Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Miroslav Miler

Maticový počet v geometrické optice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 12 (1967), No. 4, 195--212

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138751

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XII — ČÍSLO 4

MATICOVÝ POČET V GEOMETRICKÉ OPTICE

MIROSLAV MILER, Praha

ÚVOD

Zobrazovací optické soustavy se většinou skládají z většího počtu lámavých ploch. Dokonalost zobrazení roste s počtem ploch, neboť každá plocha představuje volné parametry, které je možno upravovat tak, aby se zlepšilo zobrazení. Při těchto úpravách má velmi důležitou úlohu výpočet průchodu paprsků soustavou. Tento výpočet není sice obtížný, neboť užívá v podstatě pouze trigonometrických zákonů, ale je neobyčejně zdlouhavý. Ani chod paprsků v Gaussově prostoru netvoří výjimku.

V teorii lineárních elektrických obvodů se již delší dobu s úspěchem užívá maticového počtu. Každý obvod se skládá z jednoduchých prvků, jejichž syntézu ve složitější obvod je možno snadno provést pomocí maticové algebry, neboť výstupní napětí a proud každého prvku jsou lineární funkce vstupního napětí a proudu. Podobně i u optických soustav lze použít maticového počtu především k výpočtu paprsků v Gaussově prostoru. Zavedením matic se zákony geometrické optiky stávají mnohem průhlednější a názornější a výpočet chodu paprsku představuje pouze mechanické algebraické obraty bez obtížných úvah o znaménkách apod. Přes tyto přednosti se ještě maticová metoda v optice obecně nevžila. Příčinou je snad nedostatek vhodně zpracované literatury. Publikace [1] je pro první seznámení málo způsobilá. Několik stránek knihy [2], které jsou věnovány těmto otázkám, je sice dobře srozumitelných, ale tato příručka je u nás pouze v několika málo exemplářích, podobně jako knížka [3]. V naší literatuře je pouze poměrně krátká informace ve známé příručce [4].

Tento článek má vyplnit mezeru v literatuře a umožnit zejména mladším fyzikům z oboru optiky, aby se seznámili s touto moderní metodou v geometrické optice.

PRŮCHOD PAPRSKU ROZHRANÍM

Z Fermatova variačního principu geometrické optiky plyne známý zákon lomu, vyjádřený v nejjednodušším tvaru rovností

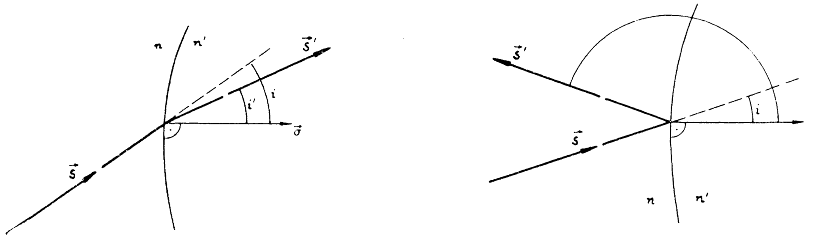
$$n' \sin i' = n \sin i \,, \tag{1}$$

přičemž dopadající a lomený paprsek leží v jedné a téže rovině (obr. 1a). Na rozdíl od běžné praxe budeme úhly dopadu a lomu měřit od kolmice k rozhraní, která má stejný smysl jako paprsek. Potom zákon odrazu plyne z (1) jako zvláštní případ, jestliže položíme navzájem rovny indexy lomu obou prostředí $n' = n$, aniž bychom zaváděli záporný index lomu. Obdržíme rovnici

$$\sin i' = \sin i \,, \tag{2}$$

která má dvě řešení $i' = i$ a $i' = -i$, z nichž pouze druhé má fyzikální smysl (obr. 1b), což vyjádříme přídavnou podmínkou, aby $\cos i' = -\cos i$. Rovnice (2) spolu s uvedenou podmínkou dávají skutečně zákon odrazu ve tvaru

$$i' = \pi - i \,. \tag{3}$$



Obr. 1. K zákonu lomu a odrazu.

Oba zákony můžeme napsat společně ve vektorovém tvaru pro obecný případ dopadu paprsku. Vektorový tvar je velmi vhodný při řešení optických úloh. Zaveďme směrové vektory $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}'$, jejichž směry jsou shodné se směry dopadajícího a lomeného paprsku a velikosti jsou rovny indexům lomu příslušných prostředí. Nechť dále jednotkový vektor normály k rozhraní je $\mathbf{o}$. Potom je možno napsat zákon lomu (1) jako rovnost vektorových součinů směrových vektorů s normálou

$$\mathbf{s} \times \mathbf{o} = \mathbf{s}' \times \mathbf{o} \,.$$

Podle pravidel vektorového součinu můžeme psát též

$$(\mathbf{s}' - \mathbf{s}) \times \mathbf{o} = 0 \,,$$

což je splněno tehdy, jestliže

$$\mathbf{s}' - \mathbf{s} = \Gamma . \mathbf{o} \,. \tag{4}$$

Skalární součinitel Γ dostaneme, znásobíme-li skalárně obě strany rovnice (4) vektorem $\mathbf{o}$:

