je invariantná na posunutie na E_m, to značí, že $f(z_1 + t, \dots, z_m + t) = f(z_1, \dots, z_m)$ pre všetky $(z_1, \dots, z_m) \in E_m$, $t \in E_1$.

IV. Ak $Z = (z_1, \dots, z_m) \in E_m$, pričom $z_1 \leqq \bar{z}$, $z_1 \leqq z_2$ a ak pre nejaké $\varepsilon > 0$ máme $z'_1, = z_1 - \varepsilon$, $z'_2 = z_2 + \varepsilon$, pak $f(z_1, z_2, \dots, z_m) \leqq f(z'_1, z'_2, z_3, \dots, z_m)$.

Pre $m = 2$ sa dá ľahko dokázať, že ak f spĺňa podmienky I–IV, pak existuje neklesajúca funkcia g, nadobúdajúca hodnotu 0 len v bode 0, pre ktorú platí $f(z_1, z_2) = g(|z_2 - z_1|)$ pre všetky $z_1 \geqq 0$, $z_2 \geqq 0$.

Vďaka tejto skutočnosti nemá zmysel uvažovať o inej miere nepravidelnosti na E_2 ako $f(z_1 z_2) = |z_2 - z_1|$.

Ďalej sa dá dokázať, že ak f spĺňa I–III a je konvexná, pak spĺňa aj IV.

Najčastejšie používané miery nepravidelnosti sú tieto:

$$f_1(z_1, \dots, z_m) = \sum_{i=1}^{m} (z_i - \bar{z})^2 \,, \quad f_2(z_1, \dots, z_m) = \max_{i=1,\dots,m} z_i - \bar{z} \,,$$

$$f_3(z_1, \dots, z_m) = \bar{z} - \min_{i=1,\dots,m} z_i \,.$$

Úloha o kope kamenia

Úlohu z príkladu 1 môžeme ([1]) všeobecne formulovať takto:

Nech n a m sú prirodzené čísla, $m < n$, nech $A = (a_1, \dots, a_n) \in E_n$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ a nech f je daná miera nepravidelnosti na E_m. Treba nájsť taký rozklad $\{I_1, \dots, I_m\}$ množiny (indexov) I na m dizjunktných častí, aby bola minimálnou hodnota

$$z = f(z_1, \dots, z_m) \,,$$

kde

$$z_i = \sum_{j \in I_i} a_j \,.$$

Na riešenie tejto úlohy pre $m = 2$ existuje efektívny algoritmus zložitosti $0(n^2)$, pre $m > 2$ sa zvyčajne používajú heuristické metódy.

Úloha o rovnomernom pláne

Úlohu z príkladu 2 opísal ako prvý Š. Peško pri optimalizácii zvozu smetí r. 1980. V súlade s [2] ju môžeme vo všeobecnosti formulovať takto:

Nech je daná matica reálnych čísel rozmeru $n \times m$

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nm} \end{Vmatrix}$$

Je treba usporiadať každý zo stĺpcov matice C tak, aby sa riadkové súčty d_i prvkov matice, ktorú takýmto usporiadaním dostaneme, čo najmenej vzájomne líšili, tzn. aby $f(d_1, \dots, d_m)$ bolo minimálne pre danú mieru nepravidelnosti f.

Pre exaktné riešenie takejto úlohy vo všeobecnosti nie je známy doposiaľ žiadny efektívny algoritmus. Preberať všetky možnosti, ktorých je $(n!)^{m-1}$ je možné len pri malých rozmeroch matice C. V dvoch špeciálnych prípadoch rozmeru matice C však existuje efektívna metóda, ako nájsť optimálne riešenie. Jedným z týchto prípadov je matica rozmeru $n \times 2$. Ukazuje sa, že v takomto prípade je možno nájsť optimálne riešenie, ktoré minimalizuje ľubovoľnú mieru nepravidelnosti f.

Spomínané riešenie dostaneme, ak prvý stĺpec matice C usporiadame vzostupne a druhý zostupne (poznamenávame, že dôkaz tejto temer zrejmej skutočnosti je netriviálny - K. Vašek, [2]).

Ďalším pomerne ľahko riešiteľným prípadom je $2 \times n$ (- J. Černý, [2]).

