Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Peter Hilton

Zdánlivé protiklady ve vyučování matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 21 (1976), No. 6, 340--350

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138790

zátorská práce A. P. Juškeviče, která znamenala velice mnoho pro rozvoj moderní světové historiografie matematiky (ovlivnila také českou produkci v tomto oboru), pokračovala se stejnou intenzitou i po autorově sedmdesátce. K tomu přejeme A. P. Juškevičovi mnoho zdraví a sil.

Jaroslav Folta

vyučování

Zdánlivé protiklady ve vyučování matematice*)

Peter Hilton, Seattle

Úvod

Teorie i praxe výuky jsou dnes ve stadiu kvašení. Tradiční názory jsou napadány na všech stupních. Zvláště ti, kteří se staví za větší neformálnost a aktivnější podíl studentů na výuce, pochybují o vhodnosti tradičních způsobů vyučování. Tradiční výchovné normy jsou brány v potaz těmi, kdo tvrdí, že dosavadní kritéria příliš náruživě přejí lidem z akademického prostředí na úkor mužů praxe a že zavádějí nezdravou jednostrannost do našeho sociálního systému – stručně řečeno výchova plodí snobství. Tradiční obsah výuky je také ještě pod palbou těch, kteří si stěžují, že tento obsah vůbec neodpovídá potřebám a zájmům současné společnosti a že nové důležité a vzrušující oblasti lidských zájmů jsou v našem výchovném procesu opomíjeny prostě proto, že netvoří část systému vybudovaného dříve. Obrovské náklady na výchovu jsou činitelem, na který je veřejnost velmi citlivá, a způsobují, že mnohé skupiny lidí dávají najevo svou nespokojenost s nízkou úrovní výchovného procesu a navrhují nejrůznější ozdravné prostředky. Tytéž skupiny ze stejného důvodu trvají na vypracování kritérií úspěšnosti výchovného procesu použitelných prakticky kdykoliv tak, aby veškeré nedostatky mohly být včas odhaleny a nesprávné postupy, ať již se zřetelem k jednotlivým studentům či celému učebnímu plánu, mohly být co nejrychleji odstraněny a nepokazily tak celý výchovný proces. Mnozí si uvědomují, že výuka není vůbec přizpůsobena potřebám určitých skupin ve společnosti. Ve Spojených státech se silně argumentuje tím, že výchovný systém se musí přizpůsobovat potřebám neprivilegovaných, těch, jejichž mateř-

*) Článek je překladem textu přednášky, kterou autor proslovil dne 4. 12. 1975 na matematicko-fyzikální fakultě v Praze. Překlad pořídili Ladislav Bican a Oldřich Kowalski.

ský jazyk není jazykem vládnoucích vrstev, a potřebám příslušníků jiných menšin ve společnosti.*) Dalším argumentem v četných socialistických státech, stejně jako ve Spojených státech je, že na rozdíl od klasického modelu by zkušenosti získané ve školních lavicích neměly být tak příliš odlišné od podmínek, se kterými se žák setká v praktickém životě. Z této teze se pak vyvozují závěry týkající se jak přiměřeného obsahu výuky, tak i sociálního prostředí, v němž výuka probíhá. Dalším důsledkem tohoto starostlivého zájmu pak je, zejména ve Spojených státech, značný posun ve směru nazývaném „výchova k povolání".

Je přirozené a věci prospěšné, že teoretikové i praktikové se vyjadřují k problému z mnoha navzájem velmi odlišných hledisek. Najdou se i takoví, kteří se chvástají, že dokáží odhalit vady a nedostatky soudobého systému a že jsou schopni vypracovat univerzální návod na úspěšnou výchovu. Bohužel při nesporně zdravých pokusech o zkvalitnění výuky bylo již napácháno mnoho vážných chyb jak teoretických, tak praktických. Zůstává přitom neblahou skutečností, že právě vyučování je oblastí, v níž pravděpodobnost chyb je značně vysoká, přičemž každá chyba má vážné a dlouhotrvající následky.

V tomto pojednání se chci pokusit analyzovat některé z těchto chyb použitím schématu falešného protikladu. Ukazuje se totiž, že lidské myšlení se dostává poněkud na scestí, chce-li hledat univerzální lék na hluboké choroby společnosti. Upadá pak do systému protikladů buď anebo, přičemž argumentuje tím, že je-li daný systém nebo princip špatný, je ke zlepšení situace nutné nahradit jej systémem nebo principem právě opačným. Pokusím se v dalším ukázat, že mnohé takto vzniklé protiklady jsou falešné. Jinými slovy to znamená, že dvě pojetí, která jsou obvykle stavěna do protikladu, nemusí tvořit situaci buď anebo, protože i když obě pojetí jsou odlišná, v některých podstatných rysech se mohou shodovat, a jestliže se správně pochopí a použijí, mohou se ve skutečnosti vzájemně podepírat.

