Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Otakar Zich

Bertrand Russell (K stému výročí narození)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 4, 177--180

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138946

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XVII — ČÍSLO 4

BERTRAND RUSSELL

(K stému výročí narození)

OTAKAR ZICH, Praha

Jan Neruda napsal v jedné své literární recenzi, že bývá obyčej rozdělovat básníky na tři druhy: „na ty, kteří prorocky letí před dobou svou, na jiné, kteří jsou básníky čistě časovými, a konečně na ty, kteří s poetickým pinklíčkem svým přicházejí do nádraží vždy tenkrát, když jejich století bylo právě teď z něho odjelo." Zdá se, že bez velkého násilí bychom mohli tuto duchaplnou klasifikaci přenést i na vědce. V tom případě by nebylo pochyby o tom, že lord Bertrand Artur William Russell, potomek staré britské šlechty, narozený 18. května 1872, by patřil do první skupiny. Zcela jistě pro trvalost svých vědeckých výsledků a podněty, které dal vývoji vědy nejen dodnes, ale na dlouhou dobu po nás. Zemřel teprve 2. února 1970 a letos již vzpomínáme s celým světem stého výročí narozenin myslitele, který se stal již za svého života legendou a v němž se nejednou, podobně jako v Albertu Schweitzerovi, soustředilo „svědomí světa". V nejširších vrstvách čtenářů všech světadílů se stal známý svými spisy zasahujícími do mnoha oborů, ekonomie, etiky, filosofie, sociologie, politiky i historie, kde všude vynikla jeho nesmírná erudice a brilantní umělecký sloh velkého spisovatele. Avšak ať již Russellův mnohostranný a hluboký vliv byl a bude jakkoli hodnocen, je zcela určitě oblast, kde jeho vliv a výsledky mají trvalou povahu. To je oblast matematiky a Russell bude vždy počítán k největším matematickým myslitelům všech dob.

Druhá polovina 19. století zejména dílem WEIERSTRASSOVÝM eliminovala tehdy záhadné „nekonečně malé" veličiny matematické analýzy; tyto klasické matematické obory bylo možno korektním užíváním limit aritmetizovat. Avšak problém bezesporného založení analýzy byl tím jen posunut. Její bezespornost měla být opřena o bezsporné operace s přirozenými čísly, množinami a množinami množin těchto čísel. Ve zkoumání složitých problémů s tím spojených se vyznamenal zejména italský matematik GIUSEPPE PEANO a německý matematik GOTTLOB FREGE. Kdežto Peanova práce byla zaměřena na pojmový rozbor složitých matematických objektů a operací, zkoumal Frege základy aritmetiky v širších souvislostech logického systému. Oba tito myslitelé ovlivnili Russella rozhodující měrou. Russel již v mládí slučoval do jisté míry obě uvedená hlediska, avšak teprve osobní styk s Peanem roku 1900 mu dal osudový impuls. Peano imponoval pařížskému filosofickému kongresu neselhávající argumentací, opřenou zřejmě o symbolický jazyk, který budoval se svou školou ([6], 200). Význam tohoto jazyka Russell ihned pochopil. Na druhé straně našel v systému Fregeho možnost, vyvodit spor vázaný na třídu jistým způsobem definovanou. S odvoláním na princip vyloučené třetí možnosti můžeme tvrdit, že každá třída patří buď do třídy těch, jež sebe samy obsahují jako prvek, nebo těch, jež sebe samy neobsahují jako prvek. „Utvořme nyní souhrn těch tříd, jež se neobsahují jako prvek. To je třída: je svým vlastním prvkem či ne? Jestliže ano, pak je jednou ze tříd, jež se neobsahují jako prvek, tj. není prvkem sebe sama. Ne-li, není jednou ze tříd, jež se neobsahují jako prvek, tj. jest prvkem sebe sama. Tedy ze dvou hypotéz – že je a že není prvkem sebe sama – každá implikuje svoji negaci. To je kontradikce.“ ([8], 136)*) Lze dokázat Russellovými modifikacemi této antinomie, že spor není závislý na předpokladu, třeba skrytém, že uvažovaná třída je nekonečná (antinomie katalogu katalogů – viz [1], 84). Uvedená *antinomie*, nesoucí *Russellovo jméno*, byla spolu s několika jinými mohutným podnětem ke zkoumání základů teorie množin. Počátkem století se již vědělo, že tato teorie je základem, na němž je možno vybudovat jistě alespoň celou klasickou analýzu. A nyní tento hrozivý spor. K jeho odstranění byly nastoupeny dvě cesty. První z nich je navždy spojena s jménem ZERMELOVÝM, který axiomatizoval nauku o množinách tak, že vyloučil všechny do té doby známé antinomie. Bylo však také možno jít k logické teorii, jež by jaksi přirozeně nedopustila konstrukce takových množinových antinomií. Tuto cestu nastoupil Russell svou *teorií typů*. Velmi zjednodušeně lze její základní myšlenku přiblížit poukazem na to, že jsou vlastnosti, jež má nějaký soubor individuí, avšak kterou nemá žádné z individuí souboru. Právě tak můžeme uvažovat o vlastnostech vlastností, jež žádná z uvažovaných vlastností nemá (má ji jen jejich souhrn) atd. Vlastnostem, zjednodušeně řečeno, odpovídají třídy. Ty lze tedy hierarchizovat. Složitější úvahou bychom si zjednali představu o tom, jak jsou v této koncepci zabudovány relace. Třída je jedním ze základních logických a matematických pojmů. Avšak právě ničím neohraničené utváření tříd vedlo k antinomiím. Třída tedy nemůže, jak říká Russell, být souborem, shlukem či množstvím nějakých prvků. V jeho koncepci jsou třídy fikcemi, zdánlivými objekty, zavedenými do logického kalkulu tak, že jejich symboly je možno zásadně eliminovat a zůstat v predikátové logice. Avšak cesta k tomuto pojetí třídy a k obdobnému pojetí relace nebyla jednoduchá. Setkáme se tu s další originální koncepcí Russellovou, totiž s *teorií deskripce* ([9], 46 a násl., 95 a násl., [7], 37 a násl.). Russell si všiml, že nejen v matematických oborech, ale i v obyčejném životě se velmi často potkáme s vymezením předmětu obraty jako „*nějaké* takové a takové ...“ či „*to* takové a takové ...“. Jinými slovy, něco o tom předmětu (určitém, neurčitém) víme, ale nevíme ani, zda ono „nějaké“ či „to“ existuje. Jde o nesnadnou věc, jak totiž zacházet ve vědeckém kontextu s takovýmto popisem a jaké má vlastnosti. V matematic-

