

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jozef Kelemen; Alica Kelemenová

O biológii, matematike a výpočtoch - rozhovor s A. Lindenmayerom

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 31 (1986), No. 2, 96--105

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138680>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1986

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O biológii, matematike a výpočtoch — rozhovor s A. Lindenmayerom

Alica Kelemenová a Jozef Kelemen, Bratislava

Aristid Lindenmayer sa narodil r. 1925 v Budapešti. Vzdelaním i odbornou orientáciou svojej práce je v prvom rade biológom (pôsobí ako profesor teoretickej biológie na univerzite v Utrechte). Záujem o exaktný opis biologickej reality ho však priviedol k myšlienkam, ktoré sa stali jadrom dnes už široko a mohutne sa rozvíjajúcej oblasti teoretickej computer science — teórie L-systémov. (Prvú monografiu o matematickej teórii L-systémov [48] venovali jej autori G. Rozenberg a A. Salomaa „... Aristidovi, ktorý nám dal písmeno L“.)

V júni roku 1983 bol prof. Lindenmayer hosťom Matematického ústavu SAV. Hneď v prvý večer jeho bratislavského pobytu sa v reštaurácii hotela Carlton rozprúdila debata, ktorej obsah sa nám javil byť zaujímavý pre každého, kto je zvedavý na cesty ku aplikáciám matematiky a prípadne aj na osobné skúsenosti niekoho, kto po takejto ceste pomerne dlho a úspešne putuje. Zopárkrát sme sa ešte k téme nášho rozhovoru vrátili a tak sa to, čo nás najväčšmi zaujímalo, kondenzovalo do štyroch otázok. Prof. Lindenmayer bol taký láskavý a počas návštevy jedného z nás v Utrechte vypracoval obsah svojich odpovedí v písomnej podobe. S jeho dovoľením predkladáme takto vzniknutý text čitateľom Pokrokov.

1. Ako ste dospeli k myšlienke modelovať biologické procesy pomocou výpočtových pojmov?

Prešiel som vskutku dosť dlhú cestu. O problematiku pôvodu biologických štruktúr (morfogenézu) som sa začal zaujímať už v začiatkoch svojich štúdií. Profesor Buzágh bol ten, kto ma počas mojich štúdií fyzikálnej a koloidnej chémie na univerzite v Budapešti upozornil na potrebu teoreticky vysvetliť také druhy nespojitostí, aké pozorujeme v koloidných suspenziách a v geloch. Na prednáškach z biológie a z chémie som na tento problém narazil opäť: Akým spôsobom je možné opísať štruktúry, ktoré sú v priestore alebo v čase čiastočne diskkrétne a čiastočne spojité? Žiadali sa formulácie v abstraktnom jazyku odlišnom od spojitaj matematiky a ja som sa domnieval, že by sa mohli vytvoriť v rámci matematickej logiky. Po dlhom hľadaní som roku 1952 nadabil na referenciu Woodgerovej práce (v tom čase som bol študentom (graduate student) biológie na Michiganskej univerzite v Ann Arbor). Woodger sa pokúšal formalizovať ústredné biologické teórie, medzi nimi aj genetiku a vývojovú biológiu, asi od r. 1930.

Bol prvým, kto aplikoval matematickú logiku v duchu Whiteheadovho a Russelovho [1] *Principia Mathematica* v biológii. Zastával názor, že k vyjadreniu radu biologických fenoménov sa relačné a množinovo-teoretické pojmy hodia väčšmi než analytické. Hoci jeho formalizácie vývoja, dedičnosti a evolúcie [2] nezískali — najmä z dôvodu filozoficky motivovaného trvania na blízkosti k pozorovaniam a vyhýbania sa teoretickým pojmom — medzi biológmi popularitu, jeho základné predpoklady zdôrazňujúce potrebu relačného, nekvantitatívneho a neanalytického formalizmu pre biológiu sa koncom 50. rokov značne rozšírili.