$$\Gamma = \mathbf{o} . \mathbf{s}' - \mathbf{o} . \mathbf{s} = n' \cos i' - n \cos i \,, \tag{5}$$

což se také použitím (1) dá napsat ve tvaru

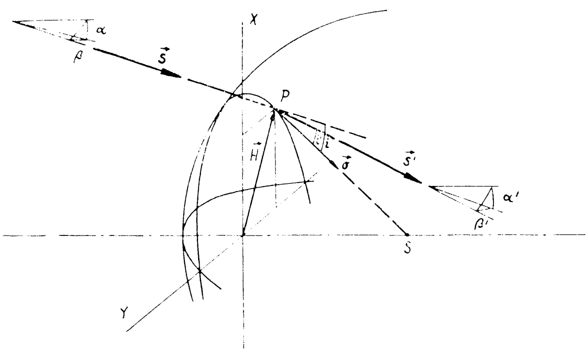
$$\Gamma = \left[n'^2 - n^2 + (\mathbf{o} \cdot \mathbf{s})^2\right]^{\frac{1}{2}} - \mathbf{o} \cdot \mathbf{s} \,. \tag{6}$$

Pro odraz je $\Gamma = -2n \cos i = -2(\mathbf{o} \cdot \mathbf{s})$ a směr odraženého paprsku je dán vztahem $\mathbf{s}' = \mathbf{s} - 2(\mathbf{o} \cdot \mathbf{s}) \cdot \mathbf{o}$.

REFRAKČNÍ MATICE

Optická soustava se skládá z několika rozhraní prostředí, na nichž nastává lom nebo odraz paprsku. V našich úvahách se omezíme pouze na rozhraní tvaru kulových ploch, jejichž středy leží na společné přímce zvané optická osa soustavy. Vyšetřujme nejprve lom na jedné kulové ploše.

Paprsky – dopadající a lomený – jsou dány směrovými vektory $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}'$, které mají stejný význam jako v předchozí části. Bod lomu paprsku na ploše označme P a proložme jím rovinu kolmou k optické ose. V rovině je souřadnicová soustava XY (obr. 2). Normála ke kulové ploše $\mathbf{o}$ leží na přímce spojující daný bod plochy P



Obr. 2. Lom paprsku na kulovém rozhraní.

se středem S a má smysl opačný, než je užívaný smysl poloměru r, který se měří od středu S plochy k bodu plochy. Můžeme tedy psát $\mathbf{o} = -\mathbf{r}/r$. Potom obdržíme zákon lomu (4) ve tvaru

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \Gamma \frac{\mathbf{r}}{r} \,. \tag{7}$$

Součinitel při $\mathbf{r}$ se často nazývá optická mohutnost lámavé plochy a značí se Φ:

$$\Phi = \frac{\Gamma}{r} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} \,. \tag{8}$$

Dále se budeme zabývat pouze příčnými složkami vektorů v osách X a Y, poněvadž složky v ose Z neovlivňují lom. Za tohoto předpokladu můžeme místo vektoru $\boldsymbol{r}$ zavést vektor dopadové výšky $\boldsymbol{H}$; zákon lomu na kulové ploše pak je

$$\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S} - \Phi\boldsymbol{H} . \tag{9}$$

Zdůrazňujeme znovu, že tato poslední rovnice platí pouze pro dvě příčné složky vektorů $\boldsymbol{S}'$ a $\boldsymbol{S}$, tj. ve složkovém tvaru bude

$$\begin{aligned} n' \sin \alpha' &= n \sin \alpha - \Phi X , \\ n' \sin \beta' &= n \sin \beta - \Phi Y , \end{aligned} \tag{10}$$

kde α, α' jsou úhly, které svírají dopadající a lomený paprsek s rovinou YZ,
β, β' s rovinou XZ
a X, Y jsou složky vektoru $\boldsymbol{H}$.

Zavedeme-li substituce $n' \sin \alpha' = K'$, $n \sin \alpha = K$, $n' \sin \beta' = L'$, $n \sin \beta = L$, můžeme psát rovnice (10) také takto:

$$\begin{aligned} K' &= K - \Phi X , \\ L' &= L - \Phi Y . \end{aligned} \tag{11}$$

Refrakční matici, která popisuje lom na kulové ploše, obdržíme, jestliže si uvědomíme, že při lomu zůstává dopadová výška nezměněna, tedy $\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}$. Tuto podmínku pak spolu s rovnicí (9) můžeme psát v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{H}' \\ \boldsymbol{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{S} \end{pmatrix} . \tag{12}$$

Základy maticové algebry potřebné pro naše úvahy jsou připojeny v příloze A.

Poslední rovnice (12) napsaná pro příčné složky bude

$$\begin{pmatrix} X' \\ K' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ K \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} Y' \\ L' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ L \end{pmatrix} . \tag{13}$$

Odtud vidíme, že v praxi lze vyšetřovat pouze jednu příčnou složku, neboť refrakční matice

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

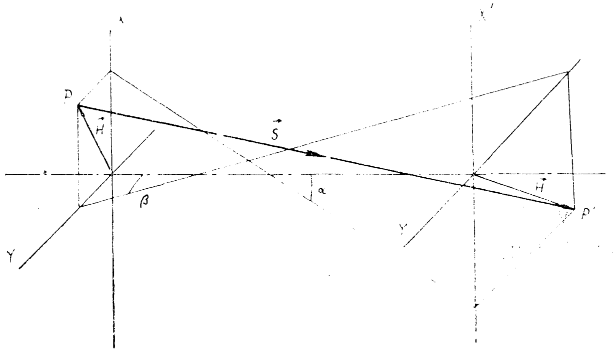
je pro obě složky táž.