Poněvadž jsem matematik, dávám přednost výběru svých příkladů z vyučování matematice, ačkoliv věřím v možnost zobecnění na jiné disciplíny. Jistě je správné, začneme-li poněkud podrobněji studovat nějaký důležitý problém, zaměříme-li se na ty aspekty, ve kterých se můžeme považovat trochu za experty. Věřím, že sejdou-li se specialisté z různých oborů a porovnají své zkušenosti, pak se překvapivě mohou vynořit velké, široké a obecné pravdy. Naopak není správné ani užitečné, když se jednotlivec pokouší sám od sebe a bez konzultací s kolegy, pouze na základě jejich hypotetické zkušenosti, dojít k vlastním závěrům. Skutečně jsem se zhrozil opovážlivosti vědců, odborníků v určitém oboru, kteří se v otázkách výchovy bohorovně pletou do disciplín jim zcela cizích. Proto se neomlouvám za to, že se omezuji na diskusi o matematice a přírodních vědách, a zároveň věřím, že jiní ověří má pozorování v patřičné míře ve svých oborech.

Ve svém seznamu protikladů uvedu některé, které jsou všeobecně aplikovatelné, a jiné, u nichž sama formulace protikladu vychází z kontextu vyučování matematiky a přírodních věd. Nicméně opakuji, že ve svém rozboru všech těchto protikladů se omezím velmi úzce na tyto dvě oblasti vyučování.

---

*) Slovo menšina se zde užívá v technickém smyslu znevýhodněné podmnožiny komplementu množiny trubců.

Zde tedy předkládám neúplný seznam zdánlivých protikladů běžně se vyskytujících ve vyučování matematiky a přírodních věd.

vyučování × výcvik
dovednost × porozumění
užitečné vyučování × zábavné vyučování
strukturální výstavba × řešení problémů
axiomatika × konstruktivní metoda
umění × věda
čistá matematika × aplikovaná matematika

Mým záměrem je rozbor těchto sedmi protikladů. Během tohoto rozboru se mohou vynořit, jak jsem již poznamenal, jistá pozitivní doporučení pro učební plány a pedagogiku. Věřím, že tato doporučení budou ve skutečnosti souhlasit s principy podloženými experimentálním programem v matematice a přírodních vědách, na němž ve Spojených státech spolupracuji, a o kterém bych vám velmi rád řekl něco více. Nicméně, opět ve shodě se svou zásadou hovořit pouze o těch věcech, které skutečně důvěrně znám, budu vybírat mnoho svých příkladů na to, jak nesprávnou analýzou lze dojít k zdánlivým protikladům, přímo z vysokoškolské matematiky.

Formálně vzato, protikladem rozumíme rozklad množiny S na dvě vzájemné disjunktní podmnožiny P, Q; tedy

$P \cup Q = S$ – sjednocení množin P a Q je množina S

$P \cap Q = \emptyset$ – průnik množin P a Q je prázdná množina $\emptyset$.

(Například množina S všech žijících lidí je disjunktním sjednocením podmnožiny P všech žen a podmnožiny Q všech mužů.) Proto k tomu, abychom ukázali, že jde o zdánlivý protiklad, musíme buď ukázat, že $P \cup Q$ je vlastní částí S, tj. že zadané možnosti nejsou vyčerpávající, nebo že $P \cap Q$ není prázdné, tj. že zadané možnosti se vzájemně nevylučují. Právě tímto druhým způsobem budeme v dalším demonstrovat nesprávnost protikladů. Jakoukoliv námitku, že dané možnosti nejsou vyčerpávající, můžeme totiž předem vyloučit tím, že S položíme definitoricky rovné sjednocení P a Q. Žádný podobný úskok nemůže však vyvrátit námitku, že P a Q mají společnou podstatnou část.

1. Vyučování × vycvik; dovednost × porozumění

Ve svých dřívějších přednáškách a článcích jsem obšírně dokazoval, že vyučování se podstatně liší od výcviku a že dovednost se podstatně liší od porozumění.*) Jsem si nyní vědom, že je právě tak nutné dokázat existenci významné části společné vyučování i výcviku, dovednosti i porozumění. Říká se dnes, že musíme naši výuku učinit takovou,

*) *Some Problems of Contemporary Education,* Papers on Educational Reform, Volume IV, Open Court Publishing Company, 1974, 77—104.

