Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Paul E. Goldenberg; Albert A. Cuoco; June Mark

# Vytvářet spojení s geometrií

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 39 (1994), No. 5, 275--304

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138859

# vyučování

## VYTVÁŘET SPOJENÍ S GEOMETRIÍ

*E. Paul Goldenberg, Albert A. Cuoco, June Mark*

Tento článek byl napsán jako programové prohlášení přednesené na zasedání pracovní skupiny pro geometrii v rámci kongresu ICME 7 konaného na univerzitě v Lavalu v Québecu v srpnu 1992. Celá práce byla financována zčásti rozvojovým fondem Střediska pro rozvoj vyučování (Education Development Center) a zčásti Národní vědeckou nadací (National Science Foundation), a to granty č. MDR–8954647, MDR–9054677 a MDR–9252952, včetně dodatečné podpory společnosti Apple Computer, Inc. Názory zde vyjádřené se nemusí nutně shodovat s názory sponzorů. Jsme velmi vděčni za podstatnou intelektuální a redakční pomoc poskytnutou Glennem Kleimanem v různých stadiích přípravy tohoto dokumentu a mnoha jeho předběžných verzí.

Lidé, kteří jsou členy pracovní skupiny pro geometrii mezinárodního kongresu o vyučování matematice (ICME), pravděpodobně nepotřebují povzbuzující přednášku o geometrii. Přidáme-li se však k pracovní skupině, ve které se má debatovat o „úloze geometrie ve *všeobecném vzdělání*“, budou na nás kladeny další obtížné požadavky. Právě v tomto okamžiku, jak víte, 324 řečníků v 89 jiných městech po celém světě vychvaluje přednosti 217 *jiných* předmětů pro všeobecné vzdělání. Jistě mají *všichni* pravdu. Je mnoho věcí, které stojí za to, abychom se jim naučili, a nemohou mít všechny absolutní přednost. Proč preferujeme právě *geometrii*?

Naše důvody jsou tyto:

- Geometrie dokáže snadno upoutat žáky a ti zase dobře navazují spojení s geometrií. S geometrií souvisí při nejmenším umění, fyzika, obrazotvornost, biologie, zvídavost, mechanický design, hra.
- Geometrie vyniká *také* bohatými souvislostmi s ostatní matematikou. Geometrie by nám mohla prostřednictvím vhodných sylabů pomoci přilákat k matematice více žáků i různorodých skupin žáků.
- V rámci matematiky je geometrie zvláště vhodná k tomu, aby lidem pomáhala rozvíjet důležité návyky myšlení; tyto návyky, jsou-li získávány spolu s onou nepostižitelnou věcí zvanou transfer, mají cenné využití i mimo matematiku. Zvláště pak je geometrie ideální intelektuální oblastí, v níž se dají provádět experimenty, rozvíjet kvalitativní způsoby argumentace vizuálního typu. To vše dává podněty ke konstruktivním důkazům. Geometrie v širším pojetí je také ideálním prostředkem pro žáky k rozvíjení jejich chápání celé matematiky.[1])

[1]) Hlavním úkolem tohoto článku je na příkladech ozřejmit smysl našeho pojetí „široce chápané geometrie“.

E. PAUL GOLDENBERG, ALBERT A. CUOCO and JUNE MARK: *Making Connections with Geometry.* Education Development Center 8/14/92.
Přeložili MARTA CHYTILOVÁ a OLDŘICH KOWALSKI.

Abychom takto přivedli žáky nejrozmanitějšího zaměření k hlubšímu pochopení matematiky, musíme vypracovat takové učební osnovy, které dovedou empiricky vytvořit důvěrný vztah mezi geometrií a žáky, ukázat souvislosti mezi geometrií a ostatní matematikou a také zdůraznit matematický „styl“. Měly by též obsáhnout dialektiku mezi experimentováním (myšleným i konkrétním), slovním vyjádřením a teoretickým rozborem. Matematický styl ovšem není matematickým bez matematiky. Proto zde musí být přítomen jasný a bohatý geometrický (i další matematický) obsah.

V tomto článku pojednáme o všech těchto charakteristikách učebních osnov — o záchytných bodech pro žáky, o bohatých souvislostech s ostatní matematikou a též o způsobech nebo návycích myšlení, které může geometrie podporovat — avšak příklady, které uvádíme, nemusí nutně spadat do jedné z těchto kategorií. Kdekoli je to rozumné, musíme proto považovat za optimální, aby každá aktivita obsahovala *všechny tři* charakteristiky.

Dříve však než přistoupíme k hlavnímu tématu, je důležité, abychom rozebrali pojmy vizuální myšlení a vizualizace. Tyto pojmy jsou tím hlavním, co činí široce interpretovanou geometrii určitým specifikem v rámci matematiky.

## 1. Vizualizace a vizuální myšlení: motivace, přístup a obsah

V nejobvyklejších učebních osnovách, v USA i mimo ně, se jeví geometrie jako *jediná vizuálně orientovaná matematika, se kterou se žáci setkají*. Jinak mají učební osnovy sklon k tomu, aby předkládaly vizuálně ochuzenou, skoro výhradně slovně zprostředkovanou matematiku, která nepoužívá, neprocvičuje a dokonce ani neoslovuje „mozkové centrum obraznosti“.[2])

Na tento stav věcí doplácí mnoho lidí: někteří žáci, kteří by měli rádi vizuálně bohatou matematiku, se nikdy nedozvědí, že taková matematika existuje. Je to proto, že vizuální části matematiky zůstávají žákům skryty až do doby, kdy už tito lidé vypadli ze hry.[3]) Ztrácíme tím nejen potenciální geometry a topology, ale i všechny žáky, kteří by se mohli seznámit s matematikou prostřednictvím jejích

---

[2]) Tento opatrný název je chytrým vynálezem DAVIDA TALLA [16]. Tall tvrdí, že vizuální myšlení může hrát klíčovou úlohu v rozvoji žákova porozumění; zčásti proto, že apeluje na osobnostní rysy komplementární k těm, které jsou zdůrazňovány v tradičním vyučování matematice.

[3]) Jen asi 50 % studentů v USA mělo možnost se seznámit se středoškolskou geometrií. A dokonce i v geometrii často vidíme, že se klade větší důraz na verbální stránku než na úvahy založené vizuálně. Část obtíží, které mají žáci při pochopení *důkazu* jako matematické metody, může být opravdu způsobena přílišnou názorností: důkazy jsou často předváděny nejprve v geometrii, jako předmětu, ve kterém se mnohé důkazy (ne ovšem všechny) zdají být zbytečné, protože sama vizuální představa činí výsledek tak zřejmým. CHIP HEALLY, učitel v Los Angeles, vypravuje ve své knize *Jak se dělá učebnice geometrie* o třídě, ve které skupiny žáků předkládají své vlastní experimentální výsledky a úvahy celé třídě a hlasuje se o tom, zda je zařadit nebo nezařadit do souhrnného textu reprezentujícího celoroční práci této třídy. V jedné třídě, jak si vzpomíná, byli žáci pevně přesvědčeni o tom, že není třeba zařazovat důkaz toho, že kolmá přímka půlící úsečku je stejně vzdálena od koncových bodů úsečky. Považovali tvrzení za tak triviální, že nestálo za zmínku. Mohli bychom namítat, že žáci zanedbávají důkaz jako důležitý prvek matematického myšlení, že opomíjejí dialektiku mezi experimentováním a teoretickým rozborem. Nemůžeme však rozumně očekávat, že se *začínající* žáci nechají zatáhnout do subtilností mate-

vizuálně bohatých součástí a *pak* objevovat další oblasti, ne již tak podstatně vizuální, ve kterých by mohli uplatnit své vizuální schopnosti a sklony. Pro některé žáky může být vizuální přístup naprosto podstatný ([11], [13]). Pro takové žáky, včetně mnohých, kteří se sami považují za slabé v matematice, znamená vizuální pojetí přístupovou cestu. Vizualizace a vizuální myšlení tedy slouží nejen jako potenciální lákadlo, ale pro mnohé žáky jako první příležitost k aktivní účasti na vyučování.

Je zde také otázka potenciální nestrannosti. Určité vizuální dovednosti pravděpodobně přispívají k lepšímu prospěchu v matematice ve vyšších ročnících střední školy i na vysoké škole. Na druhé straně jsou tyto dovednosti zjemňovány neformálními zkušenostmi získanými doma: při stavbě modelů, při zacházení se strukturovaným vizuálním materiálem, jako jsou dřevěné kostky nebo stavebnice Lego, při pozorování, jak se věci rozebírají a zase skládají dohromady. Protože *mimoškolní* zkušenosti s takovými materiály mohou pomoci položit základy k pozdějším matematickým úspěchům, je třeba vzít v úvahu jejich různou míru přístupnosti u různých dětí: Chlapci jsou častěji než dívky vedeni ke stavbě modelů a ke hře se stavebnicemi Lego a tyto stavebnice má k dispozici více dětí z bohatých rodin než z rodin chudých. To znamená, že škola musí poskytnout alternativní zkušenosti, aby se vyrovnaly tyto rozdíly.

Avšak vizualizace a vizuální myšlení znamenají více než jen přístup, přípravu a motivaci: jsou cenné samy o sobě. Vizuální představy napomáhají žákům získat vhled do aritmetických a algebraických výpočtů. Vlastnosti matematických postupů jsou často objevovány při studiu geometrických vlastností jejich vizuálních představ. Geometrie hrála historicky vskutku vysoce plodnou úlohu ve vývoji matematiky. Geometrické techniky a vizuální obrazy zůstávají hlavními nástroji a zdroji inspirace pro matematiky. Když tedy učební osnovy ignorují vizualizaci, zanedbávají nejen zapojení účinné složky žákova vědomí do služeb matematického myšlení, ale opomíjejí i *rozvoj* žákových schopností vizuálního zkoumání a zdůvodňování. Jsou to schopnosti, které podle [6] většina matematiků používá ve své denní práci, navzdory své nechuti přijímat vizuální přístupy jako *hotová díla*.

Z důvodů čistě pragmatických se zdá být rozumnější zdokonalovat žákův cit pro tvar a prostor než ho naučit látku prvního ročníku algebry. Při všech činnostech, ať je to stavění domu, sestavování knihovničky, malování obrazu, navrhování plastikové součástky nebo přestavování nábytku v místnosti, je schopnost „vidět" předem konečný výsledek ve vlastní mysli přinejmenším neocenitelnou pomůckou a často absolutně nutným požadavkem. Skoro jistě existuje více lidí, kteří používají takový druh vizualizace, než těch, kteří potřebují (nebo umějí) vyřešit soustavu rovnic. Učební osnovy na *všech* stupních škol by mohly pomoci rozvíjet takové vizuální dovednosti.[4]) Avšak o *jakých* dovednostech to mluvíme?

---

matického důkazu dříve, než prožili zkušenost vyvrácení nějaké své domněnky, což by jim dalo pocítit *potřebu* dalšího rozboru. Typické čtrnáctileté žáky nemůžeme srovnávat s Lakatosovou „pokročilou třídou" [12].

[4]) Klasická geometrie není ovšem jediným představitelem vizuální matematiky. Byli bychom rádi, kdyby se také teorie grafů a vizuální topologie dostaly do učebních osnov. Grafy jsou stylizované diagramy, které se mohou použít ke znázornění určitých závislostí mezi prvky množin. Takto mohou grafy velmi užitečně znázorňovat informace v mnoha růz-

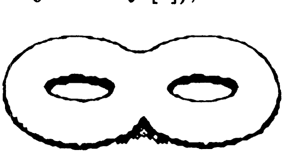
Markéta Senechalová [15] rozlišuje *vizualizaci* a vizuální *myšlení*. Termín vizualizace používá tam, kde jde o přenášení bezprostředně viditelných věcí do myšlení (např. prostorová vizualizace). Termín vizuální myšlení používá tam, kde jde v širším smyslu o sdělování idejí, které nemají bezprostředně prostorový charakter (např. vizuální představy o násobení). Často jsme nuceni do svých úvah zahrnout oba významy; kde však záleží na jejich rozlišení, budeme se řídit uvedenou konvencí.

### 1.1. Prostorová vizualizace: Interpretace viditelného

„Vizualizace" v uvedeném smyslu zahrnuje vytváření takových předmětů v naší mysli, které bychom ve vhodné situaci mohli vidět vlastníma očima. Například abychom zodpověděli otázku „Kolik oken má váš dům nebo váš byt?", vytvoříme si myšlený obraz a manipulujeme s ním. Podobně si můžeme představovat, kolik přihrádek má nějaká nám známá (ale v tomto okamžiku pro nás neviditelná) knihovnička, jak vysoká kniha přesně zapadne do nejnižší přihrádky a který bod našeho těla má stejnou výšku jako horní deska knihovny.

Je-li naším cílem pomoci dětem vytvářet a udržovat v paměti myšlené obrazy a dovedně s nimi zacházet, zdá se rozumné soustředit se na objekty, které děti nejvíce zajímají. Svět nejmladších dětí je trojrozměrný, a tak má smysl se brzy a velmi vážně zabývat trojrozměrnou geometrií. Jejím předmětem by mělo být umožnit malým dětem pochopení obsahu věty: „V čem mi může být tento tvar užitečný?" Měření a pojmenování jsou podle našeho názoru málo důležitá, to hlavní je struktura a design. Mohu identifikovat nějaký předmět dotykem? Nebo na základě jeho rozmanitých vržených stínů? Dovedl bych předpovědět, jaké budou tyto stíny? Dovedu nakreslit to, co vidím?[5]) Dovedu nakreslit to, co vidíte *vy* ze *svého* místa? Jaké druhy konstrukcí mohu postavit z těchto částí? Jak by to vypadalo, kdybych tuto věc rozřízl? Jakou stopu by předmět zanechal na papíře, kdybych ho namočil do inkoustu? Jak bych mohl tento předmět hladce (tj. bez pomačkání obalu) zabalit? Mohu tento předmět sestavit z jiných předmětů? Jak jej mohu sestavit z párátek a gumových bonbonů? Mohu zhotovit předmět podle fotografie? Dokážu identifikovat týž předmět po nějakém otočení?