TRANSLAČNÍ MATICE

Po lomu na jedné ploše postupuje paprsek na plochu následující. Bodem dopadu P' na následující ploše opět proložíme rovinu kolmou k optické ose, v níž zavedeme souřadnicovou soustavu $X'Y'$ (obr. 3). Bez ohledu na podélné složky a rozestup obou souřadnicových soustav můžeme psát mezi dopadovými výškami vztah

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{\mathbf{S}}{n} T, \tag{15}$$

kde T je vzdálenost PP'. Protože směrový vektor $\mathbf{S}$ má velikost rovnou indexu lomu, musíme jej dělit n, abychom dostali jednotkový vektor.



Obr. 3. Průchod paprsků mezi rozhraními.

Ve složkovém tvaru rovnice (15) bude

$$X' = X + \frac{T}{n} K, \tag{16}$$

$$Y' = Y + \frac{T}{n} L .$$

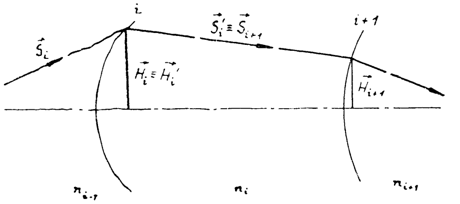
Nyní snadno sestavíme maticový tvar translace, jestliže opět vezmeme v úvahu, že směr paprsku se nezmění, tedy $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$. Pak můžeme psát

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}' \\ \mathbf{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{T}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

odkud pro matici translace plyne tvar

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{T}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

V předchozích odstavcích jsme odvodili refrakční a translační matici, které popisují lom na jedné kulové ploše a průchod paprsku od jedné plochy k druhé. Použijme nyní maticového popisu pro posloupnost několika lámavých ploch optické soustavy.



Obr. 4. K syntéze optické soustavy.

Vyšetřujme nejprve dvě po sobě následující plochy (obr. 4). Paprsek dopadá ve směru $\boldsymbol{S}_i$ na i-tou plochu, kde vytíná dopadovou výšku $\boldsymbol{H}_i$, která je totožná s $\boldsymbol{H}'_i$ po lomu. Lom na i-té ploše popíšeme podle (12) maticově takto:

$$(19) \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}'_i \\ \boldsymbol{S}'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_i \\ \boldsymbol{S}_i \end{pmatrix},$$

kde

$$\Phi_i = (n_i \sin i_i - n_{i-1} \sin i_{i-1})/r .$$

Průchod paprsku mezi i-tou a $\boldsymbol{i} + 1$-vou plochou je popsán podle vztahu (17)

$$(20) \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{i+1} \\ \boldsymbol{S}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{T_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}'_i \\ \boldsymbol{S}'_i \end{pmatrix}.$$

Podobně můžeme postupovat dále. Sloupcové matice na levé straně (19) a pravé straně (20) se rovnají. Proto můžeme pro výsledné veličiny $\boldsymbol{H}_{i+1}$, $\boldsymbol{S}_{i+1}$ psát

$$(21) \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{i+1} \\ \boldsymbol{S}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{T_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_i \\ \boldsymbol{S}_i \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme translační a refrakční matici podle pravidel násobení matic a obdržíme tak matici pro jeden článek optické soustavy složený z lámavé plochy a prostředí za ní

$$(22) \qquad S = \begin{pmatrix} -\Phi_i + \dfrac{T_i}{n_i} & \dfrac{T_i}{n_i} \\ -\Phi_i & 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno se přesvědčíme, že determinanty jednotlivých matic se rovnají jedné a také determinant matice (22) se rovná jedné.

Zobecnění daného postupu na libovolný počet ploch je snadné. Stačí psát zleva doprava matice od poslední k první. Pro n ploch tedy bude

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_n \\ \mathbf{S}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{T_{n-1}}{n_{n-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{T_{n-2}}{n_{n-2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{T_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{S}_1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

nebo symbolicky

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_n \\ \mathbf{S}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}_{n-1} \cdot \boldsymbol{R}_{n-1} \cdot \boldsymbol{T}_{n-2} \ldots \boldsymbol{R}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{S}_1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Vynásobením obdržíme výslednou matici

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}_{n-1} \cdot \boldsymbol{R}_{n-1} \cdot \boldsymbol{T}_{n-2} \ldots \boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

jejíž determinant se opět musí rovnat jedné, tedy $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 1$. Tato podmínka je vhodnou pomůckou pro zkoušku správnosti.