aby student lépe viděl její smysl, a tak jsme například žádáni, abychom na všech stupních zavedli jakýsi druh „výchovy k povolání". Heslo, že výuka na odborných školách je vlastně výchovou k povolání, nemůže zamaskovat nedostatek intelektuálního obsahu v těchto kursech ve Spojených státech, přetrvávající přinejmenším na středoškolské úrovni. Tento systém je pouze průpravou pro úzce vymezenou výdělečnou činnost po ukončení školní docházky. Rychle se měnící technologie, jakožto charakteristický rys naší doby, způsobuje mimořádné obtíže při přesném předvídání znalostí, které bude mladý člověk potřebovat k tomu, aby mohl efektivně a produktivně přispívat společnosti. Pokud se týče vyhlídek studentů v budoucím zaměstnání, spočívá odpovědnost výchovného systému v tom, aby vybavil studenta potřebnou dávkou pružnosti a povolnosti, která by mu umožnila přizpůsobit se změnám, rozeznat pokrok, a s důvěrou a optimismem jej jakožto pozitivní uvítat. Zdálo by se tedy, že potřeby naší doby kladou důraz na výchovu v klasickém pojetí, přesněji řečeno požadují absolventa, který by byl s to více přispívat společenskému systému v němž žije, a také více vytěžit z jeho výhod. Podobně pouhé nabývání tradičních dovedností je zcela nedostatečné dokonce i z toho nejpraktičtějšího hlediska, neboť tyto dovednosti velice rychle zastarávají. Nicméně schopnost osvojovat si různé dovednosti nikdy nezastará. To znamená, že žáci si musí v průběhu studia spíše osvojit schopnost skutečně pochopit obsah výuky, než schopnost memorovat některé partie látky a tyto partie reprodukovat ve formálních testech. Abych poskytl příklady těchto principů, poukáži na standardní způsob, jakým se vykládá úvod do infinitezimálního počtu. Kalkulus je chápán jako množina dovedností — dalo by se skoro říci triků — a student se tyto triky učí, je v nich cvičen tak, aby dosáhl potřebné úrovně zralosti. Medvědí službu při studiu infinitezimálního počtu prokazují studentům příklady šité na míru, tj. volené tak, aby ilustrovaly jednotlivé dovednosti, které má student zvládnout. Správně ucelený kurs by měl mít na zřeteli celý komplex otázek spojený s řešením praktického problému, tj. jak volit na začátku řešení matematický model, jak uvažovat v rámci tohoto modelu, jak výsledky získané úvahou konfrontovat s původním problémem, aby se ověřila vhodnost zvoleného modelu, a konečně jak modifikovat model v případě nesouladu mezi teorií a praxí. Všechny tyto stránky opravdové aplikované matematiky v sobě zahrnují výchovu studenta v širokém slova smyslu a jeho získávání pro skutečné chápání matematiky a její úlohy v praxi.

Tento příklad se nám bude hodit i později, při rozboru dalších protikladů z našeho seznamu. Nicméně v tomto okamžiku by bylo vhodné poukázat na to, že nutnost dát studentu opravdové vzdělání není nikde naléhavější než na základní škole, kde je žák nejvnímavější k přirozené atraktivnosti výuky. Malé dítě, nezkažené scestnými pokusy dospělých změnit ho podle svých vlastních představ, má totiž největší radost ze své schopnosti porozumět. Na základním stupni má dítě nádhernou nespoutanou obrazotvornost, která může být udržována a obohacována učitelem, který mu nabízí množství poznatků a zkušeností, učitelem, který dokáže využít a uspokojit přirozenou dětskou zvídavost v souladu s okolím, v němž dítě žije. Osvícený a vhodně koordinovaný program matematiky a přírodních věd na základní úrovni může sloužit k utřídění těchto poznatků, a tak vyvstává jako přirozený rámec při získávání výchovných zkušeností. Tento program nicméně nepochybně vyžaduje jistý stupeň porozumění ze strany učitele matematiky a přírodních věd, což není ve Spojených státech v současné době realistický předpoklad vzhledem k výchově a minulosti většiny učitelů základních škol.

Dovolte mi tedy uzavřít tuto část názorem, že výcvik a dovednost budou získávány jako vedlejší produkt dobrého vyučování a skutečného pochopení. Pokoušet se vštípit dovednost nebo poskytnout skutečně užitečný výcvik by bylo marné, kdyby toto úsilí nebylo provázeno skutečnou výchovou celé osobnosti studenta. Tak výchova, která byla a je vlastní funkcí našich škol a univerzit, má své oprávnění nejen proto, že každý člověk v moderní společnosti má právo na opravdové vzdělání, ale také z ryze praktických důvodů, že je to totiž nejlepší způsob, jak učinit člověka užitečným pro společnost a také schopným vydělávat si na živobytí.