Předmět, k němuž se vztahuje čtrnáct předcházejících otázek, může být jednoduché „geometrické těleso", bizarnější předmět jako „Hofstadterův preclík" (hračka pro nemluvňata, kterým se prořezávají zoubky [7]), nebo dokonce již



trochu složitější konstrukce postavená ze stavebnice Lego. Je pravděpodobné, že

ných kontextech, což je užitečný příspěvek ke studijnímu programu žáka. Některé stránky teorie grafů poskytují žákům matematicky bohatou příležitost k tomu, aby se zabývali oblastí širší, než je teorie grafů, a získali tak dovednosti v grafickém znázorňování různých souvislostí.

Existují také cesty, zavádějící mnohem více vizualizace do tzv. nevizuálních oblastí matematiky. Některé dobré příklady se najdou v [6].

[5]) Děti jsou obzvlášť fascinovány kreslením ve třech dimenzích, a když se naučí nakreslit krychli, používají stejný postup k prostorovému zvýraznění svého vlastního jména.

tvary, které budou žáky nejvíce zajímat, často *nebudou* spartánské tvary klasické geometrie, avšak složitější obrazce, včetně fraktalů, mechanických zařízení a přírodních útvarů.

Mechanická zařízení poskytují určitou trojrozměrnou „geometrii“ dostatečně vzdálenou od obvyklých představ, takže si zaslouží zvláštní zmínku. Goldbergovy mechanismy [6] vyžadují jistý druh vizuálního rozboru, přesně takového, jaký potřebujeme procvičovat, a jsou zábavné a podnětné. Jednodušší zařízení, např. konstrukce ze stavebnice Lego Technic, konstrukce některých hracích automatů atd. mohou posloužit jako dobrý úvod.

Zde je několik myšlenkových pokusů, které jsou pro nás výzvou k vizualizaci.

TVARY VYTVOŘENÉ ROZSEKNUTÍM JINÝCH TVARŮ (používejte pouze svou představivost)

- Která písmena abecedy lze rozseknout na dvě identické části? Existují některá písmena abecedy, která lze rozseknout na tři nebo na čtyři identické části? Jeden žák si může představit písmeno T rozseknuté na dvě části s použitím souměrnosti písmene. Druhý může řešit úlohu zcela jiným způsobem tak, že v mysli oddělí vodorovnou část písmene od svislé.
- Kolika různými způsoby můžete přeložit čtverec (obdélník, rovnostranný trojúhelník, pravidelný pětiúhelník) tak, aby přeložená část ležela celá ve zbývající části? Jaké tvary uvidíte, když to provedete?

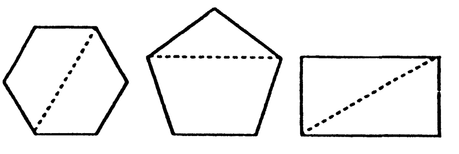
TVARY SESTROJENÉ KOMBINACÍ NEBO POHYBEM JINÝCH TVARŮ (opět si vše jen představujte)

- Otáčejte čtverec (trojúhelník, pětiúhelník) kolem jedné jeho strany. Jaký útvar z toho vznikne? Jaké útvary mohou vzniknout při otáčení hlavice lízátka, jestliže lízátko otáčíme různými způsoby kolem konce jeho držátka?
- Spojte úsečkou střed jedné strany čtverce (obdélníka) s protilehlým vrcholem a rozřízněte obrazec podle této úsečky. Jaké obrazce můžete sestrojit z obou částí, které jste právě vytvořili, jestliže je přiložíte k sobě shodnými stranami?

VYTVÁŘENÍ SPECIFICKÝCH PŘEDPOVĚDÍ (znovu jen ve vaší představě)

- Provádějte rovinný řez trubice rozmanitými způsoby. Jak vypadá takový rovinný řez? Podobně postupujte u krychle, vejce, ořechu, grepfruitu.
- Představte si promítání na rovinnou plochu. Jaký tvar může mít stín sodovkové lahve? Jaký tvar může mít stín krychle? Je možné určit tvar tělesa, jestliže máte k dispozici dostatečný počet jeho vržených stínů?
- Přehněte (po paměti) každý z obrazců na obr. 1 podél vytečkovaných úseček. Kolik stran má obrys výsledného obrazce?

Obr. 1.



VIZUALIZACE POHYBU NEBO ZMĚNY VE STATICKÉM OBRAZE

- Žákovi je ukázána nějaká jednoduchá konstrukce sestavená pomocí stavebnice Lego s ozubenými kolečky a s klikou na jednom kolečku. Jak se bude otáčet při pohybu kliky jiné ozubené kolečko? Nebo je ukázána jednoduchá konstrukce s pákou nebo několika kladkami. Popište, jak se bude pohybovat bod $X$, když se bude určitým způsobem pohybovat bod $Y$. Nebo je ukázáno složité Goldbergovo schéma [6]. Co se stane, když kočka přestane lízat mléko?

## 1.2. Pojmové vizuální myšlení: Vidět neviditelné

Podle Senechalové „vizuální myšlení" [15] zahrnuje konstruování vizuálních analogií k myšlenkám nebo procesům, se kterými se nejprve setkáváme v nevizuálních sférách. Sem patří např. užívání geometrického modelu k vizualizaci násobení dvou dvojčlenů (resp. násobení dvou dvojmístných čísel, např. 23 a 42, nebo čísel $3\frac{1}{2}$ a $8\frac{1}{3}$). Cílem takové analogie je pomoci žákovi, aby porozuměl nějakému výpočetnímu postupu nebo si aspoň tento postup zapamatoval. Jiným příkladem jsou vizualizace věcí příliš malých, příliš velkých nebo příliš rozptýlených, aby mohly být viděny; dále vizualizace spíše *závislostí* mezi objekty než samotných objektů, atd.

Existuje mnoho kategorií prostorových vizualizací. Avšak hned první z nich je tak málo známa, že potřebuje až nepřiměřeně obšírné vysvětlení.

### Vizualizace změny

Před několika lety jsme ve středisku Education Development Center (EDC) zkoumali pojem *DynaGrafu*. Je to prostředek dynamické vizualizace umožňující žákům „popohánět" nezávisle proměnnou některé funkce definované ve velmi širokém definičním oboru a pozorovat výsledné chování funkce. Uvažujme jednoduchý příklad: Na promítací stěnu promítneme dvě číselné osy umístěné nad sebou; na každé z nich je stupnice od $-100$ do $100$. Žák začne s jednoduchou funkcí, např. $f(x) = 2x$. S pomocí „myši" pohybujeme ukazatelem (pointerem) po stupnici dolní osy a tím měníme hodnotu proměnné $x$. Druhý ukazatel se pohybuje současně po druhé ose a určuje hodnotu $f(x)$.

Pro $f(x) = x$ se oba ukazatele pohybují v témž směru a stejnou rychlostí; oba označují vždy totéž číslo na stupnicích. Pro $f(x) = -x$ se ukazatele opět pohybují stejnou rychlostí, avšak v opačných směrech. Pro $f(x) = 3x$ se opět oba ukazatele pohybují ve stejném směru, avšak jeden z nich se pohybuje trojnásobnou rychlostí než druhý. Opačný případ nastane pro $f(x) = x/3$. Nápadně odlišný druh chování pozorujeme, když žák vyšetřuje funkci $f(x) = 3/x$.

Co se stane, když $f(x) = x^2$? Když žák pohybuje dolním ukazatelem v kladném směru po příslušné ose, pohybuje se horní ukazatel také v kladném směru, avšak jeho rychlost stále roste s rostoucí vzdáleností dolního ukazatele od nuly. Horní ukazatel zaujme polohu přímo nad dolním ukazatelem jen pro hodnoty $x = 0$ a $x = 1$. Vzdaluje-li se dolní ukazatel $x$ od 0 ve směru záporném, pohybuje se ukazatel pro $f(x)$ dále ve směru kladném. Zamyslete se nad tím, co žáci vidí, když zkoumají chování trigonometrických funkcí, schodovitých funkcí, funkcí s minimy a maximy, s asymptotami nebo s nespojitostmi.

Pozoruhodné na těchto vizualizacích nejsou ani tak hodnoty, kterých funkce nabývají, jako způsoby, jak se tyto hodnoty mění při malých změnách nezávisle proměnné. Jestliže jsou čísla na ose stlačena a jejich značky nečitelné, snaží se žáci (nezávisle na předchozím vzdělání) popsat to, co vidí, a to způsoby, které odrážejí geometrické a topologické myšlenky. Ještě předtím, než se formálně setkají s příslušnými pojmy a rafinovaným názvoslovím, žáci zjišťují a nalézají způsoby pro vyjádření rozdílů mezi funkcemi, které znamenají *translaci* (např. $f(x) = x + c$), *dilataci* (např. $f(x) = ax + c$, $a > 0$), *kontrakci* (např. $f(x) = ax + c$, $a < 0$), „přehýbání" (např. $f(x) = |ax + c|$), nebo funkcemi, které způsobují pokřivení různého druhu (např. $f(x) = x^a$, $a > 0$) nebo se „roztrhnou" na několik částí (např. $f(x) = 1/x$), atd.

DynaGraf funguje i v obecnějších situacích, než je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Např. místo abychom měli dvě číselné osy na promítací stěně, můžeme tam mít dvě roviny. V tom případě by si žák definoval nějakou funkci v rovině, řídil by pointerem polohu bodu v první souřadnicové rovině a pozoroval by funkční hodnoty na pointeru v druhé rovině. Zde je ještě víc patrna souvislost s geometrií rovinných transformací a geometrií komplexních čísel.

Nebo můžeme mít číselnou osu a rovinu. Žák řídí polohu bodu na jedné z nich a sleduje výsledek na druhé. Když žák posouvá bod na číselné ose, mohl by příslušný bod v rovině, kromě jiného, kreslit známý kartézský graf funkce. V této souvislosti jsou parametrické rovnice jen drobným rozšířením téže myšlenky.

Funkce mohou být definovány procesy geometrickými právě tak jako algebraickými. Zařízení, jako je *Cabri Géomètre, Geometer's Sketchpad* nebo *Geometry Inventor*, ilustrují různými způsoby tuto myšlenku (příklady funkcí jsou uvedeny dále). Podstatným rysem DynaGrafu, společným všem těmto experimentům, je to, že volba proměnné je doslova v rukou žáka a že je dynamicky ovladatelná, takže žák *cítí*, že má přímou kontrolu nad hodnotami funkce tím, že ovládá mechanismus vytvoření funkce.

## Procesy vidění

Geometrické interpretace obecných aritmetických procesů jsou často docela názorné.[6]) Dobrým příkladem je článek [14]. Žáci by měli také umět myslet v termínech strojů. Některé stroje, např. spřažené mechanismy, jsou stroje vysloveně geometrické. Avšak vizuální metafory pro jiné druhy procesů jsou také důležité. Žáci by měli používat hodně vizuálních zobrazení pro párové funkce typu input–output, ať již jde o drtiče masa, specializované kalkulátory, DynaGrafy i obvyklé kartézské grafy (jestliže proces může být považován za zobrazení funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$). Je to proto, že tyto rozmanité vizualizace mohou zobrazit zcela odlišné aspekty procesu. Např. zobrazování funkcí uvedené ve [22], [25] objasňuje skládání funkcí, avšak říká málo o chování funkce. Naopak dynamické zobrazení dobře ukazuje chování funkce, nestačí však k tomu, aby mohlo ilustrovat skládání funkcí.

Vizuální složky „mentální aritmetiky" a odhady jsou také často zanedbávány. Někdy jsou tyto představy zcela geometrické: např. myšlený obraz dvou a půl pětiny je dobrou oporou pro pochopení,

[6]) Avšak objasnění, tak jako mnoho jiného na světě, záleží na pohledu toho, komu má být věc objasněna. V projektu vývoje učebních osnov elementární matematiky, probíhajícího v EDC, byl komisí zamítnut geometrický model násobení dvou dvojmístných čísel jako *neobjasňující* a obtížnější než rutinní algoritmus, avšak zcela stejný model byl uvítán s velkým nadšením, když byl předložen středoškolským učitelům jako postup k vysvětlení násobení dvojčlenů.

proč jedna polovina dělená jednou pětinou je „velké číslo“. Podobně často používám myšlené obrazy, abych podepřel své nespolehlivé aritmetické fakty: jestliže z jakýchkoli důvodů nedovedu mechanicky odpovědět na otázku, kolik je $8+5$, potom *vidím* trojku přesahující desítku jako sloupeček postavený na větší sloupec značící desítku. Někdy znamenají vizuální složky jen o málo více než obrazy číslic poletující kolem nás způsobem vyjadřujícím obvyklý algoritmus zapsaný tužkou na papíře. Stojí za to, aby i tento druh nekvantitativního zobrazování, spíše připomínajícího grafy v teorii grafů, byl pěstován.