Pro ilustraci a k odvození některých známých vztahů se vrátíme znovu k jedné lámavé kulové ploše, kterou budeme vyšetřovat spolu s prostředím před ní a za ní. Pro maticový popis obdržíme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}' \\ \mathbf{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{T'}{n'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{T}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

odkud vynásobením bude

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}' \\ \mathbf{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \Phi \dfrac{T'}{n'} & \dfrac{T}{n}\left(1 - \Phi \dfrac{T'}{n'}\right) + \dfrac{T'}{n'} \\ -\Phi & 1 - \Phi \dfrac{T}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Zavedeme sdružené body tak, aby maticový prvek $a_{12} = 0$ a poměr $\mathbf{H}'/\mathbf{H} = M$. Veličinu M nazýváme zvětšení, které je rovno

$$M = \frac{\mathbf{H}'}{\mathbf{H}} = 1 - \Phi \frac{T'}{n'}. \tag{28}$$

Z podmínky $a_{12} = 0$ obdržíme vztah pro vzdálenosti sdružených bodů

$$\frac{n'}{T'} + \frac{n}{T} = \Phi = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}, \tag{29}$$

což odpovídá známému vztahu pro tangenciální paprsek. Poněvadž pro determinant platí, že se rovná jedné, můžeme psát při $a_{12} = 0$

$$\left(1 - \Phi \frac{T'}{n'}\right)\left(1 - \Phi \frac{T}{n}\right) = 1 , \tag{30}$$

odkud pro zvětšení plyne též vztah

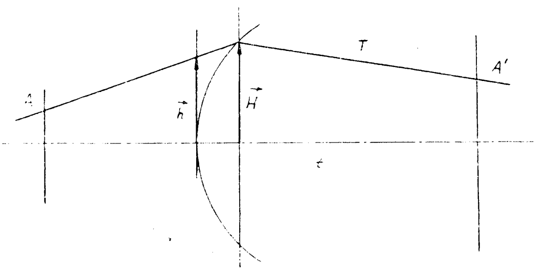
$$M = \frac{1}{1 - \Phi \frac{T}{n}} . \tag{31}$$

Za uvedených podmínek dostáváme pro výsledný maticový popis místo (27) rovnici

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{H}' \\ \boldsymbol{S}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ -\Phi & 1/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{S} \end{pmatrix} . \tag{32}$$

PARAXIÁLNÍ APROXIMACE

Prvky Φ, T základních matic mají za následek nelineárnost vztahů, protože jsou různé pro každý paprsek. Oba prvky totiž závisí na směru paprsku. Abychom odvodili obecné vlastnosti optické soustavy, musíme se omezit na prostor paprsků těsně přiléhajících k ose soustavy. Tento prostor se nazývá paraxiální neboli Gaussův prostor. V něm pak můžeme použít pro prvky Φ a $\boldsymbol{T}$ pouze první členy jejich řad.



Obr. 5. K paraxiální aproximaci.

Při této paraxiální aproximaci tedy položíme $\cos i' \approx \cos i \approx 1$ a pro optickou mohutnost obdržíme

$$\Phi \approx \frac{n' - n}{r} \equiv \varphi \tag{33}$$

a podobně můžeme šikmou vzdálenost podél paprsku nahradit vzdáleností podél optické osy (obr. 5):

$$T \approx t . \tag{34}$$

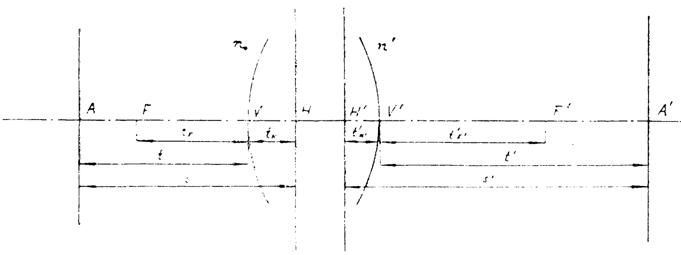
Dále je podle obr. 5 jasné, že místo výšky dopadu H, určené polohou průsečíku paprsku a lámavou plochou, můžeme používat výšky dopadu h, danou průsečíkem paprsku s tečnou rovinou ve vrcholu plochy. Kromě toho zavedeme další aproximace pro příčné složky směrových vektorů:

$$
\begin{aligned}
K &= n \sin \alpha \approx n\alpha\,, \quad & K' &= n' \sin \alpha' \approx n'\alpha'\,, \\
L &= n \sin \beta \approx n\beta\,, \quad & L' &= n' \sin \beta' \approx n'\beta'\,.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Veličiny $n\alpha$, $n\beta$ jsou příčnými složkami směrového vektoru $\mathbf{s}$ a $n'\alpha'$, $n'\alpha'$ vektoru $\mathbf{s}'$.
Refrakční a translační matice pak mají tvar

$$
\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 & t/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix};
\tag{36}
$$

zásadně budeme označovat všechny veličiny v paraxiálním prostoru malými písmeny.



Obr. 6. Obecné schéma optické soustavy.