2. Užitečné vyučování × zábavné vyučování

Začal bych vysvětlením, co míním zábavným nebo žertovným vyučováním. Na základním stupni mám na mysli vymyšlené povídky toho druhu, s jakými se setkáváme v programu „Open Court", což jest experimentální program ve Spojených státech, o kterém jsem hovořil již dříve. V těchto příbězích je předváděna situace, která je zcela jistě téměř neskutečná. Nicméně je to situace, která je pro děti smysluplná, rozptyluje je a obveseluje, láká k vyšetřování problému navozeného povídkou. Na vyšším stupni jsou vhodné problémy, jaké předložili například Lewis Carroll nebo Caliban, nebo jiné otištěné velmi často v britských nedělních novinách. Ale já bych chtěl rozšířit pojem zábavného vyučování ještě dále. Nejenom použití různých fiktivních ilustrací matematiky, ale samotná její síla vzrušuje i těší studenty a svádí je, aby se samostatně snažili o uspokojení své intelektuální zvídavosti. Rozdíl zde není tentýž jako u čisté a aplikované matematiky. Zdánlivý protiklad je mezi názorem, že studentova pozornost by měla být zaměřena k užitečným dovednostem a prostředkům, k užitečné aplikaci, a mezi názorem, který vychází z toho, že studenti mají přirozenou zálibu ve fantazii, a tedy jejich přirozená nespoutaná obrazotvornost by měla být podnícena tak, aby je vedla do oblastí myšlení, které nesouvisí přímo s praktickou zkušeností.*)

Protiklad je skutečně jen zdánlivý; prostě proto, že problém vybraný z kteréhokoliv zdroje za předpokladu, že skutečně zaujme obrazotvornost studenta, dovede ho ke skutečné výchovné zkušenosti. A tato zkušenost může být dále využita v zájmu rozvoje jeho znalostí skutečného světa. Vymyšlené povídky z „Open Court" jsou podle mého názoru vynikající; ale dovolte mi uvést poněkud odlišný příklad k ilustraci toho, že užitečné a zábavné vyučování jsou vzájemně se nevylučující pojmy. Příklad samotný odráží ve skutečnosti jeden základní rys programu „Open Court".

Jedna z nejdůležitějších částí aplikované matematiky, právě pro její všudypřítomnost, je pravděpodobnost a statistika. Díky těmto dvěma matematickým disciplínám jsme schopni rozumně reagovat na naše okolí a činit racionální rozhodnutí. Jakým způsobem lze zavést základní principy pravděpodobnosti a statistiky? Jsem přesvědčen, že ideální

*) Jsem přesvědčen, že pojetí protikladů bylo uznáno Mitchellem Lazarem, když napsal: „Místo výuky matematiky pro ni samotnou měly by ji vysoké školy učit pro studenty". (*The elegance and relevance of mathematics,* Chronicle of Higher Education, Dec. 1, 1975.)

cesta je pomocí her. Přirozený zájem dětí o hry — a rovněž jejich přirozené přání zvítězit — může být využito k tomu, aby si přály pochopit elementární principy pravděpodobnosti a statistiky. Tak si lze pomocí her osvojit různé metody a mimoto se tímto způsobem podněcuje intelektuální zvídavost. Tyto metody pak mohou být aplikovány na situace, kde nemáme úplnou informaci, a takovými situacemi náš okolní svět vskutku oplývá. Důvody, proč hledat takové postupy pro osvojení si a pochopení těchto partií matematiky, jsou natolik zřejmé, že by bylo zbytečné je zde rozebírat. Bylo by však vhodné zdůraznit, že nejdůležitějším argumentem pro tento postup, silnějším než všechny argumenty již vyslovené či pouze myšlené, je, že si nakonec budeme přát aplikovat naši matematiku na situace vznikající při vědeckých pokusech, u nichž neznáme předem výsledek, a že si budeme přát otestovat správnost naší metody v podmínkách zpětné vazby, jako je tomu právě u her.

Existuje ještě poněkud odlišný blud podporující tento zdánlivý protiklad, o kterém mohu ze své zkušenosti říci, že se vyskytuje zvláště ve Spojených státech, ačkoliv se docela dobře může objevit i v některých státech socialistických. Týká se puritánské víry, že nejctihodnější druhy lidské činnosti nemohou být provázeny pocity hlubokého požitku. To pak vede k závěru, že ani ve výchovném procesu ani při jakékoliv jiné činnosti se nemůže dít nic skutečně důležitého, pokud se zúčastněné osoby přitom velkolepě baví. Je skutečně politováníhodné, že tato domněnka ovlivňuje náš přístup k vydělávání si na živobytí. A je dvojnásob politováníhodné, že ovlivňuje i náš přístup k získávání vzdělání. Osvícené mínění uznává, že základní výuka může být často zábavná. Ale je tu nešťastný názor, že jak výchovný proces pokračuje, je nutné stávat se ve třídě postupně stále vážnějším; a rozptýlení lze připustit jen při mimoškolní činnosti. Výsledkem toho pak je právě to, čeho bychom se měli vyvarovat — a mnozí lidé prohlašují, že se o to pokoušejí — to jest oddělení životní zkušenosti ze školy od ostatního života. Následky jsou pro budoucí život a povolání studenta skutečně nešťastné — podporují předsudek, že práce a hra jsou navzájem v protikladu.

Mnoho z vyučování by mělo být žertovné*); na hlubším stupni by mělo být velmi zábavné. Zábavnost vyučování nejen že není v rozporu s jeho užitečností, ale právě naopak je absolutně základní podmínkou pro to, aby výuka ovlivnila život budoucího dospělého člověka. Nikdo si nepřeje, aby vyučování matematiky odvádělo studenty od všeho, co je v životě mimo matematiku důležité. Nicméně z matematiky může vzejít pouze dobro, bude-li její studium spojeno se zábavou, s volnou hrou představivosti a schopností pro fantazii.