### VIDĚNÍ KVANTITY

Nakreslíme tyč rozdělenou na pětiny. V paměti vystínujeme dvě a půl z těchto pětin. Jaká část tyče je nyní vystínovaná? Kolik pětin je obsaženo v polovině tyče?

### VIDĚNÍ STRUKTURY

Žáci by měli sestrojovat tabulky a grafy rozmanitých druhů[7]) a používat tyto vizualizace ve svých experimentech. Měli by také získávat návyky pracovat se stylizovanými vizualizacemi, které používají rovinu nebo prostor jako kreslicí podložku bez metrické struktury. Rozměry a umístění smyček ve Vennových diagramech nejsou např. důležité, pokud jsou překrývání a popisy správné. Podobně větvená struktura (nikoli však už rozměry, umístění nebo úhly větví) je důležitou informací pro faktorové stromy a grafy logických problémů. Diagram typu „brambora a šipka“ je jinou vizualizací tohoto typu.

[7]) V odstavci 3.3.2 je příklad porovnávající různé vhledy, které získáváme z vrstevnic a trojrozměrných grafů téže geometricky definované funkce.

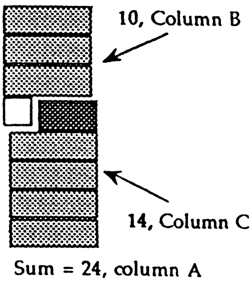
Vizuální myšlení může také hrát velmi důležitou úlohu při zkoumání hypotéz a vymýšlení důkazů. Zamysleme se např. nad potenciální úlohou vizuálního myšlení v tomto příkladě:

| **Sloupec A** | **Sloupec B** | **Sloupec C** |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | 32 |
| ... | ... | ... |

Vyber nějaká dvě čísla ze sloupce A a sečti je. Ve kterém sloupci najdeš výsledek? Zkoušej to pro různé dvojice čísel ze sloupce A. Jakou zákonitost zjistíš ze svých výsledků? Jak můžeš vysvětlit tuto zákonitost?

Proveď nyní týž pokus se sloupcem B. Vyber nějaká dvě čísla ze sloupce B a sečti je. Ve kterém sloupci se nachází součet? Vysvětli proč. Jaká zákonitost platí pro sloupec C při sčítání? Jaké platí pravidlo, když sčítance patří do dvou různých sloupců? Opět vše vysvětli.

Dobrá aritmetická nebo geometrická vysvětlení těchto zákonitostí sice existují, avšak nejsou stejně přístupná všem žákům. Proto například mladší žáci mohou ukázat, že všechna čísla ve sloupci A mohou být sestavována jen pomocí zelených tyčinek, že čísla ve sloupci B vyžadují jednu přidanou tyčinku bílou a že čísla ve sloupci C vyžadují jednu přidanou tyčinku červenou (obr. 2). Takto skutečně *vidíme* číslo; vysvětlení součtového vzorce se stává „zřejmé“, jak říkáme my mate-




Obr. 2.

matici. Pro tak mladé žáky se algebraický důkaz sotva bude zdát zřejmý.

## Fyzika matematiky

Jsme všichni dost zvyklí mluvit o matematice ve fyzice. Existuje však i určitý druh „fyziky v matematice“, která může přinést žákům užitečnou zkušenost. Jakmile si matematické objekty blíže osvojíme, jeví se nám často, jako by byly řízeny jakýmsi přírodním fyzikálním zákonem. Velmi elementární příklad dává DynaGraf se dvěma rovnoběžnými číselnými osami, pomocí kterého můžeme pociťovat libovolně zkonstruované funkční vztahy tak, jako by jejich chování bylo řízeno mechanickými přístroji.

Uvedeme další příklady:

### *Fyzikální chování v matematických souvislostech*

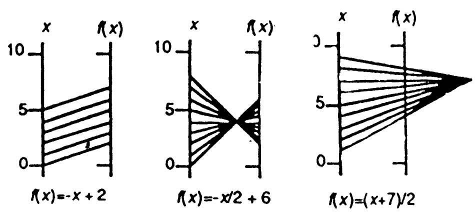
Autoři [1] vyvinuli určitý software, který vizuálně zobrazuje funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ tak, že spojuje body v definičním oboru vizualizovaném jako číselná osa s jejich obrazy na jiné, rovnoběžné číselné ose. Většina funkcí generuje spleť čar, avšak lineární funkce jsou zvláštními případy.

U funkcí,které nevedou k změně jednotky číselné osy (funkce $f(x) = mx + b$, kde $m = 1$), jsou spojnice bodů a jejich obrazů vesměs rovnoběžné: všechny takové funkce vedou pouze k posunutí číselné osy (obr. 3a).

Pro $m \neq 1$ se všechny spojnice (popř. jejich prodloužení) sbíhají do jediného bodu. Pro $m < 0$ se tento bod nachází mezi oběma osami (obr. 3b). V DynaGrafu jsou takové funkce pociťovány jako dvouramenné páky. (Zmíněný software ukazuje „páku“, avšak nedovoluje dynamickou kontrolu.)

Např. pro $m = -0{,}5$ se obraz na ose $f(x)$ pohybuje pomaleji než bod na ose $x$ — má přesně poloviční rychlost — a v opačném směru. Výsledek je, že „čep“ páky je blíže k ose $f(x)$ než k ose $x$.

Obr. 3.

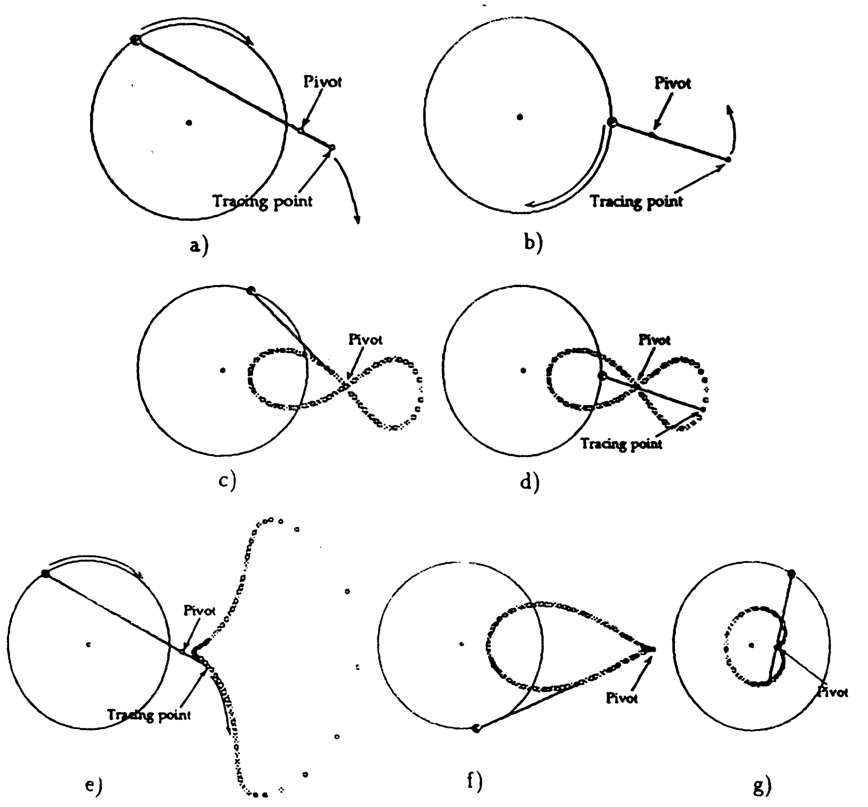



a) b) c)

Případ $m = 0{,}5$ připomíná páku, na kterou působí dvě síly po různých stranách od osy otáčení. Obraz na ose $f(x)$ se pohybuje poloviční rychlostí v témže směru jako bod na ose $x$. Pro $m > 1$ jde o páku, na kterou působí dvě síly po téže straně od osy otáčení. Obraz na ose $f(x)$ se pohybuje pomaleji a ve stejném směru jako sledovaný bod na ose $x$ (obr. 3c).

S užitím [22] lze tento dynamický výsledek získat geometricky. Pohybujeme-li bodem po ose $x$ dynamicky a pozorujeme také, jak se pohybuje jeho obraz, to, co vidíme, se tolik podobá chování páky, že každá naše zkušenost s pákami se bezprostředně uplatní v matematické abstrakci. Fyzikální chování napomáhá dát konkrétní obsah matematickému formalismu. A matematika napomáhá kvantifi-

Obr. 4.




kovat pozorované a již dobře známé chování.

*Klasifikace chování matematických systémů*

Wittgenstein seznamuje čtenáře ve [20] s následují myšlenkou:[8])

Tuhá tyč volně klouže skrze pevný čep (pivot, obr. 4a). Jeden konec tyče je poháněn rotujícím kolem ve směru hodinových ruček. Jakou dráhu opisuje druhý konec tyče (tracing point)?

[8]) Když vyšla jeho kniha v r. 1956 v 1. vydání, Wittgenstein v podstatě nemohl tento experiment provádět jinak než jako myšlený pokus. Dnes je snadné experimentovat zcela konkrétně s parametry, získávat obrázky a používat je k ilustraci písemného rozboru experimentu. Obrázky zde použité byly vytvořeny na zařízení „Geometer's Sketchpad".

A jak závisí tato dráha na délce $l$ tyče a na umístění čepu? Na obr. 4b je tyč kratší a čep je dále od kola než na obr. 4a. Je jasné, že při dostatečně krátké tyči nebo při dostatečné vzdálenosti čepu od kola může tyč občas zcela vyklouznout z místa svého upevnění. V takových případech předpokládáme, že tyč nadále směřuje tak, jako by její konec procházel bodem upevnění (obr. 4c). Obrazy jsou kuriozní a rozmanité. Některé mají tvar osmičky. Na obr. 4c, 4d vidíme mechanismus kreslení osmičky ve dvou různých stadiích. V obr. 4c se koncový bod tyče pohybuje od vnější smyčky obrazu osmičky. Na obr. 4d se tyč, která vyklouzla z bodu upevnění zhruba o polovinu otáčky dříve, přibližuje stále k tomuto bodu a chystá se vklouznout zpět.

Je-li tyč delší a čep dostatečně blízko kola, tyč nikdy nevyklouzne z bodu upevnění a poloha jejího koncového bodu je zcela jiná (obr. 4e). Při krátké tyči a vzdáleném čepu nikdy nedosáhne zcela bodu upevnění: obraz je zase kvalitativně jiný (obr. 4f). A je-li čep uvnitř kola (obr. 4g), jsou možné ještě jiné obrazce.

Přesná klasifikace obrázků podle jejich kvalitativně rozdílných tvarů a stanovení podmínek požadovaných k realizaci těchto charakteristických tvarů je velmi úctyhodný matematický výkon. Nepožadují se však vzorce ani pokročilé matematické techniky, postačí jen jasné myšlení a systematické zkoumání.

## 2. Záchytné body pro žáky

### 2.1 Příklad Jeffreyho Weekse: tvar prostoru

Jeffrey Weeks začíná svou podivuhodnou knihu *Tvar prostoru* fantastickou povídkou založenou na Abbottově románu *Nížina*. Osoby Weeksovy povídky se domnívají, že jejich svět je plochý. Výjimkou je jeden obyvatel, který se jmenuje Čtverec. Podle jeho teorie je jejich svět „hypercyklický“ (tj. má tvar kulové plochy). Tak jako Abbottova stvoření jsou i Weeksovi obyvatelé dvojrozměrní a stále žijí *ve* svém rovinném světě, nikoli *na* jeho povrchu. Nejsou schopni uniknout do třetí dimenze a pozorovat svůj svět z dálky. Jak by se takoví obyvatelé vyrovnali se Čtvercovou teorií? Čtverec se domníval, že spor by mohla vyřešit expedice.

> Uvažoval, že kdyby se odhodlal putovat celý měsíc lesem směrem na východ, mohlo by se mu podařit přijít zpět od západu.
>
> Byl nadšen, když dva přátelé šli dobrovolně s ním. Čtvercovi přátelé nevěřili jeho teoriím, chtěli mu však pomoci z nesnází. Proto ho přiměli, aby nakoupil všechny červené nitě, které byly ve Flatsburghu k dostání. Navrhovali, aby cestou zanechávali za sebou červenou nit, takže pokud by se po měsíci vzdali dalšího putování, mohli by najít cestu zpět do Flatsburghu.
>
> Jak se ukázalo, nit byla zbytečná. K veliké radosti Čtvercově a k úlevě jeho přátel se po třech týdnech vrátili od západu. To ale nikoho o ničem nepřesvědčilo. Dokonce i jeho přátelé si mysleli, že se asi stáčeli na jednu nebo na druhou stranu a putovali v obrovském kruhu v rovině „Nížiny“.

Neohrožený Čtverec se vydal na novou expedici, tentokrát k severu a zanechával za sebou modrou nit.

> A celkem bezpečně se vrátil po dvou týdnech od jihu. Všichni se zase domnívali, že se jednoduše točil v kruhu, a blahopřáli mu, že se vůbec dostal zpět. Čtverec byl udiven, že jeho cesta byla tentokrát o tolik kratší, ale něco ho trápilo ještě víc: nikde nepřekročil červenou nit položenou při první cestě ([19], str. 6, 7).