Studujme maticový popis pro vznik obrazu optickou soustavou v paraxiálním prostoru. Obr. 6 představuje schéma optické soustavy. Body A, A' jsou proloženy rovinami kolmými k optické ose. Transformace paprsku soustavou mezi oběma rovinami je popsána maticí

$$
s_{A'A} = \begin{pmatrix} 1 & t'/n' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{V'} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}_{V} \begin{pmatrix} 1 & -t/n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\tag{37}
$$

S výhodou volíme u prvků b, c záporná znaménka, abychom získali vztahy ve známém tvaru. Maticovým násobením obdržíme transformační matici

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{h}' \\ \mathbf{s}' \end{pmatrix}_{A'} = \begin{pmatrix} a - c\dfrac{t'}{n'} & -a\dfrac{t}{n_0} + c\dfrac{t}{n_0}\dfrac{t'}{n'} - b + d\dfrac{t'}{n'} \\ -c & d + c\dfrac{t}{n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}_{A}.
\tag{38}
$$

Považujme nyní bod P' za obraz bodu P, tj. paprsky procházející v předmětovém prostoru bodem P procházejí v obrazovém prostoru bodem P', a to bez ohledu na směr šíření. Položíme tedy v transformační matici člen vpravo nahoře roven nule:

$a_{12} = 0$ a poměr $\boldsymbol{h}'/\boldsymbol{h}$ nazveme zvětšení m:

$$m = \frac{\boldsymbol{h}'}{\boldsymbol{h}} = a - c\frac{t'}{n'} . \tag{39}$$

Vzdálenost obrazové roviny od poslední plochy dostaneme řešením podmínky $a_{12} = 0$

$$t' = n' \frac{a\dfrac{t}{n_0} + b}{c\dfrac{t}{n_0} + d} . \tag{40}$$

Použitím vztahu pro determinant $(a - ct'/n')(d + ct/n_0) = 1$ získáme jiné vyjádření pro zvětšení

$$m = \frac{1}{d + c\dfrac{t}{n_0}} . \tag{41}$$

Nakonec dostáváme pro sdružené roviny předmětu a obrazu transformační rovnici

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{h}' \\ \boldsymbol{s}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ -c & \dfrac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix} . \tag{42}$$

Důležité sdružené roviny optické soustavy jsou ty, pro něž příčné zvětšení je rovno jedné, tzv. hlavní roviny. Jejich polohu obdržíme řešením vztahů (39) a (41) pro t a t', jestliže položíme $m = 1$. Pro jejich vzdálenost od krajních ploch soustavy bude platit

$$t_H = \frac{1 - d}{c} n_0 , \quad t'_{H'} = \frac{a - 1}{c} n' , \tag{43}$$

čímž dostáváme závislosti na maticových elementech transformační matice $s_{AA'}$. Obyčejně měříme polohy obrazové a předmětové roviny vzhledem k polohám hlavních rovin. Provedeme tedy transformaci podle vztahů

$$t = s + t_H , \quad t' = s' + t'_{H'} , \tag{44}$$

odkud pro elementy matice a_{12}, a_{22} dostáváme použitím (43)

$$m = a - c\frac{t'}{n'} = a - c\frac{s'}{n'} - c\frac{t'_{H'}}{n'} = 1 - c\frac{s'}{n'} , \tag{45}$$

$$\frac{1}{m} = d - c\frac{t}{n_0} = d + c\frac{s}{n_0} + c\frac{t_H}{n_0} = 1 + c\frac{s}{n_0} .$$

Potom transformační matice soustavy pro vzdálenosti měřené od hlavních rovin bude

$$(46)\qquad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 - c\dfrac{s'}{n'} & 0 \\ c & 1 + c\dfrac{s}{n_0} \end{pmatrix},$$

kde z původních prvků zůstal jen prvek $a_{21} = c$. Jeho význam obdržíme z podmínky, že determinant se rovná jedné:

$$\left(1 - c\frac{s'}{n'}\right)\left(1 + c\frac{s}{n_0}\right) = 1\,,$$

odkud plyne velmi známý vztah pro zobrazení

$$(47)\qquad \frac{n'}{s'} - \frac{n_0}{s} = c\,,$$

kde maticový prvek $c = n'/f' = -n_0/f$. Veličiny f' a f jsou obrazová a předmětová ohnisková vzdálenost. Použitím prvku a_{11} ze (46) a (47) bude pro zvětšení platit vztah

$$(48)\qquad m = \frac{s'}{s}\frac{n_0}{n'}\,.$$

Jestliže v posledním vztahu $s \to \infty$, zvětšení $m \to 0$ a vzdálenost obrazového ohniska od poslední lámavé plochy bude podle (39)

$$(49)\qquad t'_{F'} = n'\frac{a}{c} = a\,.\,f'$$

a podobně pro vzdálenost předmětového ohniska od první plochy podle (48) a (41)

$$(50)\qquad t_F = -\,n_0\frac{d}{c} = d\,.\,f\,.$$

Z posledních dvou vztahů vyplývá význam maticových prvků a, d, které určují polohy ohniskových rovin optické soustavy.

Další zjednodušení a idealizace záleží v zavedení tenkých čoček, jejichž tloušťka je daleko menší než ostatní rozměry. Tenká čočka se potom uvažuje jako lámavá plocha s lámavostí

$$(51)\qquad \varphi = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

a další vyšetřování je stejné jako u soustavy lámavých ploch.