Po získaní doktorátu filozofie (Ph. D.) na Michiganskej univerzite som u Woodgera strávil akademický rok v Londýne v Anglicku. Učil som sa od neho logiku a vypracovával som axiomatický systém na opis životných cyklov [3]. Už vtedy som sa zaoberal problémami rastu a tvarov. Práve tieto problémy upriamili moju pozornosť na funkciu buniek a ich vzájomné vzťahy v priebehu vývoja viacbunkových organizmov, teda na niečo, čo vo svojej axiomatizácii zdôrazňoval aj Woodger. V týchto časoch som sa zaoberal až do roku 1968 aj experimentálnou prácou, a to vo Philadelphii a v New Yorku. Po takýchto skúsenostiach nadišla chvíľa môjho prvého stretnutia s teóriou automatov. Stalo sa to v roku 1962–63, keď som pracoval v biomatematickej skupine Univerzity štátu Severná Karolina a keď som mal často možnosť stretávať sa s embryológom J. R. Greggom z Dukovej univerzity. Predtým aj on spolupracoval s Woodgerom a napísal články o množinovo-teoretických základoch taxonómie a embryológie. V tých časoch sa stretol s teóriou automatov (ktorá bola iniciovaná v r. 1956 prácami Moora a Mealyho) a spoločne sme študovali Ginsburgov prvý systematický výklad tejto teórie [4]. Približne v tom istom čase vyšla Ashbyho kniha [5], ktorá sprístupnila teóriu riadenia aj pre nematematikov (už v roku 1963 som používal túto knihu pri prednáškach pre biológov). Zbehosť v logike, ktorú sme obaja získali u Woodgera, ukázala sa byť pre nás, biológov, nevyhnutnou k tomu, aby sme v tom čase mohli preniknúť do teórie automatov.

Vznik L -systémov sa viaže k jednému problému z Ashbyho knihy. V kapitole o konečných automatoch (cvičenie 4.7.7) sa pýta: Aké chovanie je možné očakávať od dlhého reťazca obojsmerne pospájaných konečných automatov v prípade, keď dostávajú vstupy od oboch susedných automatov? V Kleeneho práci [6] je samozrejme možné nájsť odpoveď pre prípad siete konečných automatov konštantného rozsahu: Chovanie takéhoto reťazca je v zásade rovnaké ako chovanie jedného konečného automatu. Mňa však znepokojovala otázka chovania rozrastajúceho sa poľa konečných automatov. Takéto polia totiž môžu poslúžiť ako realistická simulácia rastu bunkových vlákien, aké nachádzame napríklad u rias, machov či húb. Rozuzlenie tohto problému sa ale ukázalo byť náročnejšie, než som očakával. To však nič nemení na fakte, že v roku 1968 došlo k definícii L -systémov ako interagujúcich rozrastajúcich lineárnych polí konečných automatov [7]. O obojstrannej interakcii hovoríme v prípade, keď každý automat (bunka) dostáva vstupy od oboch svojich susedov. O jednosmernej vtedy, keď prichádzajú vstupy iba od ľavých, resp. iba od pravých susedov, a o nula-strannej interakcii vtedy, keď k prechodu vstupov nedochádza. V tomto tkvie príčina, pre ktorú boli neskôr zariadenia generujúce polia označené názvami $2L$ -, $1L$ - a $0L$ -systémy [8, 9, 10, 11]. L -systémy sa od (von Neumannových) celulárnych automatov či od

mozaikových systémov líšia podstatne práve tým, že rastú nielen na okrajoch poľa. Nakoniec sme si uvedomili, že pracujeme s konštrukciami podobnými gramatikám. Toto poznanie vyústilo po mojom prechode z New Yorku do Utrechtu r. 1968 do intenzívnej spolupráce s Rozenbergom, Hermanom a van Dalenom. Namiesto toho, aby sme hovorili o lineárnych poliach automatov so stavmi, vstupmi a výstupmi a o transformáciách takýchto polí v diskretných časových okamihoch do nových polí, majúcih prípadne inú dĺžku, začali sme naše štruktúry skúmať ako slová nad danou abecedou (množinou stavov). Formulovali sme bezkontextové či kontextové prepisovacie pravidlá, ktoré sme aplikovali paralelným spôsobom. Medzi terminálnymi a neterminálnymi symbolmi abecedy sme nerobili rozdiel. Takto sme vytvárali nové slová. Potom nasledoval búrlivý rozvoj, ktorý viedol ku vytvoreniu celého radu nových definícií a výsledkov publikovaných doteraz vo viac ako 600 článkoch (pozri Bibliografiu *L*-systémov, [12]).