Uvažujme o matici

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11}, \dots, c_{1m} \\ c_{21}, \dots, c_{2m} \end{Vmatrix}$$

ku ktorej priradíme vektor

$$A = (a_1, \dots, a_m) = (|c_{11} - c_{21}|, \dots, |c_{1m} - c_{2m}|) .$$

Jediné permutácie, ktoré pripadajú do úvahy v stĺpcoch matice C, sú výmeny horného a dolného prvku navzájom.

Keďže vektor riadkových súčtov $D = (d_1, d_2)$ má len dve zložky, nemá význam uvažovať o inej kriteriálnej funkcii ako $|d_1 - d_2|$.

Dá sa dokázať, že matica C', ktorá vznikne z C výmenami prvkov v stĺpcoch, je riešením úlohy $2 \times m$ práve vtedy, keď $\{I_1, I_2\}$, kde

$$I_1 = \{i \in I = \{1, \dots, m\} \, | c'_{1i} > c'_{2i}\} \, , \quad I_2 = I - I_1$$

je riešením úlohy o kope kamenia danej vektorom A (pričom $n = m$, $m = 2$).

Pre matice typu $n \times m$, $n \ll m$ existujú heuristické metódy riešenia úlohy o rovnomernom pláne, založené na opakovanom použití riešenia úlohy $2 \times m$. Podobne sa na prípad $n \gg m$ využíva heuristika založená na riešení úlohy $n \times 2$ (K. Vašek, Š. Peško, [2]).

Popri tom možno uviesť, že prípady matíc, ktoré majú $m \leqq 5$, $n \leqq 20$ sa používa globálna (nie heuristická) metóda obmedzeného prehľadávania, ktorá takúto úlohu zvládne na bežných počítačoch v únosnom čase. (A. Baraňáková, [2]).

Poznamenávame že touto problematikou sa nezávisle zaoberajú aj M. Tegze a M. Vlach ([5]).

Úloha o pravidelnej koordinácii liniek MHD

Táto úloha sa zvyčajne ([4]) formuluje pre takéto východiskové údaje

L – množina liniek (pritom okružné trate sa berú 1 raz a ostatné 2 razy, každý smer z jednej na druhú konečnú osve),

T – časové obdobie, v ktorom na všetkých linkách z L je nemenný počet pridelených vozidiel a vyžaduje sa približne konštantná ponuka prepravnej kapacity (napr. 4.30 – 8.30 ranná špička, 8.30 – 13.30 dopoludňajšie sedlo a pod.),

f – miera nepravidelnosti (zvyčajne f_1 alebo f_2),

$t_{ij} \in T$ – odchody spojov linky i z konečnej, (v rastúcej postupnosti), $j = 1, \ldots, m_i$,

$K_h \subset L$ – koordinované skupiny liniek (t.j. skupiny liniek, ktoré uspokojujú ten istý prúd cestujúcich), $h = 1, \ldots, p$,

d_{ih} – cestovný čas vozidiel i-tej linky ($i \in K_h$) konečnej na začiatok h-ho koordinovaného úseku,

q_h – intenzita prúdu cestujúcich používajúcich linky K_h.

Popri tom si ešte označíme

$S_h = (s_{h1}, \ldots, s_{hr_h})$ – vektor čísel $t_{ij} + d_{ih}$, $(i \in K_h, j = 1, \ldots, m_i)$ usporiadaný vzostupne.

$$f(S_h) = f(s_2 - s_1, \ldots, s_{r_h} - s_{r_h - 1}),$$

$$J = \{(i, j) \mid s_{h1} \neq t_{ij} + d_{ih} \neq s_{hr_h}, \quad h = 1, \ldots, p, i \in K_h, j = 1, \ldots, m_i\}.$$

Úlohou je pre všetky $i, j \in J$ nájsť také časové posunutia x_{ij} hodnôt t_{ij} (t.zn. v úlohe t_{ij} vezmeme $t_{ij} + x_{ij}$), aby suma

$$\sum_{h=1,\ldots,p} q_h f(S_h)$$

nadobudla minimálnu hodnotu.

Poznamenávame, že množina J, vyjadrujúca tie t_{ij}, ktoré možno posunovať, neobsahuje prvé a posledné odchody z S_h spojov liniek z jednotlivých koordinovaných skupín K_h, ktoré musia zostať pevné.