VYJÁDŘENÍ PARAXIÁLNÍCH VELIČIN PARAMETRY SOUSTAVY

Konečné parametry paprsku po průchodu optickou soustavou dostaneme podle maticového popisu pomocí výsledné matice (25), která je dána jako součin jednotlivých refrakčních a translačních matic typu (14) a (18).

Nyní budeme vyšetřovat určení prvků výsledné transformační matice, tj. stanovení souřadnic obrazových bodů, ohnisek, ohniskových vzdáleností apod. v závislosti na parametrech soustavy: poloměrech křivostí lámavých ploch, tloušťkách a indexech lomu. Omezíme transformační matici tak, že krajní matice budou refrakčními maticemi krajních ploch a označíme prvky matic písmeny α, β, γ, δ:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \beta_{n-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma_{n-1} & 1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1 & \beta_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma_1 & 1\end{pmatrix}. \tag{52}$$

Uvažujme nejprve jednu čočku složenou ze dvou lámavých ploch

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \beta_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma_1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1\gamma_1 + 1 & \beta_1\\ \gamma_1\beta_1\gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_2 & \beta_1\gamma_2 + 1\end{pmatrix}. \tag{53}$$

Jak je patrno z přílohy B, můžeme prvky transformační matice pokládat za Gaussovy závorky. Pro transformační matici jedné čočky budou prvky vyjádřeny takto:

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta_1\gamma_1 + 1 = [\beta_1, \gamma_1]\,,\\ \beta &= \beta_1 = [\beta_1]\,,\\ \gamma &= \gamma_1\beta_1\gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = [\gamma_2, \beta_1, \gamma_1]\,,\\ \delta &= \beta_1\gamma_2 + 1 = [\gamma_2, \beta_1]\,;\end{aligned} \tag{54}$$

prvky transformační matice optické soustavy složené z n lámavých ploch budou

$$\begin{aligned}\alpha &= [\beta_{n-1}, \gamma_{n-1}, \beta_{n-2} \ldots \beta_1, \gamma_1]\,,\\ \beta &= [\beta_{n-1}, \gamma_{n-1}, \beta_{n-2} \ldots \beta_1]\,,\\ \gamma &= [\gamma_n, \beta_{n-1}, \ldots \beta_1, \gamma_1]\,,\\ \delta &= [\gamma_n, \beta_{n-1}, \ldots \beta_1]\,.\end{aligned} \tag{55}$$

Užitím transformační matice (37) a prvků (55) můžeme obdržet vztahy pro zvětšení (39), (41), sečnou vzdálenost obrazové roviny (40), sečné vzdálenosti hlavních rovin (43), popř. (49) a (50), ohniskovou vzdálenost apod. v závislosti na parametrech soustavy $\gamma_i = -\varphi_i$, $\beta_i = d_i/n_i$.

PŘÍKLADY POUŽITÍ MATIC

Pro ilustraci uvádíme dva příklady užití matic v geometrických výpočtech optických soustav. Příklady jsou zadány tabulkou. Prvky transformační matice je možno vypočítat buď postupným násobením matic, nebo pomocí Gaussových závorek. Z výsledných prvků jsou určeny polohy ohnisek a hlavních rovin optické soustavy.

Příklad 1:

r	n	n'	t'	t'/n'	$n'-n$	$\varphi = \dfrac{n'-n}{r}$
45,10	1	1,54	5	3,2468	0,54	0,01197
−40,47	1,54	1,62	2,5	1,5432	0,08	−0,001977
∞	1,62	1			−0,62	0

$$s = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5432 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}001977 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3{,}2468 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}01197 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}945596 & 4{,}799906 \\ -0{,}010070 & 1{,}006419 \end{pmatrix}$$

$$f' = \frac{1}{c} = \frac{1}{0{,}010070} = 99{,}305$$

$$t_H = \frac{1-d}{c} = -0{,}637$$

$$t'_{H'} = \frac{a-1}{c} = -5{,}403$$

$$t_F = -\frac{d}{c} = -99{,}942$$

$$t'_{F'} = \frac{a}{c} = 93{,}902$$

$$\begin{aligned}
a &= \alpha = [\beta_2, \gamma_2, \beta_1, \gamma_1] = \gamma_1\beta_1\gamma_2\beta_2 + \gamma_1\beta_1 + \gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_2 + 1 = 0{,}945596 \\
-b &= \beta = [\beta_2, \gamma_2, \beta_1] = \beta_1\gamma_2\beta_2 + \beta_1 + \beta_2 = 4{,}799906 \\
-c &= \gamma = [\gamma_3, \beta_2, \gamma_2, \beta_1, \gamma_1] = \gamma_1\beta_1\gamma_2\beta_2\gamma_3 + \gamma_1\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_2\gamma_3 + \\
&\qquad + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = -0{,}010070 \\
d &= \delta = [\gamma_3, \beta_2, \gamma_2, \beta_1] = \beta_1\gamma_2\beta_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_3 + \beta_2\gamma_3 + 1 = 1{,}006419
\end{aligned}$$