Právě tímto způsobem přivádí Weeks své čtenáře k představě rozmanitých variet — v tomto případě dvojrozměrných variet vložených do trojrozměrného prostoru, avšak se zaměřením na pozdější vizualizaci trojrozměrných variet vložených do čtyřrozměrného prostoru. Rozlišují se zde vlastnosti geometrické a topologické, lokální a globální, vlastnosti vnitřní a vnější. Mohou Čtvercovi odpůrci nadále považovat svůj svět za rovinný a domnívat se, že Čtverec putoval tentokrát po menší kružnici? Obecněji: jaké experimenty by pomohly dvojrozměrným obyvatelům určit tvar jejich světa, jde-li např. o kulovou plochu, povrch krychle, nekonečnou válcovou plochu s konečným poloměrem, povrch věnečku nebo preclíku se dvěma otvory?

### 2.2. Komentář k příkladu

Je Weeksova povídka dobrým záchytným bodem? Pro většinu lidí ano. Stojí za přemýšlení, proč tomu tak je. Jistě to není v pragmatické hodnotě: ani obsah ani souvislosti se nedají pohotově „aplikovat". Pragmatismus se značně přeceňoval jako zdroj motivace v matematice. A pragmatická hodnota matematiky vyučované ve školách se také velmi zveličuje. Žáci středních škol dostatečně nadaní pro matematiku si sotva mohli nepovšimnout, že skoro každý, s kým se setkají a kdo se jim zdá úspěšný, jim nakonec přímo hrdě oznámí, že tento předmět mu nikdy neseděl.[9])

O této povídce platí, že zaujme fantazii a vzbudí zvědavost: lidé se neptají, čemu se naučí nebo k čemu to potřebují. Avšak žádný kontext nepůsobí na všechny, a proto stavba a styl učebních osnov musí být rozmanité. V tomto článku se setkáte ještě s jinými kontexty, některými více pragmatickými, jinými spíše zábavnými.

Ale tam, kde osobní oslovení může být dostatečným důvodem pro žáka, aby se pustil do určité aktivity, není ještě důvodem pro tvůrce učebních osnov, aby takovou aktivitu zařadil. Je ve Weeksově povídce ještě něco jiného, co je matematicky zajímavé?

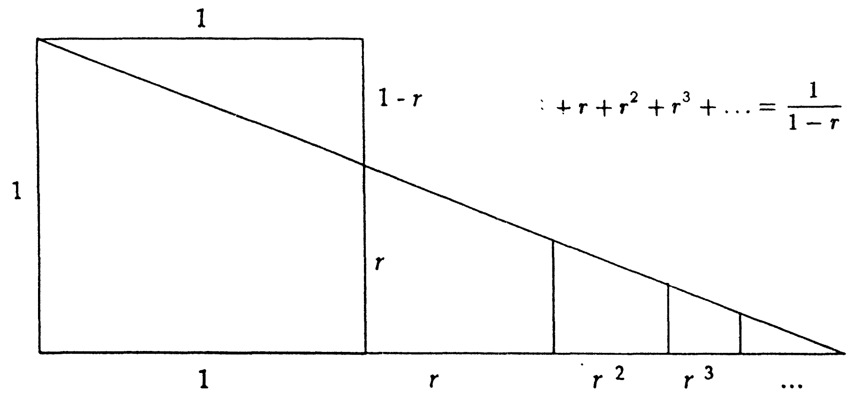
Weeksův smyšlený pokus v sobě zahrnuje mnoho stránek matematiky. Weeks se cítí zcela oprávněn vymýšlet si jakákoli pravidla hry (a k tomu povzbuzuje i své čtenáře). To je charakteristické pro hry i pro čistou matematiku.[10]) Tato čistá matematika však není bezvýznamná ani nepřístupná. Je současně abstraktní i konkrétní: *tyto* světy jsme nikdy nepoznali z vlastní zkušenosti — jsou to pouhé abstrakce — můžeme však snadno vstoupit do říše fantazie a mít velmi „konkrétní" dojmy ze světů, které popisuje Weeks. Takto se stává matematika (v reálném světě imaginace) „aplikovanou matematikou" nebo též geometrií ve svém původním smyslu měření světa. Je (v onom reálném světě) „praktická", avšak nikdy není z našeho světa. Kéž by tak mohli všichni žáci prožívat matematiku z tohoto pohledu!

Weeksova vlastní tvůrčí virtuozita, se kterou uvádí čtenáře do svého oboru, by se neměla podceňovat. Avšak ani povaha samotného předmětu není pro jeho úspěch bez významu.

Geometrie má tento dvojí charakter své existence: „je současně abstraktní i konkrétní". Na jedné straně se zabývá abstrakcemi, jako kterýkoli jiný obor matematiky — body, čáry a roviny jsou právě tak záležitostí obraznosti jako mnohočleny — a na druhé straně vede přirozeně k vizuální interpretaci geometrických objektů. „Ke geometrii přistupujeme podobně jako k některé oblasti fyziky: naše hledisko je, že geometrické objekty skutečně existují a my se chceme o nich dozvědět více" [9]. Ať už zvolíme jakýkoli způsob manipulace s geometrickými *objekty* —

[9]) Je-li tento jev příznačný pro USA, jak jsme příležitostně slyšeli, kéž neexportujeme tuto část „kultury".

[10]) V originále se v této souvislosti uvádí hebrejské slovo „liš-ma", což znamená něco jako „hra pro hru". (Pozn. překl.)




Obr. 5.

mohou to být slova a styl syntetické metody nebo symboly analytické geometrie — to, čím se geometrie zabývá, je ve své podstatě vizuální.

### 3. Souvislosti

T. Banchoff ve sborníku [2] poznamenává, že Froebel, vynálezce mateřské školy, dával žákům třírozměrné geometrické „dárky", ne proto, aby je uměli pojmenovat, ale jako podněty pro jejich představivost. Vzhledem k rozsahu, ve kterém se tyto „dárky" stále ve škole vyskytují, staly se již *součástí*, nikoli stimulem učebních osnov. Banchoffova půvabná stať ukazuje bohatou interakci mezi geometrickým a algebraickým uvažováním a dává přesvědčivý obraz o tom, jak taková interakce může být převedena do tvaru přístupného žákům různých stupňů škol. Mezi jinými souvislostmi ukazuje, jak geometrický pojem rozměrovosti může rozšířit a obohatit ideje v oboru dvojrozměrných a trojrozměrných veličin. Podobně Cuoco a Goldberg [4] diskutují o „Matematické indukci ve vizuální souvislosti" a ukazují, jak se geometrický pojem podobnosti dá použít pro lepší porozumění a užití „logické podobnosti", neoddělitelné od matematické indukce.[11])

Geometrie nejen poskytuje prostředí, ve kterém můžeme dospět k porozumění novým matematickým ideám, ale často dává také nové vhledy do již známé matematiky. *Mathematics Magazine* pravidelně otiskuje „důkazy beze slov", které používají geometrii, aby pomohla vysvětlit klasické matematické výsledky. Na obr. 5 je příklad, který uveřejnil Benjamin G. Klein a Irl. C. Bivens (Davison College) v říjnu 1988.

Následující odstavce uvádějí příklady interakce mezi geometrií, ostatními oblastmi matematiky a lidskou zkušeností.

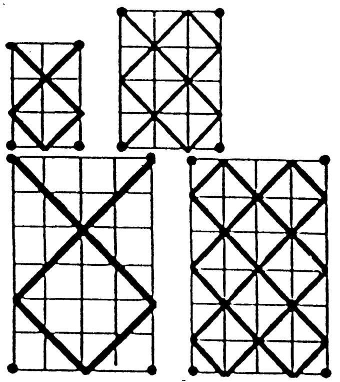
#### 3.1. Kulečník, optika a pozoruhodné umění Michaela Moschena

K vysvětlení odrazu světelných paprsků od zrcadel a odrazu kulečníkových

[11]) O jiných souvislostech uvnitř matematiky viz [4]. Cuoco a Goldberg nabízejí řadu aktivit pro žáky středoškolské geometrie, kde se používá klasická geometrie spolu s elementární algebrou (včetně nerovností), různými pojetími optimalizace (včetně pojmů maxima a minima), reálnými funkcemi definovanými v rovině a úvahami o spojitosti (jako porozumění vlastnostem spojité změny).

koulí od stěn kulečníkového stolu musíme použít různou fyziku, avšak geometrie obou jevů je táž. Je to geometrie, od které můžeme dospět k širokému spektru matematiky.

Harold Jacobs ve své klasické knize [8] dospívá od geometrie k teorii čísel pomocí činnosti, při níž studenti hrají zvláštní upravenou hru v kulečník. Omezení: obdélníkové stoly s celočíselnými hodnotami délek stran, otvory jsou jen v rozích; koule musí být zahrána vždy pod úhlem 45° (obr. 6).



Obr. 6. $m$, $n$ jsou celočíselné hodnoty délek stran, $(m,n) = a$. Koule, která je zahrána z některého rohu, se odrazí $(m/a + n/a - 2)$-krát, než se dostane do jiného rohu. Uzavřené dráhy jsou možné, jen když $a \neq 1$ a koule není zahrána z rohu.

Michael Moschen, choreograf, tanečník a žonglér s matematickým nadáním, navrhl svislý trojúhelníkový „kulečníkový stůl", ve kterém současně tančí a doprovází se k tanci hudbou. Jeho spolutanečníky a současně jeho hudebním nástrojem jsou trojúhelníkový rám a několik míčů. Výsledek je vizuálně, audiálně a intelektuálně fascinující.

Při svém představení tančí uvnitř rámu a odráží míče od stěn. Rytmus vyťukávaný míči při dopadu na stěny závisí na čase mezi nárazy, a tedy na časových úsecích volného letu mezi nárazy. Aby rytmus dával hudební smysl, musí se časové úseky vhodně sčítat; každý musí být celočíselným násobkem určité časové jednotky (např. osminkové nebo šestnáctinkové noty) a jejich součet musí dávat právě celý takt.

Úhly drah a délky volného letu mezi odrazy jsou (skoro) výhradně záležitostí geometrie. S vhodným vybavením můžeme zkoumat tento problém na vodorovných (trojúhelníkových) kulečníkových stolech: vyšetřujeme úhly dopadu, délky drah, podmínky, za kterých se dráha uzavírá ap. Úkol Michaela Moschena je ve skutečnosti složitější, než by byl na běžném kulečníkovém stole, protože svislá poloha rámu znamená, že dráhy míče mezi odrazy nejsou úsečky, ale úseky parabol. Ale vezmeme-li v úvahu, že ani ve svislé poloze se nemění lokální geometrie odrazů, můžeme dokonce začít zkoumat tento složitější praktický úkol.

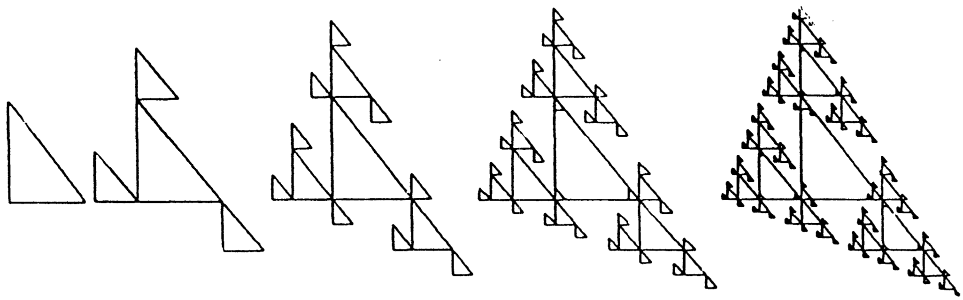
A co by se stalo, kdyby měl stůl tvar elipsy místo mnohoúhelníka? Nebo třeba kdyby jeho rám měl tvar paraboly s tětivou?

Tento kontext obsahuje spoustu „návnad" pro všechny druhy zálib: je zde tanec, hudba, fyzika, a samozřejmě kulečník. Sledovat Moschena v pohybu je oslňující (jak zjistíte, půjdete-li na jeho představení).

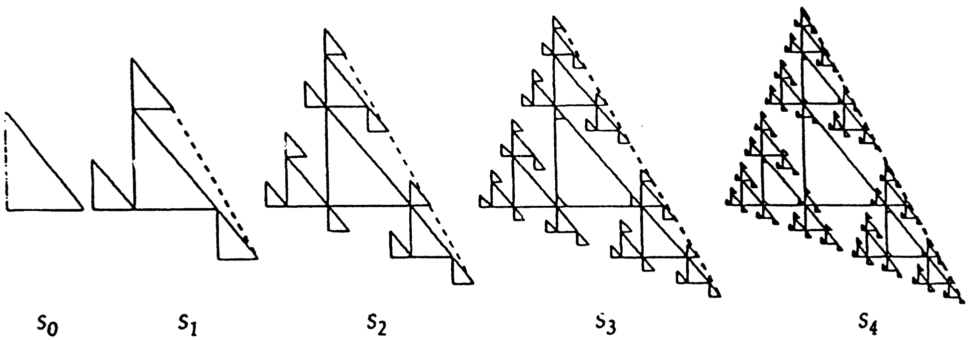
### 3.2. Posloupnosti, řady, matematická indukce a teorie čísel související s iteracemi geometrických konstrukcí

#### 3.2.1. Konstrukce

Představme si, že trojúhelník má tři děti, podobné jejich rodiči, avšak s polo-



Obr. 7.




Obr. 8.

vičními délkami stran (čtvrtinovým obsahem). Děti vyrůstají z vrcholů svého rodiče a mají strany s ním rovnoběžné. Obr. 7 ilustruje příslušnou konstrukci. První obrázek znázorňuje původního rodiče. Každý následující obrázek ukazuje další generaci dětí.

Zde jsou tři problémy založené na této konstrukci.

### 3.2.2. Charakter trojúhelníkové hranice

Ornament na posledním obrázku 7 vypadá, jako by byl úhledně ohraničený trojúhelníkem. Jaký je tvar tohoto ohraničujícího trojúhelníku?