3. Strukturální výstavba × řešení problémů; axiomatika × konstruktivní metoda

Tyto dvě nesprávné antiteze jsou vzájemně velmi úzce spjaty. Tzv. „nová matematika“ byla napadena za to, že příliš zdůrazňuje důležitost matematických struktur a že přehlíží, jak je u mládeže nutné pěstovat schopnost řešit problémy. Toto může být zdravá kritika

*) Zde lze oponovat, že velká zábava a švanda mohou vzniknout i při studiu reálných situací. Samozřejmě! Bylo by absurdní tvrdit, že žerty jsou možné jen ve fantazii — opět další falešný protiklad.

mnoha nepodařených vyučovacích pokusů, které se uskutečnily pod praporem nové matematiky, ale pokud k nim došlo, pak to bylo způsobeno nepochopením cílů reformního hnutí ve vyučování matematice, a jistě to neodpovídá záměrům činitelů odpovědných za výchovnou filozofii tohoto hnutí.

Studenti matematiky musí být ovšem schopni řešit problémy. Ale pravděpodobně půjde o takové problémy, které potřebují ke svému řešení matematiku, a tedy má-li být matematika účinně aplikována, musí být dobře pochopena. Snadno lze ověřit, že je důležitou výchovnou zkušeností být postaven před problém a pak se jej pokusit řešit. Ale odepřít někomu přístup k použitelné teorii během pokusů o řešení problému, znamená postavit ho do velmi nevýhodné situace a nadměrně snížit pravděpodobnost získání dobrého řešení v přiměřeném čase. Stejně jako výlučné zaměření na výstavbu matematických struktur je zkreslením principů nové matematiky, je výlučné zaměření na řešení problémů zkreslením heuristických principů ve vyučování. Problémy lze velmi účinně řešit použitím vhodné teorie; a záliba pro teorii se nejpravděpodobněji vyvine z touhy řešit zajímavé problémy. Dvě činnosti, totiž strukturální výstavba a řešení problémů, se tedy navzájem podstatně doplňují.

V matematice samotné se dvě strany mince nazývají axiomatika a konstruktivní metody. Pomlouvači axiomatické metody ji představují jako nemotivované a bezduché memorování axiómů pro nějaký abstraktní systém, bez odkazu na jakékoliv možné aplikace. Například profesor Feynman, nositel Nobelovy ceny za fyziku, ve svých podnětných *Messenger Lectures* na Cornell University v roce 1964, zobrazil matematika jako člověka vycházejícího z pevné, ale jinak libovolné množiny axiómů a chladnokrevně vytloukající veškeré důsledky z těchto axiómů. Porovnával tuto odlidštěnou činnost s prací fyzika, postupujícího lehce od jedné souvislosti k druhé pomocí jemných skoků tvůrčí obraznosti, vždy znovu a znovu pronikajícího do neznáma jasným a podněcujícím paprskem světla. Ve skutečnosti ovšem Feynmanův popis přirozeného „modus operandi" fyzika dává přesný popis činnosti dobrého matematika. Nicméně to, čím se zde zabýváme, je falešný protiklad mezi axiomatickou metodou v matematice a konstruktivní metodou, v níž se skutečně provádějí „konkrétní" operace s „konkrétními" veličinami a tímto způsobem se odvozují důsledky.

Že tyto dvě metody existují je bezpochyby pravda. Je rovněž pravda, že existuje škola filozofického myšlení – intuicionismus – který věří, že jenom konstruktivní důkazy v matematice jsou skutečně platné. Avšak tento názor zastává extrémně malý počet matematiků; kromě toho ani toto hledisko nevylučuje axiomatiku jako celek – pouze prostě odmítá platnost důkazu sporem. Axiomatická metoda byla použita Eukleidem k stanovení elementárních geometrických vlastností a bezpochyby představovala ohromný pokrok v lidském myšlení. V současném vyučování geometrie se bohužel velmi často stává, že se dokazují geometrické výsledky, které jsou nezajímavé a triviální, a důkazy mají zřejmou příchuť pedantičnosti. Nicméně, kdyby geometrické důkazy se užívaly k matematickým objevům, jak by se skutečně mohly a měly používat, pak by argumenty proti axiomatice zcela jistě zmizely.