Příklad 2:

r	n	n'	t'	t'/n'	$n'-n$	$\varphi = \dfrac{n'-n}{r}$
30	1	1,5	6	4	0,5	0,0167
−60	1,5	1	10	10	−0,5	0,00833
20	1	1,5	6	4	0,5	0,025
40	1,5	1			−0,5	−0,0125

$$s = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}0125 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}025 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}00834 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}0167 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}521601 & 16{,}16632 \\ -0{,}035173 & 0{,}82706 \end{pmatrix}$$

$$f' = \frac{1}{c} = 28{,}431$$

$$t_H = -\frac{d-1}{c} = 4{,}917$$

$$t'_{H'} = -\frac{1-a}{c} = -13{,}601$$

$$t_F = -\frac{d}{c} = -23{,}514$$

$$t'_{F'} = \frac{a}{c} = 14{,}830$$

Příloha A

Vyšetřujme dvě lineární transformace

$$(A1) \qquad \begin{aligned} z_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 & y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ z_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 & y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ z_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \times a_{33}y_3 & y_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{aligned}$$

Dosazením pravých tří rovnic do levých dostaneme z_i v závislosti na x_i

$$(A2) \qquad \begin{aligned} z_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3\,, \\ z_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3\,, \\ z_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3\,, \end{aligned}$$

kde

$$(A3) \qquad \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}\,, \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

obecně

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{jk} \quad \text{pro} \quad i, k = 1, 2, 3\,.$$

Obdržíme tedy koeficienty c_{ik} jako součet párových součinů koeficientů i-tého řádku prvních tří rovnic (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) s koeficienty k-tého sloupce druhých tří rovnic (b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}).

Úlohy tohoto typu se zjednoduší zavedením pojmu matice, což je tabulka s koeficienty transformací. Tak např. máme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Součin dvou matic je definován prvky ($A3$) a je možno psát $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B}$, což značí symbolicky

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Avšak dvě matice můžeme násobit pouze tehdy, jestliže si odpovídají jejich rozměry. Např. jestliže $\boldsymbol{A}$ je matice s n řádky a s sloupky, musí $\boldsymbol{B}$ být matice s s řádky a t sloupky a jejich součinem bude matice s n řádky a t sloupky.

Často se vyskytují matice tvořené jedním sloupcem. Položme např.

$$(A4) \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Potom můžeme psát transformace ($A1$) a ($A2$) v jednoduchém maticovém tvaru

$$(A5) \qquad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{Y}, \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B} \,.\, \boldsymbol{Y}, \quad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C} \,.\, \boldsymbol{X}.$$

Z definice plyne bezprostředně, že pro maticový součin platí zákon asociativní

$$(A6) \qquad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{S} \,.\, \boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{R} \,.\, \boldsymbol{S})\, \boldsymbol{T}.$$

Dostáváme tedy

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \,.\, \boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B})\, \boldsymbol{X}.$$

Totožnost $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ je možno napsat v maticovém tvaru takto:

$$(A7) \qquad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{X}, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je tzv. jednotková matice.

Snadno se přesvědčíme, že obecně neplatí zákon komutativní

$$(A8) \qquad \boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA},$$

avšak jednotkovou matici můžeme napsat libovolně zleva nebo zprava

$$\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}.$$

Matice A se nazývá nevlastní, jestliže existuje taková druhá matice A^{-1}, která se nazývá reciproká, pro niž platí

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A \,. \tag{A9}$$

Nevlastní matice má důležitý význam v teorii lineárních transformací. Opačnou transformaci pro $Y = AX$ obdržíme pouze v tom případě, jestliže A je nevlastní matice. Jestliže tedy existuje A^{-1}, pak násobením zleva dostaneme

$$A^{-1}Y = A^{-1}AX = IX = X \,. \tag{A10}$$

Snadno se dá dokázat, že reciproká matice k dané matici A, jestliže existuje, je pak jediná. A dále je možno dokázat, že matice A (3×3) je nevlastní pouze v tom případě, kdy její determinat je různý od nuly

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \,. \tag{A11}$$

Transformovaná matice k dané matici A je definována záměnou prvků a_{ik} prvky a_{ki}, tedy

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} . \tag{A12}$$

Z definice součinu matic bezprostředně plyne

$$(A \,.\, B)' = B' \,.\, A' \,. \tag{A13}$$

Matice A, pro niž platí $A' = A$, je tzv. symetrická matice $(a_{ik} = a_{ki})$. Jestliže jsou dány dvě matice stejného řádu, definuje se jejich součet takto

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \,. \tag{A14}$$

Násobení matice skalárem znamená násobení všech prvků matice tímto skalárem.

Příloha B

Mějme uspořádanou množinu prvků $a_1, a_2, \ldots a_n$. Pro jednoduchost se omezíme pouze na reálná čísla. Gaussovu závorku, kterou budeme značit takto

$$[a_1, a_2, \ldots a_n] \,,$$

budeme definovat rekurentním vztahem. Závorka bez prvku $[\,]$ se rovná jedné.