Můžeme použít mnoho přístupů. Jeden způsob je všimnout si, že vrcholy nového trojúhelníku jsou umístěny na prodlouženích stran původního trojúhelníku. Geometrická řada odvozená z naší konstrukce říká, jak daleko na těchto prodlouženích leží nové vrcholy. Práci pak můžeme fakticky dokončit *jen* pomocí algebry. Avšak vzhledem k tomu, že praroodič je pravoúhlý trojúhelník, je pravděpodobně lepší trigonometrický přístup než postup striktně algebraický.

Amy Nelsonová, v té době žákyně nižší střední školy, zvolila odlišnou cestu.

Rozhodla se změřit strany mezního trojúhelníku a definovala „pseudostrany", jejichž délky se s každou postupující generací dětí blížily skutečným délkám stran. Její pseudostrany jsou znázorněny na obr. 8 vytečkovanými čarami.

Použila nejprve *měření* a zjistila, že poměry délek pseudostran jsou racionální čísla. Pseudostrana $s_2$ na druhém obrázku se jeví jako $\frac{3}{2}s_1$, pseudostrana $s_3$ na třetím obrázku se jeví jako $\frac{7}{8}s_2$. Potom použila *geometrickou úvahu*, aby ukázala, že první dva zlomky jsou skutečně rovny naměřeným hodnotám. Její zdůvodnění bylo založeno na poznatku, že pseudostrana obrazce $s_1$ se jej dotkla jen ve dvou jeho koncových bodech, zatímco pseudostrana obrazce $s_2$ se jej dotkla dvakrát mezi koncovými body a tím vznikly tři menší úsečky. Ukázala, že tyto úsečky měly všechny délku rovnou $\frac{1}{2}s_1$.

Na radu učitele potom využila ve své geometrické argumentaci *matematickou indukci* a vytvořila řadu jiných poměrů (které překontrolovala měřením). Ukázala dvě věci:

- *Délky* dílčích úseků pseudostrany v každé generaci se rovnají polovinám délek dílčích úseků v předchozí generaci, tj. $S(g+1) = S(g)/2$.
- *Počet* dílčích úseků v každé generaci je o jednotku větší než dvojnásobek tohoto počtu v předchozí generaci, tj. $C(g+1) = 2C(g) + 1$.

Vyjádřila také všechny pseudostrany pomocí jednotky $s_1$. To jí umožnilo vyjádřit $s_n$ pomocí $s_1$:

$$\begin{aligned}
s_2 &= \frac{3}{2}s_1\\
s_3 &= \frac{7}{6}\cdot\frac{3}{2}s_1\\
s_4 &= \frac{15}{14}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{2}s_1\\
s_5 &= \frac{31}{30}\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{2}s_1\\
&\dots
\end{aligned}$$

Po maximálním možném vykrácení v posledním výraze Amy obdržela

$$\begin{aligned}
s_5 &= \frac{31}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}s_1 =\\
&= \frac{2^5-1}{2^4}s_1 = \left(2-\frac{1}{2^4}\right)s_1.
\end{aligned}$$

Zobecněním tohoto výsledku pro $n$-tý člen dostala

$$s_n = \left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)s_1$$

a také příslušný limitní výsledek: pro $n\to\infty$ platí $s_n \to 2s_1$.

Potom se Amy poradila s kamarádem, který ji poučil, jak má použít kosinovou větu k určení hodnoty $s_2$.

To, co Amy ve skutečnosti udělala, byla konstrukce a výpočet nekonečného součinu

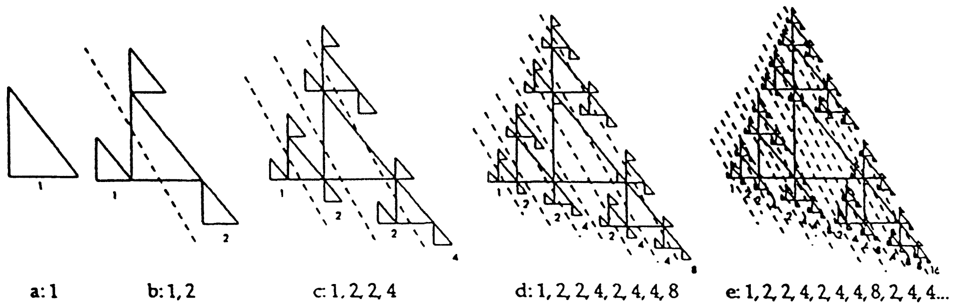
$$s_1\prod_{n=2}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^n-2}.$$

Označení (a některé poznatky o limitě a konvergenci) byly pro ni zřejmě novými věcmi, na které ještě nestačila. Avšak relace mezi geometrickými konstrukcemi a aritmetickými výpočty byly na každé úrovni zcela konkrétní. Důležitější je, že Amy byla schopna *pochopit* princip indukce v geometrii, který jí umožnil dostat se od délky jedné pseudostrany k délce následující pseudostrany, a tento induktivní princip fungoval na každé úrovni.

### 3.2.3. Kolik dětí je v jedné řadě?

Konstrukce, kterou provedla Amy, si všímá šňůry malých trojúhelníků podél uvažované pseudostrany a umožňuje výpočet vzdáleností mezi těmito trojúhelníky. Nyní si položme otázku, kolik trojúhelníků najdeme (v některé generaci) podél *jiných* přímek rovnoběžných s pseudostranou.

Každá generace vytváří svou vlastní posloupnost čísel odpovídajících počtům trojúhelníků v rovnoběžných řadách. V obr. 9d je např. osm řad malých trojúhelníků obsahujících postupně 1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8 trojúhelníků. Co charakterizuje tyto posloupnosti? Jakou posloupnost čísel bychom například nalezli v „obrázku 9f“ reprezentujícím následující generaci? Nebo kolik jedniček, dvojek, čtyřek, osmiček atd. je v každé jednotlivé posloupnosti?




Obr. 9.

Uvažování o tomto problému kombinuje geometrickou argumentaci a matematickou indukci a má zajímavý vztah k teorii čísel. (V posloupnosti 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, ... je postupně 0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, ... jedniček. Jestliže umocníme dvojku na tyto exponenty, obdržíme posloupnost patřící k obr. 9d. Vysvětlete souvislost.)

### 3.2.4. Nepovažujme věci za předem zřejmé

Ale dodejme ještě poznámku. Předtím jsme pozorovali, že „poslední ornament na obr. 7 *vypadá*, jako by byl úhledně ohraničen trojúhelníkem". Avšak zdání může být klamné. Jsou vrcholy, které se zdají ležet na tom, čemu Amy říká pseudostrana, skutečně všechny kolineární? Tento konkrétní problém je báječnou příležitostí k rozvinutí nebo užití souboru elementárních faktů euklidovské geometrie a k procvičení matematické indukce, aby se doplnil důkaz pro všechny generace trojúhelníků. Budou všechna prázdná místa mezi trojúhelníčky někdy „ucpána"? To znamená: dosáhne někdy bujení vycházející od jednoho vrcholu trojúhelníka-prapředka až k porostu vzešlému od jiného vrcholu, nebo jej snad dokonce přesáhne? Je pozoruhodné, že i tento problém používá jen elementární geometrii a porozumění součtu $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$.

### 3.2.5. Příležitosti k předkládání problémů

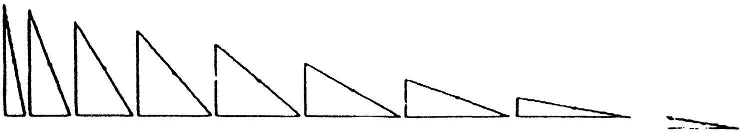
Studium konfigurací trojúhelníků otočených o 180° vzhledem ke svému rodiči klade odlišné, avšak příbuzné otázky. To platí i o ne-trojúhelnících (např. o čtvercích nebo pravidelných pětiúhelnících). Zkoumáním těchto „větších ornamentů" dostáváme bohatší domněnky a věty.

## 3.3. Vyjádření faktů pomocí funkcí

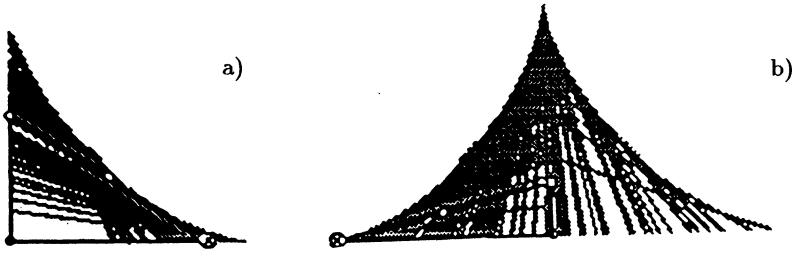
### 3.3.1. Pohled na větu jako na funkci

Jeden heuristický postup vymýšlení experimentů záleží v tom, že se pokoušíme přeformulovat statické výpovědi o nějakém faktu jako závislost na nějakém proměnném prvku. To často vyplývá z pokusů o nalezení vhodného vizuálního zobrazení faktu. Následující dva příklady ilustrují, jak takové přeformulování může vést od zdánlivě izolovaného faktu k množství navzájem souvisejících matematických idejí.[12])

[12]) První příklad je upraven z [6], druhý z [3].



Obr. 10. Na obrázku je vidět osm pravoúhlých trojúhelníků se stejně dlouhými přeponami s vyznačenými středy. Jsou uspořádány tak, aby se ukázala změna přilehlých úhlů. Bohužel obrázek však ukazuje jen málo (nebo nic) o závislosti středu přepony na vrcholu pravého úhlu.




Obr. 11.

Následující věta se často vyskytuje ve středoškolských učebnicích geometrie:

| |
|---|
| VĚTA 1. Střed přepony pravoúhlého trojúhelníka je stejně vzdálen od všech tří vrcholů trojúhelníka. |

Pokud jde o slovní vyjádření, věta je prostě tady. Pokus o její *vizuální* znázornění nám však hned připomene, že se výrok týká *všech* pravoúhlých trojúhelníků: jediný obrázek nestačí.

Mnoho vět, jako je tato, má v sobě jasný dynamický smysl. Musíme se naučit hledat to implicitní „pro všechny“ ve formulacích týkajících se nejen pravoúhlých trojúhelníků. Výraz „pro všechny“ identifikuje potenciální proměnnou a vede k funkcionálnímu přetvoření věty: v tomto případě jde o zobrazení z množiny všech pravoúhlých trojúhelníků. Co však může charakterizovat toto zobrazení a jak můžeme uspořádat množinu všech pravoúhlých trojúhelníků, abychom tuto funkci „viděli“?

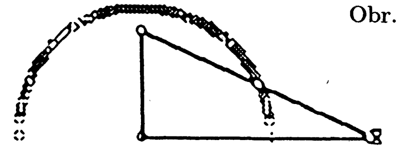
Jeden způsob je, že zvolíme pevně délku přepony, zobrazíme všechny příslušné pravoúhlé trojúhelníky a pak je uspořádáme podle velikosti jednoho úhlu. Tak si můžeme představit (viz [21], [23], [24]) dynamickou konstrukci, v níž sledujeme stopu těžiště pravoúhlého trojúhelníka s danou přeponou, zatímco ostatní vlastnosti trojúhelníka se mění v závislosti na některém parametru, např. na délce odvěsny (obr. 10).

Na papíru můžeme stěží udělat více než jen ukázat navzájem oddělené „snímky“ této animace, abychom ukázali uvažovanou množinu; avšak ve smyslu vizuálním toho mnoho nedosáhneme.

S použitím programu *Geometer's Sketchpad* můžeme nakreslit množinu poloh přepony při pohybu koncového bodu přepony podél základny trojúhelníka (obr. 11a). Příslušné polohy jsou zde vyšrafovány. Pohybuje-li se koncový bod přepony vlevo od svislé odvěsny (přičemž obrátíme orientaci vodorovné odvěsny), vidíme příslušný diagram na obr. 11b. Z obrázků vytvořených proto, abychom zviditelnili naši větu, pak již vyplývají další hypotézy.

Stojí za zamyšlení i otázka, jak obrázek 11 a pocit pohybu jím navozený může ovlivnit to, co Shlomo Vinner nazval žákovou *představou pojmu* funkce ([17], [18]). I když tato funkce může pochopitelně být vydávána za zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (např. za závislost sklonu přepony na délce základny), žák to téměř určitě takto nevnímá. Pro něho je proměnnou poloha bodu v rovině a funkční hodnotou je poloha jisté úsečky. Kromě toho definice této funkce zahrnovala jen geometrické činnosti: to určitě není stereotyp „funkce", která je definována souborem symbolů uspořádaných podle pravidel algebraické syntaxe.

Vraťme se nyní k účelu experimentu. Tvrzení věty se týkalo středu přepony. Sledujme tedy pohyb tohoto bodu, jestliže přepona mění svou polohu tak, že její koncové body kloužou po přímkách odvěsen a délka přepony zůstává zachována. Je-li dráha skutečně taková, jakou se zdá být, tj. kružnice se středem ve vrcholu pravého úhlu, pak existuje určitá daná vzdálenost $R$ od tohoto vrcholu. Jakmile se přepona blíží vodorovnému ramenu, mizí svislé rameno do středu kružnice. Ze spojitosti pohybu tedy usuzujeme, že $R$ se rovná polovině přepony (obr. 12). Takto je věta podpořena experimentem (*za předpokladu*, že dráha bodu je kružnice), avšak s novými vhledy.