Zakladatel moderní axiomatické metody v matematice byl David Hilbert. U Hilberta se poprvé setkáváme se zřejmým tvrzením, že axiomatický systém nevypovídá nic o reálné existenci objektů. Axiómy jsou postuláty o nedefinovaných veličinách a nikoliv nějaké evidentní pravdy o skutečných objektech. Hilbert využil axiomatickou metodu s ohromným úspěchem. Jedním z jeho počátečních triumfů bylo vyřešení problému nalezení konečné báze pro systém invariantů algebraických forem. Velký německý matematik GORDAN konstruktivní metodou dokázal, že pro binární formy existuje konečná báze. V roce 1888 Hilbert nalezl nový, nekonstruktivní důkaz Gordanovy věty, a v září téhož roku oznámil úplné řešení. Při zpracování tohoto velmi „konkrétního" problému z matematiky Hilbert v podstatě objevil axiomatickou metodu. Nekonstruoval totiž konečnou bázi invariantů, nýbrž dokázal, že systém invariantů musí mít konečnou bázi. Reakce Hilbertových současníků je velmi zajímavá ve světle předsudků, které přežívají dodnes. LINDEMANN, jeden z velkých zakladatelů moderní teorie čísel, označil tento důkaz jako „příšerný" (unheimlich). Gordan sám říká „Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie" (to není matematika, to je teologie). KRONECKER, o kterém lze říci, že je předchůdcem intuicionizmu, a který byl jedním z nejtvrdších Cantorových odpůrců při pozdějším rozvíjení teorie množin, Hilbertovy argumenty zcela zavrhuje. Je zajímavé, že v roce 1890 Hilbert získal metodu konstrukce konečné báze, jejíž existenci dokázal. Avšak napsal: „Zakázat existenční tvrzení ... je totéž jako zříci se matematické vědy jako celku." Jestliže je axiomatická metoda použita k řešení problému, pak má své velké opodstatnění a užitečnost. Pouhá výstavba matematické struktury, bez ohledu na problémy, k nimž by tato struktura mohla být aplikována, není podle žádného myslitelného měřítka záslužná a hodnotná matematická činnost, nýbrž je to pouhá karikatura axiomatické metody.

V poněkud pozdější době RENÉ THOM, velký francouzský matematik, zkonstruoval novou matematickou teorii nazvanou kobordismus a za tento objev obdržel Fieldsovu medaili. Thomův nový pojem slouží ke sjednocení a utřídění velkých oblastí topologie — a rovněž k řešení důležitých problémů. Ohromné množství literatury, které následovalo po Thomově průkopnické práci, je dostatečným svědectvím jejího významu.

Abych vyvedl z omylu ty, kteří věří, že výstavba matematických struktur a axiomatické myšlení jsou prostě hájemstvím nějaké soběstačné kliky čistých matematiků, stačí, když budu citovat poznámky RICHARDA COURANTA, jednoho z největších odborníků v aplikované matematice v tomto století, z jeho zdravice k Hilbertovu stoletému výročí. V roce 1962 Courant řekl: „Živá matematika je založena na fluktuaci mezi protikladnými silami intuice a logiky, mezi jedinečností pozemských problémů a obecností dalekosáhlých abstrakcí. My sami musíme zabránit vývoji zaměřenému pouze k jednomu pólu těchto životodárných protikladů. Matematika musí být s láskou opatrována a posilována jako životně důležitý potůček spojený s širokou řekou vědy. Nesmí kapat do písku. Hilbert nám ukázal..., že neexistuje žádná propast mezi čistou a aplikovanou matematikou a že mezi matematikou a přírodními vědami jako celkem může být navázána plodná spolupráce".

Axiomatická metoda se stala mimořádně silným prostředkem abstraktního myšlení. Aby si naši studenti toto umění osvojili, je důležité, aby se ve školách chápala úloha struktury v matematice jak učitelem, tak i žákem. Je znepokojující, že v novém kole reformy učebních plánů matematiky se klade tak velký důraz na řešení problémů, jako by to byla alternativa k rozvoji samotné matematiky. Řešení problémů má daleko k nějaké alternativě, neboť tvoří podstatnou část rozvoje chápání matematiky a nemůže zaujímat jiné místo, než ve spojení s bohatým matematickým vzděláním. Touha řešit problémy je hnací silou pro rozvoj matematiky, a tím je i hnací silou pro pochopení a osvojení si matematiky ve vyučovacím procesu. Pokoušet se řešit problémy, které jsou vhodné pro matematické zpracování a ignorovat přitom vhodnou matematiku, je cesta absurdní, neboť vede ke zmaření sama sebe.