*) Antinomie je tu podána bez potřebné přesnosti, jež by si vyžádala zavedení příslušného aparátu matematické logiky. Z prací uvedených v bibliografii tohoto článku je věc projednána přesně např. v [2], [3], [5].

kých oborech je právě velice častý případ, kdy „nějaké takové a takové ..." je popsáno souborem podmínek, jimž má vyhovovat. Popis může nahradit jméno objektu, jestliže objekt existuje a je jediný – to je výsledek Russellova rozboru. Myšlenku popisu rozvinul i v řadě dalších základních pojmů. Označíme-li symbolicky R'y to x, jež má k y vztah R, máme určení příbuzné k uvedenému popisu. R'y je funkcí y, je to tzv. popisová funkce, požadujeme-li aby příslušné x existovalo a bylo jediné, a Russell ukázal, že všechny „obyčejné" matematické funkce (např. sinus) spadají pod uvedený vzor. Třídy a relace lze tedy vymezit metodou opírající se o hluboký rozbor popisu, a takto zavedeny do matematické logiky spolu s požadavkem typových odlišností dovolují vybudovat uvnitř tohoto systému teorii množin. Bývaly doby, kdy Russellův logický přístup k vybudování teorie množin a Zermelův axiomatický byly pokládány za značně různé. Avšak vývoj velice složitých podnětů, které obě zdánlivě protikladné teorie daly, vedl k poznání, že spolu souhlasí ([3], 212). Je ovšem pravda, že typové odlišení nemusí být respektováno v jazyku teorie množin, který vytvořil v návaznosti na Zermela FRAENKEL, nebo v jazycích studovaných QUINEM. Jazyky tohoto typu mají výhodu, že vedou k jediné aritmetice, kdežto Russellova-Whiteheadova teorie typů vede k spočetně nekonečné množině aritmetik, typově odlišných, avšak zcela obdobných. Tato obtíž se dá odstranit ([2], 112 a násl.). Avšak jazyky bez typového rozlišování připouštějí zase jako smysluplné věty i takovéto výrazy: „prvočíslo 5 je modré" nebo „5% všech prvočísel umírá během tří let od narození buď na tyfus, nebo na druhou odmocninu z demokratického státního zřízení" ([2], 83). Respektuje-li se teorie typů, nemají takovéto věty smysl. Teorií typů vyřadil Russell nejen tzv. syntaktické antinomie (jako je jeho vlastní), nýbrž z tehdy známých i sémantické antinomie, Lháře (antickou), BERRYHO a RICHARDOVU ([9], 86 a násl.). V souvislosti s uvedenými metodologickými zásadami uvedeme ještě zmínku o další významné Rusellově koncepci, týkající se tzv. *nepredikativní tvorby pojmů*. Bez potřebného aparátu snad věc přiblíží jedna z formulací, jimiž Russell nepredikativní tvorbu pojmů charakterisuje. „Předpokládejme, že nějaký rod tvoří skupinu. Kdyby tato skupina obsahovala členy definovatelné pouze pomocí oné skupiny, pak členové tohoto rodu by netvořili žádnou skupinu". Existují ještě další Russellovy formulace, jež by se měly vztahovat k témuž, avšak mají jinou povahu ([3], 213 a násl.). Problémy spojené s nepredikativní tvorbou pojmů jsou stále živé v matematice; uvedeny do vědy POINCARÉM a Russellem poskytují pozoruhodné pohledy na soudobé koncepce matematiky. Pro přijetí zásady obdobné Russellovu požadavku hovoří víc momentů. Přijmeme-li takovou zásadu, vyřadíme sémantické antinomie (v klasifikaci TARSKÉHO), o nichž jsme hovořili v souvislosti s teorií typů. Ale také konstruktivistická matematika ráda přijme takovou zásadu, neboť objekty zavedené nepredikativně nejsou konstruktivistům přijatelné ([3], 215–217). Že věci nejsou jednoduché, ukazuje už triviální fakt, že minimum či maximum reálné funkce je určeno celou množinou hodnot, jichž funkce nabývá, a není nesnadno vidět, že nezachováme-li náležitou opatrnost, budeme takový extrém vymezovat nepredikativně.