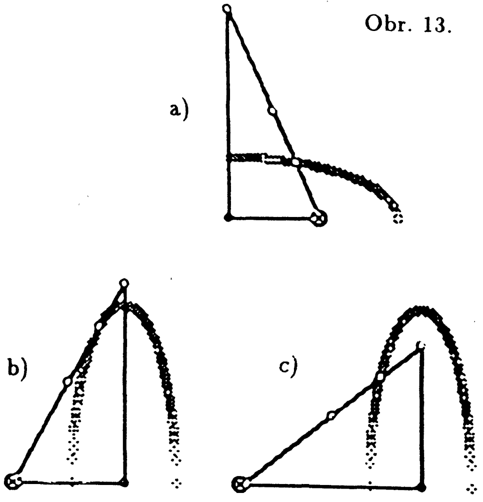
Obr. 12.

Heuristika přeměňování statických faktů v dynamické vizuální znázorňování napomáhá i jiným způsobům experimentování. Slovní výroky zřídkakdy lákají k experimentování. Např. následující výrok je zřejmě chybný:

| |
|---|
| Každý bod přepony pravoúhlého trojúhelníka, který není jejím středem, je stejně vzdálen od všech tří vrcholů pravoúhlého trojúhelníka. |

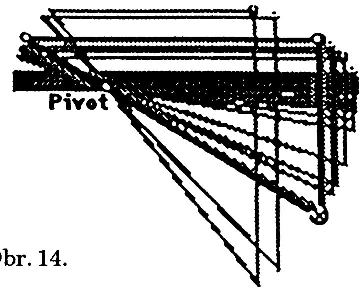
Avšak provést příslušnou změnu *v konstrukci funkce* je zcela rozumné a takové konstrukce téměř *prosí* žáky, aby si trochu pohráli.

Experimentování soustředí naši pozornost na *proces a algoritmus*, avšak takové soustředění naopak napomáhá experimentování. Jestliže *vytváříme* speciální případy nějaké věty použitím algoritmu, je zcela snadné změnit tento algoritmus a ptát se, jaké nové věty tím vzniknou. Např. co bychom viděli, kdybychom sledovali dráhu bodu ležícího v jedné čtvrtině nebo ve čtyřech pětinách přepony místo v jejím středu? (Obr. 13.)




Obr. 13.

Vhled do tohoto experimentu získáme přemístěním stanoviště. Když se experiment prováděl, pociťovali jsme to tak, jako bychom byli pozorovateli na planetě umístěné ve vrcholu pravého úhlu a pozorovali družici na přeponě, která se otáčí kolem nás. Avšak pozorovatelé na družici by viděli jiný obraz. Zdálo by se jim, jakoby *oni sami* byli pevným bodem. Přepona by se otáčela kolem jejich stanoviště a odvěsny by zachovávaly svůj směr (ačkoli by se jejich délky a polohy měnily). Když nyní soustředíme pozornost na vrcholy místo na strany, uvidíme nový dynamický obraz (obr. 14).

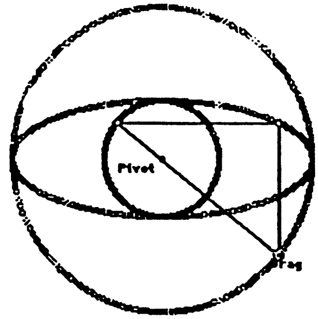



Obr. 14.

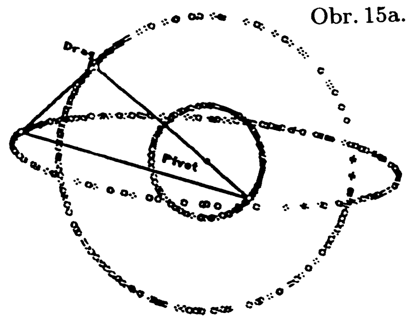
Tento obrázek ukazuje, co je nesnadné sdělit jakýmkoli statickým způsobem: oba koncové body přepony vykreslují kružnice různých poloměrů a vrchol pravého úhlu — družice, jejíž dráhu zjišťujeme — je vždy dán vodorovnou projekcí z jedné kružnice a svislou projekcí z druhé (obr. 15a, b). To dává vzniknout nové myšlence, která by popř. mohla vést k vzorcům $x = \alpha \cos \vartheta$, $y = \beta \sin \vartheta$. Avšak žáci mohou použít, zkoumat a pochopit *algoritmus* — tím, že vytvářejí trojúhelníky a určitým postupem je zobrazují — dříve než se seznámí s algebrou parametrických rovnic, včetně potřebných goniometrických funkcí.

Dynamický přístup a heuristika „kutilství" jsou účinné metody vedoucí ke kladení otázek.

Co by se stalo, kdyby konstantní úhel mezi dvěma projekcemi koncových bodů „přepony" nebyl 90°, ale řekněme 60° (obr. 15b)? Zase by se zdálo, že družice opisuje elipsu, avšak s nakloněnými osami. *Je to* stále ještě elipsa? Pokud ano, jaký by byl úhel sklonu v závislosti na úhlu projekce?




Obr. 15a.




Obr. 15b.

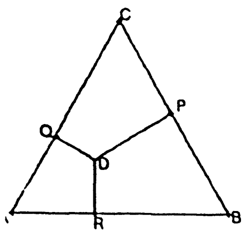
### 3.3.2. Klasická věta vyrůstá z experimentu v optimalizaci

Heuristika přístupu ke geometrickým Pravdám, jako k funkcím podmínek, ve kterých jsou definovány, je tak účinná, že si zaslouží uvedení druhého příkladu. Tak jako v prvním případě můžeme i nyní vidět, že funkce vyvěrá z klasické euklidovské věty. V tomto případě však budeme postupovat opačně. Podíváme se, jak věta vzniká trochu překvapujícím způsobem z funkce.

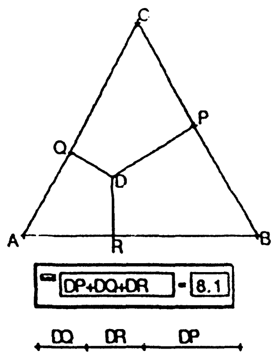
Před několika lety byl žák Richard postaven před úlohu ve standardizovaném testu: Je dán rovnostranný trojúhelník se stranami o délce 10 a uvnitř trojúhelníka je dán bod $D$ (obr. 16). Má se určit součet vzdáleností bodu $D$ od stran trojúhelníka. Otázka předpokládala znalost klasické věty:

VĚTA 2. Součet vzdáleností vnitřního bodu rovnostranného trojúhelníka od jeho tří stran se rovná výšce trojúhelníka.

Avšak Richard tuto větu neznal.




Obr. 16a.




Obr. 16b.

Protože se Richard nemohl opřít o žádné konkrétní znalosti, uvažoval takto: Protože problém neříká nic zvláštního o bodu $D$, mohl bych ho zvolit kdekoli. Richard zvolil bod $D$ zcela těsně u vrcholu $C$, kde dvě ze tří vzdáleností byly téměř nulové a třetí se téměř rovnala výšce trojúhelníka. Usoudil tedy, že odpovědí na otázku musí být velikost výšky trojúhelníka, kterou by dokázal snadno určit.

Richard předpokládal, že funkce definovaná pro trojúhelník a jeho vnitřek přiřazením $D \longmapsto DP + DR + DQ$ je spojitá a konstantní.

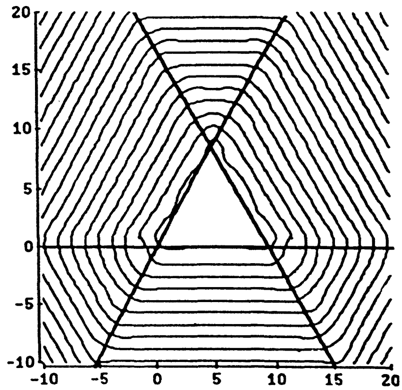
Jeho předpoklad, že funkce je konstantní, vyplynul z psychologie standardizovaného textu. Avšak jeho předpoklad, že je to funkce spojitá, byl výsledkem jeho schopnosti vykonat myšlený pokus, při němž „pohyboval bodem $D$" uvnitř trojúhelníka, a viděl, že malé změny v poloze bodu $D$ vedou jen k malým změnám v součtu vzdáleností bodu $D$ od stran. Nepřekvapuje, že většina žáků si neuvědomuje skutečnost, že nějaká funkce je konstantní. Avšak naše zkušenost se žáky nám říká, že mnozí z nich měli také potíže s vizualizací dynamiky, kterou Richard úspěšně provedl ve své hlavě.

Richard se projevil jako mimořádný žák, a to proto, že byl schopen takového druhu uvažování a dokázal provést určité myšlené experimenty bez jakýchkoli předcházejících zkušeností získaných ve vyučování z podobných pokusů provedených rukama a za použití zraku. Věříme, že mnoho žáků by se naučilo provádět podobné myšlené pokusy, kdyby měli dostatek zkušeností s jejich prováděním v konkrétní formě. Při použití vhodného softwaru mohou žáci navrhovat své vlastní experimenty, získávat „cit" a „vizi" pro jejich dynamiku a rozvíjet schopnost uvažovat pomocí představy o spojitosti, kterou prokázal Richard.

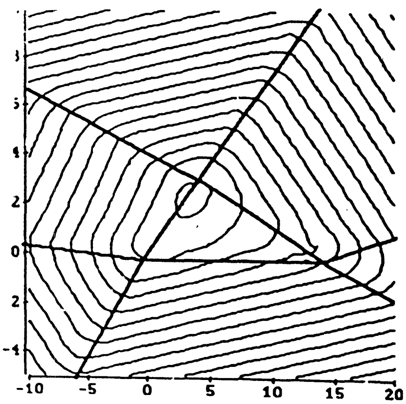
Počítáme s tím, že zařadíme tento konkrétní experiment jako součást okruhu otázek zaměřených na optimalizaci a týkajících se trojúhelníků. Široká otázka by mohla být položena takto: Který bod má celkovou vzdálenost od tří stran *daného trojúhelníka* minimální? Žáci by mohli provést experiment tak, že by pohybovali bodem $D$ všude uvnitř trojúhelníka a zkoumali by vliv polohy bodu $D$ na součet vzdáleností a na individuální příspěvky délek $DQ$, $DR$, $DP$ k tomuto součtu (obr. 16b). Spojitost této funkce se stává zřejmou, jakmile se začne s bodem $D$ pohybovat. U různostranných trojúhelníků žáci zjistí, že bod minima se nachází ve vrcholu trojúhelníka, který leží proti nejdelší straně. Jasně se však objeví otázka: Jak to vypadá v rovnoramenných trojúhelnících? Existují dvě nejlepší polohy? Co se děje, je-li bod $D$ mezi nimi? A v trojúhelníku rovnostranném překvapí, že ačkoli individuální příspěvky úseček $DQ$, $DR$, $DP$ se mění s polohou bodu $D$, jejich *součet* se zdá být konstantní pro všechny polohy bodu $D$ uvnitř trojúhelníka.

Z těchto experimentů může vyplynout mnoho hypotéz. Avšak jeden směr zvláště dobře ilustruje interakci mezi různými matematickými pohledy a prostředky.[13])

Dokonce i v případě rovnostranného trojúhelníka, kdy součet vzdáleností bodu $D$ od tří stran se zdá být konstantní při všech polohách bodu $D$ uvnitř trojúhelníka, musí se tento součet nutně zvětšit, pohybujeme-li bodem $D$ vně dosti daleko od tohoto trojúhelníka. Tedy i pro rovnostranný trojúhelník existují kromě minima i jiné hodnoty této funkce a tyto hodnoty můžeme zkoumat. Rádi bychom věděli, jaké je geometrické místo bodů odpovídající některé z těchto jiných hodnot.




Obr. 17a.




Obr. 17b.

Jeden způsob vizualizace těchto hodnot je pozorovat *vrstevnice* neboli *úrovňové křivky* funkce.

Na obr. 17a je v kartézské rovině dán rovnostranný trojúhelník o straně 10. Jemné křivky a roztřesené čáry v obrázku jsou výsledkem nepřesností v grafickém programu, ale i takový obrázek nám dovoluje vyslovit hypotézu, že pro rovnostranný trojúhelník jsou vrstevnicemi šestiúhelníky, jejichž vrcholy leží na prodloužených stranách trojúhelníka.

[13]) Jiné aspekty tohoto problému a celou řadu činností vztahujících se k optimalizaci, které v sobě zahrnují uvedený problém, lze najít v [3].

Třebaže jsme dospěli k této domněnce experimentálně, je dosti snadné ji ověřit geometrickou úvahou. Např. trojí symetrie obrysových čar se bezprostředně vysvětlí symetrií daného trojúhelníka.

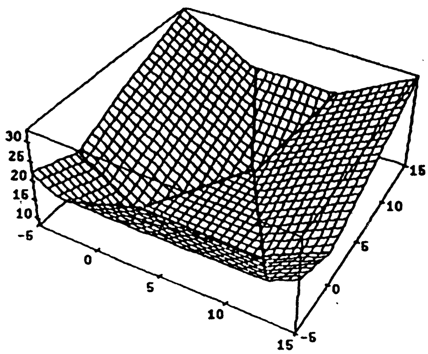
Co se však stane, když trojúhelník není rovnostranný? Např. v obr. 17b mají vrcholy trojúhelníka souřadnice (0,0), (15,0), (4,3).