Morris Kline, ve své vyzývavé knize *Why Johnny Can't Add* (Proč Johnny neumí sečítat), ke které bych se chtěl obšírněji vyslovit ve své druhé přednášce, napadá použití axiomatické metody jako základu vyučování elementární matematiky. Nelze diskutovat s Klinem o jeho názoru na věc s výjimkou jeho tvrzení, že našel hlavní příčinu našeho malého úspěchu ve snaze dát našim dětem dobré matematické vzdělání. Axiomatická metoda ve své explicitní formulaci by se měla ve výchovném procesu objevit relativně později. Ale studium skutečné struktury používané číselné soustavy je jistě vhodné již na základním stupni. Zde by se mělo vždy předpokládat, že studium není samoúčelné, ale slouží k lepšímu používání matematiky jako nástroje k pochopení a ovládnutí okolního světa. Tak lze nalézt v programu „Open Court" náležitý zájem o praktickou důležitost početních dovedností spojených s uvědoměním si skutečnosti, že číselná soustava vykazuje jisté strukturní rysy, které mohou značně zjednodušit výslednou aritmetiku; to umožňuje studentům lépe pochopit přirozený rozvoj matematiky samotné a vysvětluje dvojí roli číselných soustav ve výpočtech a měřeních. Cíl dobrého výchovného programu je výuka budoucího občana, ať již v jakémkoliv speciálním oboru. Proto vyučování musí obsahovat pochopení podstaty matematických metod. Jestliže zamítneme studium matematických struktur pro ně samé – a toto zamítnutí by se mělo týkat většiny našich studentů – neznamená to vůbec popření důležitosti struktur v úvahách týkajících se reálného světa.

4. Umění × věda; čistá matematika × aplikovaná matematika

Kontrast mezi uměním a vědou bývá často pociťován během celého života člověka jako základní rys výchovy. Věda je v současné době v mnoha západních státech na ústupu před útokem těch, kteří tvrdí, že vědci prokázali naprostý nezájem, hraničící dokonce s pohrdáním, o blaho lidské rasy, a provozovali svou vědu s naprostou bezohledností pokud jde o sociální, politické i morální důsledky. Kritikové ztotožňovali vědu s technologií a zároveň poukazovali na zvyšující se znečištění prostředí a hromadění stále rafinovanějších zbraní jako na důkazy, že vědci v sobě nemají dost lidskosti a odtud vyvozovali, že ve výchově vědců je málo humanismu. Vyjádřením tohoto náhlého obratu proti vědě je, že studenti ve Velké Británii a Spojených státech se zapisují na přednášky z humanitních a společenských věd na úkor přednášek z věd přírodních, které jsou pak na našich univerzitách málo naplněny – a nadaní mladí lidé se obracejí zády k univerzitnímu vzdělání vůbec, a to s přesvědčením, že univerzity jsou součástí zřízení, které se vyznačuje lhostejností k morálním otázkám.

Je ironií, že tento útok na vědu probíhá ve stejné době jako útok na matematiku proto, že je příliš abstraktní a má zanedbatelné aplikace. Útok ovšem nepřichází od týchž osob. Ale skutečnost, že tyto dva útoky probíhají současně ilustruje důležitý princip, že „není na světě člověk ten, jenž by se zalíbil lidem všem".

Není cílem této přednášky pouštět se do širokých sociologických otázek vzniklých útokem na vědu.*) Zde je mým vymezeným cílem ukázat za prvé, že neexistuje skutečný protiklad mezi čistou a aplikovanou matematikou, a za druhé, že hodně z matematického umění je zaměřeno k aplikacím matematiky na okolní svět.

Pokud se týče první teze, chtěl bych začít diskusí o otázce, co je třeba rozumět pod slovy „aplikovaná matematika". Podle mého názoru označuje tento termín matematiku, která se používá při řešení matematických problémů. Tu bychom však ještě neměli omezovat pouze na matematiku, která byla vymyšlena za účelem aplikace, a tím spíše ne pouze na ty části matematiky, které se objevují v tradičních přednáškách z aplikované matematiky. Dnes, kdy se matematika používá v mnoha nových oborech, speciálně ve společenských vědách, není zřejmě možné předepisovat předem, které partie matematiky se ukáží užitečné v aplikacích. Například teorie kódů opravujících chyby, která je zřejmě velmi důležitá v teorii automatů a v computer science, závisí na studiu pozitivně definitivních kvadratických forem nad dvouprvkovým tělesem a jednou z vět této teorie je skutečnost, že každá funkce, definovaná na konečném tělese s hodnotami v něm je polynomem. Teorie kvadratických forem a teorie konečných těles zajisté nebyly rozvíjeny s jakýmikoliv myšlenkami na aplikace, ale nyní se dostaly do sféry aplikované matematiky, protože byly objeveny jejich aplikace.

Je tedy zřejmé, že rozdíly mezi čistou a aplikovanou matematikou jsou nepodstatné. Mnohem vhodnější je prostě hovořit o matematice, a je-li potřeba, tedy o aplikacích matematiky. Protože celá matematika je potenciálně přístupná aplikacím, musíme zavrhnout kacířství, které hlásá, že existují partie matematiky, jako například algebra, geometrie, topologie, teorie čísel, které mohou být budoucími aplikovanými matematiky klidně zanedbány. Stejně bychom měli pak odmítnout názor, který by možná mohli zastávat někteří lidé svedení na scestí, že na vysokoškolském stupni, nebo možná i dříve, je třeba ostře rozlišovat mezi těmi, kteří mají v plánu používat matematiku jako nástroj a mezi těmi, kteří chtějí studovat matematiku pro ni samou. Všichni studenti matematiky se musí učit matematiku, a musí se také učit něco o metodách, jak lze matematiku aplikovat. Zatímco existují rozdíly mezi čistým a aplikovaným matematikem, pokud jde o charakteristické motivace, metodologie se podstatně překrývají. U obou totiž existuje velmi silná experimentální složka, která může být snadno přehlédnuta v přísně deduktivních postupech, jaké se najdou v mnoha učebnicících. U obou najdeme rozumný výběr problémů vhodných pro matematické zpracování. Tyto problémy mohou patřit do oblasti matematiky nebo mimo ni; a právě otázka, zda daná osoba hledá inspiraci pro svou matematiku buď uvnitř samotné matematiky, nebo mimo ni, je nejvýznamnějším kritériem rozlišujícím pracovníky v čisté a aplikované matematice.