Je dobře známo, že Russell spolu se znamenitým britským matematikem A. N. WHITEHEADEM napsal ještě před první světovou válkou epochální dílo matematické literatury, *Principia Mathematica*, jejichž poslední vydání nedávno vyšlo. Toto dílo vykonalo obrovský vliv na celý vývoj matematiky od roku 1910 (kdy vyšel první díl). Tento vliv již nebude nikdy možno pominout. Řeší se v něm a diskutují závažné problémy metodologické, do nichž jsme právě trochu nahlédli. A v tomto díle je poprvé v dějinách matematiky a logiky vypracován systém dostatečně rozsáhlý, aby pojal klasickou matematiku, a tedy také neelementární aritmetiku. Právě systém *Principií* to byl, který umožnil Gödlovo slavné zkoumání, jímž dokázal, že v takovém syntaktickém systému nejsou dokazatelné všechny věty logicky pravdivé ([4]). Práce na *Principiích* Rusella velice vyčerpávala. Počítá sám, že denně strávil nad prací deset až dvanáct hodin, ročně asi osm měsíců od r. 1907 do r. 1910. Jak počet stránek vzrůstal, dostavila se u Russella obava z požáru, který by mohl zničit rukopis. Rozsah rukopisu byl tak ohromný, že rukopis musil být přivezen do nakladatelství cambridgeské university na starém vozíku. Přes finanční účast university a Královské společnosti musili autoři doplatit nakladatelství 100 liber ([6], 211).

Russell byl v roce 1900 uchvácen Peanovou virtuozitou při řešení sporů a v debatách. Viděli jsme, že toto umění přičítal Peanově znalosti matematické logiky. Lze právem říci, že takové virtuozity dosáhl i Russell sám. Byl vynikajícím, vtipným a pronikavým debatérem. Z historek, jež se o něm v tomto směru vypravují, vybíráme jednu. Na nějakém kongresu uslyšel jeden z jeho účastníků o tvrzení, že z nepravdivého výroku je možno vyvodit jakýkoli jiný, a prosil přítomného Russella, aby mu z výroku $2 + 2 = 5$ vyvodil důsledek, že Russell sám je papežem. Russell odpovídá: „Odečteme od každé strany této rovnosti 3; dostaneme $1 = 2$. Jestli vy tvrdíte, že já nejsem papežem, pak papež a já jsme dvěma osobami. Avšak (vzhledem k $2 = 1$) papež a já jsme jednou osobou.“ ([5], 25).

Literatura

[1] M. BOLL et J. REINHARDT, *Histoire de la Logique*, *Que sais-je*, Paris 1965

[2] R. CARNAP, *Einführung in die symbol. Logik*, *Springer*, Wien - New York 1968

[3] A. FRAENKEL, B. BAR-HILLEL, *Osnovanija teorii množestv* (překlad do ruštiny), „Mir“, Moskva 1966

[4] K. GÖDEL, Über formal-unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, Monatsh. f. Math. u. Physik 1931

[5] A. MOSTOWSKI, *Logika matematyczna*, Warszawa 1948

[6] B. RUSSELL, *Autobiografia 1872—1914*, polský překlad, Czytelnik, Warszawa 1971

[7] B. RUSSELL, *Logika, jazyk a věda*, sborník vybraných statí (uspoř. a překlad L. Tondl a K. Berka), Svoboda, Praha 1967. Obsahuje bibliografii Russellových prací a jeho předmluvu pro české vydání.

[8] B. RUSSELL, *Introduction to mathematical Philosophy*, Allen and Unwin, London 1924

[9] B. RUSSELL, A. N. WHITEHEAD, *Einführung in die mathematische Logik* (německý překlad úvodních partií prvního a druhého vydání *Principií*), Drei Masken Verlag, München, 1932.