Experimenty provedené s použitím *Inventoru* ([24]) nás přesvědčují, že (při omezení se na vnitřek a strany trojúhelníka) funkční hodnota je minimální, když bod $D$ je ve vrcholu trojúhelníka ležícím proti nejdelší straně, a maximální, když bod $D$ je ve vrcholu trojúhelníka ležícím proti nejkratší straně. Vrstevnice se zdají potvrzovat toto pozorování, avšak jinak jsou velmi tajuplné.

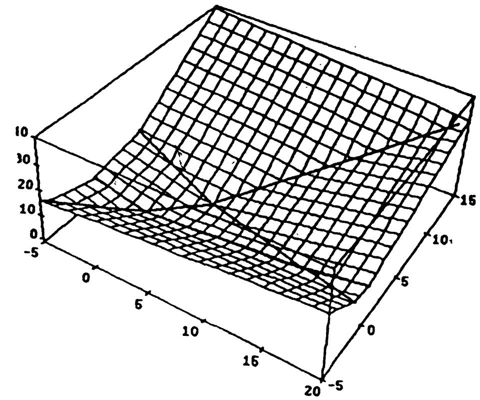
Tyto vrstevnice opět připomínají šestiúhelníky, pokud lze vůbec zjistit nějaký řád ve zmatené spleti na obrázku; avšak tvary a polohy těchto šestiúhelníků se zdají být zprvu téměř úplně nezávislé na trojúhelníku, který je zplodil.

Jiný druh grafu, s jakým se obvykle nesetkáváme v kurzech geometrie, nám napomáhá vysvětlit toto tajemství a vede nás zpět ke geometrickým úvahám. Představme si nyní náš trojúhelník umístěný v rovině $(x, y)$. V každém bodě $(x, y)$ zjistíme hodnotu funkce a zobrazíme ji jako příslušnou výšku $z$ nad tímto bodem.

Jak jsme mohli očekávat, případ rovnostranného trojúhelníka vypadá uspořádaně. Grafem funkce je nádoba s rovinnými stěnami. Body grafu umístěné přímo nad trojúhelníkem jsou ve stejné výšce, protože hodnoty funkce jsou v této oblasti konstantní. Vrstevnice se dají interpretovat jako vodorysky podél stěn. A úvahy o tom, proč jsou stěny *rovinné* a nikoli zakřivené plochy, nám dávají určitý vhled pro zkoumané funkce (obr. 18a).



Obr. 18a.



Obr. 18b.

Chceme-li zkoumat případ obecného trojúhelníka, můžeme použít stejnou techniku vizualizace.

Stěny nádoby jsou opět rovinné, ale dno nádoby — tj. vnitřek trojúhelníka — již není vodorovné, protože hodnoty funkce uvnitř trojúhelníka nejsou konstantní.

Tato vizualizace nám napomáhá pochopit, proč vodorysky podél stěn nejsou rovnoběžné se stranami trojúhelníka. A zjistíme i více. Všimneme-li si, že minimální hodnota této funkce je v nejnižším bodě této nádoby, tj. v jednom z vrcholů trojúhelníka, vidíme také, že vrstevnice v bezprostředním okolí tohoto bodu musí být čtyřúhelníky, nikoli šestiúhelníky (obr. 18b). Je to proto, že v bodě minima se protínají jen čtyři roviny.

## 4. Návyky myšlení

Když jsme na začátku zdůvodňovali potřebu přechodu k jinému stylu, šlo nám o získání více žáků pro širší matematické vzdělání prostřednictvím geometrie. Naším cílem je ve skutečnosti víc než to. Rádi bychom viděli, aby tato početnější a rozmanitější skupina žáků měla nejen více matematických vědomostí, ale i více matematické schopnosti. Co však činí někoho „schopným uživatelem" matematiky? To jistě není ve schopnosti odříkávat vzorce nebo provádět algoritmy. Není to ani ve znalosti „faktů" moderní matematiky. To všechno *je* přínosem pro člověka s opravdovými matematickými schopnostmi, ale samo o sobě to není nutné ani postačující. Každý z nás poznal lidi, kteří prostudovali spoustu matematiky, ale mají příliš málo intuice k tomu, aby mohli zaútočit na nějaký problém. Naopak všichni známe lidi s malým vzděláním v matematice, kteří jsou schopni získat neortodoxní a elegantní řešení problémů zdánlivě z ničeho.

Matematická schopnost se nejlépe popíše jistým výčtem *návyků myšlení*. Lidé s matematickou schopností zkoumají náčrtky, provádějí myšlené experimenty, hrají si se skutečnými i představovanými stroji, vynalézají věci, vyslovují rozumné domněnky, vášnivě diskutují o intelektuálních jevech, pěstují jazykové hry, přemýšlejí o strategiích a *vizualizují* věci, i když tyto „věci" nemají samy vizuální povahu.

Naslouchejte matematikovi, když vypravuje o tom, jak se dělá matematika, nebo se podívejte na tabuli v místnosti, ve které se právě konala matematická diskuse. Uslyšíte a uvidíte velmi málo o číslech, o přesnosti a preciznosti. Místo toho najdete vizuální obrazy, uslyšíte o tvarech a rytmech výpočtů, o pohybu a strojích, o znovuuspořádání částí v jeden celek. Matematika je způsob *pohledu* na věci.

Je možné vypracovat učební osnovy tak, aby ztělesňovaly tuto skutečnost. V projektu *Seeing and Thinking Mathematically*, což je projekt nových učebních osnov pro střední školy připravovaný v EDC a sponzorovaný NSF, se považuje rozvoj matematických návyků myšlení za primární cíl jednotlivých částí osnov. Aktivity jsou výslovně zaměřeny na to, aby pomáhaly žákům nalézat modely, vyslovovat a zpřesňovat hypotézy, ověřovat své domněnky před skupinou mladých matematiků ve třídě a zacházet s vizuálním zobrazováním jako s ústřední součástí matematického objevování, vynalézání a vysvětlování.

Posuzujeme-li učební osnovy matematiky z hlediska návyků myšlení, jsou kritéria pro volbu obsahu a souvislosti zcela odlišná od typických priorit užívaných při vytváření školních kurzů a programů. Posuzujeme-li učební osnovy pro střední školy z těchto hledisek, vede nás to k vyhledávání témat a aktivit, které umožňují žákům navzájem provázat různé části matematiky, užívat ústřední ideje, jako je funkce a iterace, v pestré rozmanitosti souvislostí, užívat matematickou symboliku jako vyjadřovací prostředek, znovunalézat důležitá témata ve zdánlivě různých situacích a, což je snad nejdůležitější, rozvíjet zručnost při vizualizaci jevů.

Příklady uvedené v tomto článku splňují tyto požadavky. Myšlené experimenty vyžadující od žáků přeskupování geometrických objektů v jejich myslích, vedou přirozeně k aktivitám, které je nutí k přemýšlení o „vidění a cítění" funkcí při užití prostředků, jako jsou *DynaGraf, Function Machines* a nástroje dynamické geometrie. Myšlené experimenty, jako je např. Wittgensteinův [20], vyžadují, aby žáci zobrazovali činnost nějakého stroje; software usnadňuje shromažďovat obrazy výsledků a hledat teoretické základy pro to, co obrázky znázorňují. Klasická zábava s kulečníkovým stolem a její rozšíření na tanec a pohyb jsou podobnými lákadly pro žáky, aby experimentovali, hledali hypotézy a jejich zdůvodnění. V průběhu hledání hypotéz a zdůvodňování narážejí žáci na teorii čísel, na geometrii, fyziku a analýzu.

Iterace geometrických konstrukcí poskytují žákům kolbiště k získávání teoretických výsledků uvažováním o algoritmech, které generují příslušné obrázky. Důkaz, který provedla Amy, je totéž, co pečlivá analýza zrodu jejích obrázků — Wittgenstein to nazývá „obraz experimentu“.

Převedením věty o pravoúhlých trojúhelnících na dynamický experiment žáci nejen rozvíjejí hlubší pohled na výsledek a jeho vysvětlení; objevují také způsoby, jak si *pohrát* s experimentem tak, aby byli inspirováni k novým výsledkům a novým vysvětlením. Současně žáci rozvíjejí cit pro spojité funkce, který vede k intuitivnímu užívání jemných vlastností reálných čísel. Tyto postupy dobře znal a s oblibou používal Euler, ale v dnešních učebních osnovách, soustředěných na algebraický formalismus, se ztrácejí. Stejně tak Richardova funkce dodává statickému geometrickému výsledku životnost a obecnost. Žáci poznávají, jak se výsledek mění, když se původní omezení zmírní (když se například již nepožaduje, aby trojúhelník byl rovnostranný). To jim poskytuje souvislou řadu *teorémů*, o nichž mohou přemýšlet. Popsané aktivity týkající se Richardovy funkce ukazují dosti dramaticky, jak různé postupy, kterými lze vizualizovat nějaký jev, mohou poskytnout nové vhledy a objasňovat stará tajemství.

Toto je dobrá matematika. Ale je to geometrie? V tradičním školském slova smyslu ne, je to však geometrie v širším pojetí. Tyto činnosti vyžadují, aby žáci rozvíjeli cit pro vlastnosti prostoru a jeho měření, povzbuzují žáky k rozvíjení mnoha klasických témat euklidovské geometrie. Vyžadují také od žáků, aby vizualizovali jevy více způsoby, aby používali prostředků z celého spektra matematiky a aby pokročili od objevování konkrétních dat směrem k vysvětlování jevů. A v tom je hlavní užití žákovských experimentů. Při vyvíjení našeho projektu učebních osnov [22] se snažíme učinit podobné aktivity jádrem nového pojetí „ucelené geometrie“. Tato geometrie připoutává žáky k návykům myšlení, které jsou jádrem matematického výzkumu.

## 5. Vytváření učebních osnov

Tento článek věnuje zvláštní pozornost otázce, co je to geometrie a jakou může hrát úlohu v matematickém vzdělávání. Na geometrii se díváme z velmi širokého pohledu, a místo abychom ji používali samu o sobě, jako jakýsi vnitřně koherentní matematický mikrosvět, upínáme většinu svých nadějí k diskutabilní, avšak zatím neověřené tezi, že tato široká „geometrie“ může přivábit více žáků — i více rozmanitých skupin žáků — k bohatší a hlubší matematice.

Jak jsme uvedli v úvodu, ověření naší teze vyžaduje vytvoření alespoň jedněch učebních osnov se správnými vlastnostmi a jejich vyzkoušení na skutečných žácích v reálných třídách, s reálnými učiteli, v reálných (a často striktně omezujících) podmínkách skutečných škol ve skutečných obcích.

Vytvoření takových učebních osnov vyžaduje, abychom věnovali pozornost více stránkám než jen „esenci“, kterou jsme popsali výše. Aktivity popsané v učebních osnovách musí nejen účinně oslovovat žáky, ale tyto aktivity i celková struktura učebních osnov musí být také přijatelné pro učitele. Příslušným problémům jsme věnovali se svými kolegy z EDC velkou pozornost. Nedávno jsme obdrželi od nadace National Science Foundation (NSF) finanční podporu k řešení úkolu Connected Geometry Project (Projekt propojené geometrie), v jehož rámci budou vypracovány a vyzkoušeny jedny takové učební osnovy.

Z výsledků, které musí být podle našeho názoru zdůrazněny v naší práci, popišme stručně tři:

- Učební osnovy musí podporovat změny ve vyučování. Musí se to však dít tak, že začneme na současné úrovni učitele, musíme tohoto učitele získat a pomáhat mu v růstu a, což je velmi důležité, udržet a *podporovat* jeho růst tím, že budeme růst spolu s učitelem.
- Učební osnovy musí respektovat vlastní potřeby, touhy a schopnosti učitele, pokud jde o jeho profesionální růst jak po stránce obsahu, tak po stránce metodické.
- Učební osnovy musí nabídnout v matematice jiné hledisko, než je to, které je vedeno jen fakty. Navrhujeme zkultivovat soubor „návyků myšlení“ v něco, jako je „matematická metoda“, analogická „vědecké metodě“. Ačkoli se tato metoda ve školách někdy redukuje na přehnaně zjednodušující a nejisté kroky, zůstává v podstatě rozumným popisem práce vědce.

### 5.1. Učební osnovy, které mají pěstovat a pak podporovat změny ve vyučovací činnosti

Učební osnovy, které pomáhají učitelům k provedení přechodu od tradičních učebních osnov geometrie k šířeji chápané geometrii, musí respektovat potřebu učitelů provádět tyto změny v souladu s jejich vlastním postavením i se situací v jejich školách. Zpočátku musí sloužit učitelům, jejichž osobní zkušenosti jsou zakořeněny v tradičních učebních osnovách, v tradičním stylu vyučování, v tradičním gnozeologickém přesvědčení a tradiční matematické přípravě. Mají-li však učební osnovy pomáhat učitelům k růstu a změně jejich myšlení, nemohou zůstat statické. Musí také růst, přizpůsobovat se změnám, které vyvolávají, a musí se zde vytvořit zpětná vazba s učiteli při provádění takových úprav. Aby se učební osnovy staly obojím — modelem pro budoucnost i katalyzátorem pro přechodné období — musí současně ztělesňovat vizi „budoucích učebních osnov“ a být použitelné *nyní*.