Analyzujeme-li schéma práce v aplikované matematice, najdeme klíčová místa, kde hlavní úlohu má umění. Naskýtá se na příklad otázka, o které jsme se již zmínili, týkající se výběru vhodného problému. To je nepochybně umění, neboť zde je algoritmický postup nemožný. Pak je zde problém volby vhodného matematického modelu. Zde

*) Zajímavé pojednání o těchto otázkách, doplněné obsáhlým seznamem literatury, je v článku Rogera Williamse: *The Soluble in Pawn to the Possible*, in Encounter, Janurary, 1974.

jsou kritéria rovněž velmi složitá. Musí zahrnovat oblast kompetence matematika, jeho rozhodnutí v jakém rozsahu je ochoten aproximovat problémovou situaci modelem a různá další omezení, jako jsou očekávané výdaje, měřené časem, úsilím nebo přímo penězi, na shromáždění numerických dat nezbytných pro nalezení a přezkoušení řešení. Jestliže matematik úspěšně provede úvahy uvnitř modelu i příslušné výpočty, a pak při porovnávání svého výsledku s původní nematematickou situací zjistí neshody, je postaven před problém modifikace matematického modelu, popřípadě musí shromáždit další údaje. Zde je opět podstatný vlastní úsudek – žádný procedurální algoritmus nepomůže. Existuje tedy mnoho příkladů na úlohu umění v aplikované matematice. Z toho je patrné, že je správné hovořit o vědě v matematice a o umění v aplikované matematice. Protože matematika zahrnuje systematický soubor znalostí a vyžaduje souhrnné úvahy a pochopení smyslu těchto úvah, je skutečně v tomto smyslu vědou. A protože aplikovaná matematika zahrnuje volbu, která musí být provedena na základě zkušenosti, intuice a dokonce inspirace, má charakter umění. Lze tedy v matematice zajisté najít jak umění, tak vědu, a to jak v čisté, tak v aplikované matematice. Tak jsme rozbili oba falešné protiklady jednou ranou.

Ostatní přírodní vědy si berou poučení z matematiky – což je, jak věřím – velmi podstatné kritérium zralosti přírodních věd. Matematika bez přírodních věd je sice schopna života, ale má špatný výchovný vliv; přírodní vědy bez matematiky nejsou dokonce ani životaschopné.*) Dobrý učební plán musí poskytovat mnoho příležitostí pro přeměnu pouhých pozorování a pouhých uvědomění si individuálních složek okolí člověka na zdroj přemýšlení a zdravé zvídavosti. Aby výsledky inteligentního pozorování a experimentu mohly být pojaty do vědy, k tomu je třeba matematiky. Feynman řekl, že „příroda k nám promlouvá jazykem matematiky", PETER MEDAWAR, nositel Nobelovy ceny za biologii, popsal vědu jako „umění řešitelného". Problémy řešíme pomocí symbolických úvah, a to je doména matematiky.

Závěr

V této přednášce jsme se zabývali vyvracením jistých falešných protikladů. Nadvláda těchto falešných protikladů je bariérou, která brání jasnému pohledu na výchovné problémy. Ve všech případech takových neplodných a scestných antitezí, a to jak těch, o kterých jsme pojednali v přednášce, tak i mnoha dalších, potřebujeme a můžeme získat obě strany vyumělkovaného protikladu. Jako poslední varovné slovo mi dovolte říci toto: Budeme-li naslouchat různým zájmovým skupinám, které inzerují své zboží a vychloubají se svými oblíbenými univerzálními léky, nedostaneme nikdy obě strany mince a navíc se octneme ve velkém nebezpečí, že nedostaneme stranu žádnou. Dobré vyučování v sobě zahrnuje kaleidoskop různých kvalit a vlastností, jeho úspěch závisí na mnohostranném přístupu, a tedy na spolupráci všech opravdově zainteresovaných ochotných odborníků, vychovatelů, psychologů, rodičů, úředníků. Jedině tak mohou naše děti a jejich děti doufat, že získají tak dobré vzdělání, jaké si zaslouží.

---

*) Nehovořím o přírodních vědách bez matematiků! Tvrzení, že v tomto případě by přírodní vědy ztratily životaschopnost, je již spornější.