Závorka s jedním prvkem je rovna tomuto prvku. Závorka obsahující n prvků se definuje pomocí závorek s $(n-1)$ a $(n-2)$ prvky. Tedy

$$
\begin{aligned}
(B1) \qquad & [\ ] = 1\,, \\
& [a_1] = a_1\,, \\
& [a_1, a_2] = [a_1]\,.\,a_2 + [\,]\,, \\
& \quad \ldots \\
& [a_1, a_2, \ldots a_n] = [a_1, a_2, \ldots a_{n-1}]\, a_n + [a_1, a_2, \ldots a_{n-2}]\,.
\end{aligned}
$$

Pro názornost napíšeme závorky postupně až do šesti prvků:

$$
\begin{aligned}
&[a_1] = a_1 \\
&[a_1, a_2] = a_1a_2 + 1 \\
&[a_1, a_2, a_3] = a_1a_2a_3 + a_1 + a_3 \\
&[a_1, a_2, a_3, a_4] = a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2 + a_1a_4 + a_3a_4 + 1 \\
&[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] = a_1a_2a_3a_4a_5 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_5 + a_1a_4a_5 + a_3a_4a_5 + \\
&\qquad + a_1 + a_3 + a_5 \\
&[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6] = a_1a_2a_3a_4a_5a_6 + a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2a_3a_6 + a_1a_2a_5a_6 + \\
&\qquad + a_1a_4a_5a_6 + a_3a_4a_5a_6 + a_1a_2 + a_1a_4 + a_1a_6 + \\
&\qquad + a_3a_4 + a_3a_6 + a_5a_6 + 1
\end{aligned}
$$

Závorka s n prvky bude tedy mít tyto sčítance:

1. součin všech prvků,
2. všechny součiny s $(n-2)$ prvky, které se utvoří tak, že se položí prvky po pořádku počínaje lichým prvkem, přičemž se musí liché a sudé indexy střídat,
3. součiny z $(n-4)$ prvků téhož typu, $(n-6)$ prvků atd.,
4. jestliže n je sudé, pak poslední sčítanec je jedna; jestliže n je liché, pak na konci je součet prvků s lichými indexy.

Uvedeme některé věty, které jsou potřebné při počítání s Gaussovými závorkami v optice. Z rekurentního vztahu plyne, že Gaussova závorka je lineární funkcí svého posledního prvku a matematickou indukcí lze dokázat, že je lineární funkcí též svého prvního prvku:

$$
(B2) \qquad [a_1, \ldots a_n] = [a_1, \ldots a_{n-1}]\, a_n + [a_1, \ldots a_{n-2}] = a_1[a_2, \ldots a_n] + \\ + [a_3, \ldots a_n]\,.
$$

Odtud také vyplývá, že Gaussova závorka je symetrická

$$
(B3) \qquad [a_1, a_2, \ldots a_n] = [a_n, a_{n-1}, \ldots a_1]\,.
$$

Indukcí lze dále dokázat, že Gaussova závorka je lineární funkcí libovolného prvku

$$
(B4) \qquad [a_1, \ldots a_n] = [a_1, \ldots a_{k-1}]\,[a_{k+1}, \ldots a_n]\, a_k + [a_1, \ldots a_{k-1} + \\ + a_{k+1}, \ldots a_n]\,.
$$

Důležitým důsledkem předchozí věty je jednoduché pravidlo derivace

$$(B5) \qquad \frac{\partial}{\partial a_k}[a_1, \dots a_n] = [a_1, \dots a_{k-1}][a_{k+1}, \dots a_n].$$

Gaussova závorka je také lineární funkcí libovolné „podzávorky“

$$(B6) \qquad [a_1, \dots a_n] = [a_1, \dots a_k][a_{k+1}, \dots a_n] + [a_1, \dots a_{k-1}][a_{k+2}, \dots a_n].$$

Dále platí následující rovnost

$$(B7) \qquad D_n = \begin{vmatrix} [a_1, \dots a_n] & [a_2, \dots a_n] \\ [a_1, \dots a_{n-1}] & [a_2, \dots a_{n-1}] \end{vmatrix} = (-1)^n, \; n > 1$$

nebo obecněji

$$\begin{vmatrix} [a_1, \dots a_k] & [a_2, \dots a_k] \\ [a_1, \dots a_m] & [a_2, \dots a_m] \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} . [a_{m+2}, \dots a_k]$$

pro $1 < m < k$.

Literatura

[1] HERZBERGER M.: *Modern Geometrical Optics.* Ruský překlad: *Sovremennaja geometričeskaja optika.* Izd. Inostr. Litěratury, Moskva 1962.

[2] O'NEILL E. L.: *Introduction to Statistical Optics.* Addison-Wesley Publ. Comp., Inc., Reading 1963.

[3] BROUWER W.: *Matrix Methods in Optical Instrument Design.* W. A. Benjamin Inc., New York — Amsterdam 1964.

[4] HAVELKA B.: *Geometrická optika I.* NČSAV, Praha 1955.

K PROBLÉMU VZNIKU LOKÁLNÍCH SESKUPENÍ HMOT V NESTATICKÉM MODELU VESMÍRU

ZDENĚK URBÁNEK, Praha

ÚVOD

Při studiu vesmíru jako celku můžeme s dostatečnou přesností předpokládat ve shodě s kosmologickým principem, že v dnešním vývojovém stadiu je hmota ve vesmíru rozložena homogenně a izotropně. Metrika prostoročasu v tomto případě je vyjádřena výrazem, který poprvé odvodil ROBERTSON [1] a nezávisle na něm A. G.