To je veliký úkol. Pokoušíme se nyní vyvinout strukturu učebních osnov, které budou podněcovat změny, avšak nebudou těmito změnami zastarávat. Většina tohoto našeho snažení se zaměřuje k tomu, aby učitelé byli vybaveni zvláštním elektronickým zařízením — *plánovačem učebních osnov* — které jim umožní vstup do databáze geometrických aktivit pomocí různých rejstříků. Některé z těchto rejstříků budou vázány na tradiční učební osnovy a texty, takže učitelé tam najdou činnosti, jako je například užití Pythagorovy věty nebo odvození klasifikace čtyřúhelníků. Jiné rejstříky umožní učitelům získat přístup k aktivitám, které spojují geometrii s analýzou nebo s teorií čísel. A ještě jiné rejstříky budou třídit činnosti podle toho, jaké způsoby myšlení podněcují. Takto mohou učitelé vytvářet své vlastní vize učebních osnov zahrnující jak pojetí struktury učiva, tak i úvahy o tom, jak se žáci předmětu naučí. Zatímco na začátku budou učitelé se zpožděním zkoumat a promýšlet plány učebních osnov, které jsme vytvořili *my*, pro budoucnost předpokládáme, že učitelé budou sami vytvářet své vlastní „plány“ vhodné pro jejich vlastní cíle a vlastní žáky.

### 5.2. Profesionální růst učitelů

Právě tak jako žádné učební osnovy nemohou být používány efektivně, jestliže učitelé nevidí jejich matematický cíl, nemohou mít ani ty nejlepší materiály úspěch, jestliže je učitelé nepovažují za osobní oslovení a výzvu. Naše vlastní učitelská zkušenost i naše spolupráce s jinými učiteli po řadu let nám objasňují, že nejlepší cestou pro učitele, jak si oblíbit určité učivo z matematiky, je, když si vytváří toto učivo sám. Naše servisní materiály budou požadovat od učitelů, aby to dělali právě takto. Budeme jim předkládat výzvy ve stejném duchu, jako byly ty, které jsme předkládali žákům, a budeme anotovat výzvy zaměřené k matematice, k pedagogice i ke kultuře práce ve třídě. Protože učitelé spolupracují v matematice se svými kolegy, budou se moci také navzájem poradit o průběžných komentářích, situačních studiích a videozáznamech ukazujících, jak jejich zkušenosti z práce v matematice se mohou odrážet ve zkušenostech jejich žáků.

Kromě rozvíjení nové matematiky budou učitelé navíc rozvíjet i nové pohledy na jim již známou matematiku s využitím „plánovače osnov“. Listujeme-li si v rozmanitých rejstřících, můžeme vytvořit nové myšlenkové asociace. Stejná činnost může být použita při studiu pojmu plošný obsah a při zkoumání vlastností spojitosti. Jednoduchá geometrická konstrukce může být využita k vytvoření pojmu matematické indukce. Provedení podobných propojení má největší naději při vyučování, jestliže se učitelům umožní hrát aktivní roli při rozvíjení jejich vlastní výuky a jestliže se jim k tomu dodají potřebné prostředky.

### 5.3. Rozvíjení matematické metody

Ve většině oborů musíme roky studovat a specializovat se, než získáme přehled a zkušenosti postačující k porozumění současným vědeckým zájmům výzkumníků v určitém oboru. Avšak dlouho předtím, než žáci dosáhnou stadia, kdy mohou pochopit *témata* zájmu výzkumníků, měli by umět používat základní *metody* oboru. Např. přestože existuje mnoho nedostatků ve vyučování přírodním vědám ve školách, učitelé přírodních věd se skutečně snaží pomoci rozvinout smysl pro způsob práce vědců.

To se ve většině případů v učebních osnovách matematiky neděje. Tam není nikde zmínka o „matematické metodě“ poznávání věcí; pokud se nějaké metody objevují, týkají se pouze postupů na nízké úrovni umožňujících rutinní výpočty. Např. učitelé jsou si jistě vědomi toho, že „matematikové dokazují věci“, avšak ústřední úloha přesného ověřování správnosti v matematickém výzkumu (což odlišuje matematiku téměř od každé jiné disciplíny) se zřídkakdy sděluje žákům.

To je snad nejnápadnější ve vyučování geometrii, kde se od žáků tradičně požaduje řešení nerutinních problémů, a proto geometrie umožňuje otevření diskuse o určitých základních matematických metodách. Avšak během času měly geometrické kurzy tendenci zapadnout do několika dobře rozpoznatelných kategorií:

- Pokusy o věrné kopie Euklida. Jsou to dogmatické výklady již vybudované matematiky používající axiomatické metody; objevují se zde definice, teorémy, několikařádkové důkazy, řady důsledků.
- Euklides bez důkazu. Tyto kurzy sledují v podstatě stejnou cestu jako formálnější příbuzné postupy, avšak hlavní geometrické výsledky jsou obvykle jen vysloveny místo toho, aby byly odvozeny. Hlavní důraz se klade na „aplikace“: žáci dostávají často důmyslné úlohy vyžadující užití vzorců pro obsahy různých ploch a pro Pythagorovu větu.
- „Induktivní“ geometrie. Slovo induktivní je zde v uvozovkách, protože nemá nic společného s matematickou indukcí. Vztahuje se k uvažování směrem od zvláštního k obecnému, k dělání závěrů na základě experimentu, k metodě „objevování“.

Charakteristické pro tyto metody výuky je ostré rozlišování mezi tím, jak se výsledek obdrží a jak se formálně zavede. Každá z nich má svůj vlastní přístup, avšak společné hledisko všech tří spočívá v tom, že ověřování výsledku je odděleno od jeho formulace.

To však matematiky neuspokojuje. Vědí, že snaha po objasnění je ústředním postupem v jejich výzkumu. Vědí, že hledání fungujícího ověření právě se vynořujících a jen napůl formulovaných skutečností, jak vznikají v průběhu experimentů, jim napomáhají jemně doladit hypotézy a navrhnout nové experimenty. Matematikové vědí, že ve skutečném životě, ať již v matematice nebo mimo ni, rozlišování mezi empirickými a teoretickými výzkumy vede k nezdaru.

Náš návrh učebních osnov bude založen na modelu. který zdůvodňuje tento základní rys matematické práce. Připravovaná technologie nám umožňuje plánovat aktivity, které vkládají do rukou žáků a učitelů účinné experimentální pomůcky. *Zaměření* těchto experimentů bude částečně určováno materiály, které vyvíjíme my, také však interpretacemi, které těmto materiálům dají učitelé. Hlavní věcí tedy je, že naše materiály sdělují *učitelům* smysl matematického cíle, který sledujeme, a pomáhají jim „strávit“ naše hledisko.

Toto hledisko umožňuje podívat se na geometrii i pedagogiku novým způsobem. Učitelé budou muset vidět, jak výsledky v geometrii dobře zapadají do obecnější matematické osnovy. Tak například výsledky vyplývající ze zobecnění věty 2 (čl. 3.3.2) se jeví jako pokusy o určení minimálních hodnot funkcí. Učitelé budou muset také přijmout hledisko, že budou výsledků dosahovat pomalu a postupně s tím, jak žáci budou vyvíjet hypotézy na základě experimentů, snažit se ověřovat své domněnky, vypracovávat nové experimenty na základě toho, čemu se naučili, a potom zpřesňovat své domněnky. Nejdůležitější (i nejnesnadnější) bude to, že učitelé budou muset pokládat rozvíjení *stylu práce* u svých žáků za primární cíl hodin matematiky. To je nový úkol pro učitele, totiž role zkušenějšího partnera žáků ve výzkumné práci, a to dává žákům novou naději.

Učební osnovy musí proto sedět na dvou židlích. Aby byly přijatelné ve třídách takových, jaké jsou, musí používat zavedenou měnu — objekty, fakty, geometrické metody — jak jsou *nyní* obecně známé ze střední školy. Avšak *každá* aktivita musí zcela zřetelně zviditelňovat matematické metody a způsoby práce. Proto žáci i učitelé (a rodiče a tvůrci osnov) musí být s to začít s pocitem, že to, co dělají, dělají kvůli geometrii, vidí však přitom širší rámec ji obklopující a musí být s to skončit s pocitem, že to, co dělají, dělají pro matematiku a že vidí vnitřní soudržnost geometrie v rámci matematiky.

## Literatura

*Články a knihy:*


[1] ARCAVI, A., NACHMIAS, R.: *Desperately looking for the focus.* Mathematics in school *19* (2), 1990, 19–23.

[2] BANCHOFF, T.: *Dimension.* Chapter in STEEN, L. (ed.): On the Shoulders of Giants. Washinghton, D. C.: National Academy Press 1991.

[3] CUOCO, A. A., GOLDENBERG, E. P.: *Mathematical Induction in a visual context.* In Press.

[4] CUOCO, A. A., GOLDENBERG, E. P.: *Reconnecting Geometry: A Role for Technology.* Proceedings of. St. Olaf Conference on Computers in Geometry Classrooms, June 24–25, 1992.

[5] EISENBERG, T., DREYFUS, T.: *On the reluctance to visualize in mathematics.* In: *Visualization in teaching and learning mathematics*, eds.: W. ZIMMERMANN and S. CUNNINGHAM. Washington, D. C.: Mathematical Association of America 1991.

[6] GOLDENBERG, E. P., LEWIS, P. G., O'KEEFE, J.: *Dynamic representation and the development of an understanding of functions.* In: DUBINSKY, E., HAREL, G. (eds): *The learning and Teaching of Functions.* Washington, D. C.: Mathematical Association of America. In press.

[7] HOFSTADTER, D.: *Gödel, Escher, Bach.* New York: Basic Books 1979.

[8] JACOBS, H. R.: *Mathematics, A Human Endeavor.* San Francisco: Freeman 1970.

[9] KLEE, V.: *Convex geometry in undergraduate instruction.* In: MALKEVITCH, J. (ed.): *Geometry's Future.* Arlington, MA: COMAP 1991.

[10] KLEIN, B. G.,BIVENS, I. C.: *In feature „Proof without words".* Mathematics Magazine *61* (4), 1988, p. 219.

[11] KRUTETSKII, V. A.: *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press 1976.

[12] LAKATOS, I.: *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press 1976.

[13] MAYER, R. E.: *Models for understanding.* Review of Educational Research (MPD) 1989.

[14] OLSON, M.: *A geometric look at greatest common divisor.* Mathematics Teacher, *84* (3), 1991, p. 202.

[15] SENECHAL, M.: *Visualization and Visual Thinking.* In: MALKEVITCH, J. (ed.): *Geometry's Future.* Arlington, MA: COMAP 1991.

[16] TALL, D.: *Intuition and Rigour: the role of visualization in the calculus.* In: W. ZIMMERMANN, S. CUNNINGHAM (eds.): *Visualization in Teaching and learning mathematics.* Washington, D. C.: Mathematical Association of America 1991.

[17] VINNER, S.: *Concept definition, concept image and the notion of function.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology *14* (1983), pp. 293–305.

[18] VINNER, S., DREYFUS, T.: *Images and Definitions for the Concept of Function.* J. Research in Mathematics Education *20* (4), 1989, pp. 356–366.

[19] WEEKS, J.: *The Shape of Space.* New York: Marcel Dekker 1985.

[20] WITTGENSTEIN, L.: *Remarks on the Foundations of Mathematics.* Cambridge, MA: MIT 1983.

*Software:*

[21] CABRI: *The Interactive Geometry Notebook. (Cabri Géomètre).* BAULAC, I., BELLEMAIN, F., LABORDE, J.-M., designers. Pacific Grove, CA: Brooks-Cole 1992.

[22] *Function Machines.* Cambridge, MA: BBN Laboratories 1989.

[23] *Geometer's Sketchpad.* N. JACKIW, designer. Berkeley, CA: Key Curriculum Press 1990.

[24] *Geometry Inventor.* BROCK, C. F., CAPPO (WINGS), M., ARBEL, A., ROSIN, M., DROMI (LOGAL), D., designers. Scotts Valley, CA: Wings for Learning; Kiryat Shmona, Israel: LOGAL 1992.

[25] *Math. Path.* G. KLEIMAN, designer. St. Louis: Milliken 1986.

Adresa autorů:

*Education Development Center*
*55. Chapel Street*
*Newton, MA 02160*
*USA*

---

## Academia film Olomouc ocenila Vlny

Výukový videofilm režiséra Jiřího Všetečky a spoluautorů L. Pekárka a M. Rojka *Vlny kolem nás* zvítězil na festivalu Academia film Olomouc v kategorii populárně naučných pořadů s přírodovědnou tematikou a získal cenu Jana Calábka. Tento pořad vyrobilo Videocentrum ČVUT v rámci grantu MŠMT prof. Ludmily Eckertové. Jde o první pořad plánované edice „Cesty k vědění“ fyzikální vědecké sekce Jednoty českých matematiků a fyziků.

Videofilm je doplněn textem, který prohlubuje pohled na jevy uvedené ve videofilmu a umožňuje tak opakované využití videofilmu na nižším i na vyšším stupni škol.

Mezinárodní porota ocenila mimo jiné názornost podání a didaktickou koncepci pořadu. Videofilm spojuje jevy, které se předvádějí v laboratoři, s jevy pozorovanými v přírodě. Pořad tím plní hlavní záměr autorů: získat zájem diváka o hlubší pohled na jevy, které denně pozoruje, a provokovat ho k zamyšlení o jejich fyzikální podstatě. Pořad byl koncipován tak, aby byl atraktivní nejen svým obsahem, ale i svou estetickou stránkou. Za zmínku stojí i skutečnost, že pořad vzniklý ve skromných podmínkách vysokoškolského televizního studia byl jediným, který získal ocenění poroty v konkurenci pořadů profesionálních televizních studií.

Videofilm včetně doplňujícího textu mohou zájemci objednat na adrese: Jednota českých matematiků a fyziků (prof. dr. L. Eckertová), MFF UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8, za režijní cenu 250 Kč.

*Redakce*