Na riešenie tejto úlohy pre mieru f_1 vypracovala A. Baraňáková z VÚD v Žiline suboptimálnu metódu KOS ([3]), ktorá využíva konvexnosti funkcie f_2 postupnými prechodmi od jedného bodu množiny riešení k susednému s nižšou hodnotou účelovej funkcie.

Metóda KOS sa začína pomaly presadzovať aj v praxi, napríklad nové cestovné poriadky MHD v Trenčíne, vypočítané touto metódou, ušetria cestujúcim niektorých koordinovaných skupín v niektorých obdobiach až 20% časových strát.

Literatúra

[1] ROMANOVSKIJ, I. V.: *Algoritmy rešenija ekstremaľnych zadač.* Nauka, Moskva 1977.

[2] ČERNÝ, J.; VAŠEK, K.; PEŠKO, Š.; BARAŇÁKOVÁ, A.: *Optimalizácia dopravných rozvrhov.* Výsk. správa k úlohe III—8—6/09, časť 3, str. 31—97, Žilina marec 1983.

[3] Baraňáková, A.: *Metóda KOS a možnosti jej využitia v ASR MHD.* Zborník VÚD, Žilina — v tlači.
[4] Černý, J.: *Matematické metódy koordinácie spojov na peážnom úseku.* Zborník VÚD, Žilina — v tlači.
[5] Tegze M., Vlach M.: *The matrix permutation problem.* Techn. U. Graz, Bericht 84 - 54, 1984.

Řešení geometrických úloh při návrhu, vývoji a výrobě letounu

Dušan Slavětínský, Kunovice

1. Použití geometrie při vývoji a výrobě letounu

Práce s geometrií hraje při vývoji a výrobě letounu velmi významnou roli. Většina součástí a dílců, z nichž je tvar letounu sestaven, nemá totiž tvar odvozený jen ze základních geometrických těles. Jejich značně složitější uspořádání je závislé na vnějším tvaru letounu, který na rozdíl od většiny jiných strojírenských výrobků není podřízen jen hlediskům estetickým a výrobním, ale má v první řadě význam funkční. Pro vytvoření představy o geometrické náročnosti konstrukce draku uvedu např. problém závěsů odklápěcího krytu na části povrchu o dvojím zakřivení. Kryt je zavěšen ve dvou nebo více závěsech. Osu otáčení krytu je nutno vyšetřit tak, aby při jeho pohybu nedocházelo ke kolizi nepřímkových okrajů krytu s okraji otvoru a aby konstrukce závěsů byla ukryta pod povrchem, uvnitř draku. Osa má v prostoru zcela obecnou polohu, není rovnoběžná ani kolmá na žádnou ze vztažných rovin charakteristických pro danou část draku. Základny, jimiž je závěs upevněn k potahu, mohou mít buď přímo tvar odpovídající tvaru povrchu, nebo jsou-li dostatečně malé, může být tento tvar nahrazen rovinou tečnou k povrchu v bodě teoretického upevnění závěsu. Je zřejmé, že vyšetření tvaru závěsu, jeho nakreslení a zakótování i samotná jeho výroba jsou operace vysoce náročné z hlediska práce s geometrií.

Tradiční způsob zpracování geometrie při vývoji a výrobě letounu se nazývá plazměrková metoda. Spočívá v přesném narýsování zadané části letounu v tolika pohledech a řezech, kolik je nutných k jednoznačnému určení tvaru. Kresba se provádí ve skutečné velikosti, obvykle rytím do plechu. Nazývá se plaz. Prvotní výkresový podklad, který popisuje z hlediska geometrie příslušnou část letounu, je tzv. teoretický výkres. Tento výkres a plaz vznikají současně za vzájemné interakce. Z nakreslených plazů se pak snímají různé druhy plechových šablon, které jsou nedílnou součástí výkresové doku-

---

Předneseno na třetím semináři odborné skupiny pro deskriptivní geometrii, počítačovou geometrii a technické kreslení při MPS JČSMF, konaném ve dnech 8.—10. června 1983 v Luhačovicích.
Otištěno se souhlasem vedení n. p. LET Uh. Hradiště-Kunovice.