Štúdium globálneho vývoja mnohobunkových štruktúr na základe lokálnych transformačných pravidiel ostáva aj naďalej základnou biologickou motiváciou našej práce. Súbor lokálnych pravidiel musí byť pre všetky prítomné jednotky rovnaký a musí byť aplikovateľný v každom kroku odvodenia simultánne. Prvá z uvedených požiadaviek súvisí s prítomnosťou prirodzených podjednotiek – buniek – vo vyvíjajúcom sa organizme, spomedzi ktorých každá je nositeľkou rovnakého genetického materiálu (reťazca DNK). Druhá požiadavka je nevyhnutná z dôvodu, že vo fyzikálnych systémoch a biologických organizmoch prebiehajú všetky procesy v tom istom fyzikálnom čase. Preto nie je možné použiť lokálne pravidlá asynchrónnym spôsobom: čas plynie pre všetky bunky rovnako. Stav bunky v určitom časovom intervale je reprezentovaný symbolom. Symboly je možné zostavovať z parametrických hodnôt. Dá sa predpokladať, že počet stavov, v ktorých sa bunka môže v organizme nachádzať, je konečný, pretože obyčajne môžeme previesť diskretizáciu parametrov. Bunky sú totiž v organizme obyčajne v rovnovážnych podmienkach. Odvodenie v *L*-systéme predstavuje pre daný organizmus postupnosť stavov jeho vývoja. V rámci odvodenia možno nájsť aj cesty vedúce cez odvodené symboly. V organizme zodpovedajú týmto cestám bunky (nevetviace sa časti ciest) a skupiny buniek (cesty zoskupené do stromových štruktúr). Takýmto spôsobom získava vývoj relačnú formuláciu; o nájdenie tejto formulácie sa pokúšal Woodger (s tou výhradou, že by odmietol používanie „nepozorovateľných“ stavov buniek).

Dve ohraničenia pôvodného formalizmu *L*-systémov sú jasné na prvý pohľad. V prvom rade to, že sú striktné jednorozmerné. Väčšina viacbunkových organizmov je však tvorená dvojrozmernými a trojrozmernými poľami buniek. Toto ohraničenie sa postupne prekonáva najprv zavedením vetviacich *L*-systémov a v súčasnosti konštrukciou dvojrozmerných (mapových) a trojrozmerných (*cellwork*) *L*-systémov. Iným ohraničením je, že vzájomné polohy buniek a ich nasledovníkov musia ostať v poli nemenné (bunky sa v poli nemôžu pohybovať). Táto konzervačná vlastnosť čini *L*-systémy aplikovateľnými na vývoj rastlín, pri ktorom sa celá história vyvíjajúcich sa štruktúr prísne zachováva. Zapríčiňuje však vo všeobecnosti nevhodnosť ich použitia pri vývoji živočíchov, u ktorých často dochádza k pohybu buniek (platí to o *L*-systémoch v terajšej ich podobe; začína sa však uvažovať o algoritmoch na triedenie buniek).

2. Mali vaše matematické modely vplyv na poznanie biologických procesov? Ak áno, ktorých?

Tieto modely boli vytvorené, aby bolo možné porozumieť vývoju rastlín. Tomuto účelu, ako sme to už vyššie ozrejmili, do istej miery poslúžili. Ako o možných oblastiach aplikácií sa neskôr uvažovalo aj o iných častiach biológie a aj o iných vedných disciplínach, akými sú napríklad ekológia, výskumy vývoja mozgu, architektonická tvorba a plánovanie, sociológia a teória hudby. Bolo by však predčasné hovoriť o možných výsledkoch takýchto pokusov.

Najväčšia perspektíva, ktorú L -systémy otvárajú nášmu chápaniu rastlinného vývoja, súvisí so zložitou. Botanici si už oddávna uvedomujú, že vývoj individuálnych rastlín v rozličných rastlinných spoločenstvách vytvára štruktúry, ktoré hodnotíme intuitívne ako rôzne zložené. Napríklad machy, paprade, nahosemenné a krytosemenné (kvitnúce) rastliny predstavujú postupnosť, v ktorej zložitosť stúpa od predchádzajúceho k nasledujúcemu členu. Tento intuitívny pojem biologickej zložitosti však nikdy nebol sformalizovaný. V rámci L -systémov sa teraz ukazuje možnosť odlišovať vývoj rôznych zložitostí, napríklad taký, pri ktorom ku interakcii medzi podjednotkami nedochádza, (vývoj typu OL) a taký, pri ktorom je vzájomná interakcia nevyhnutnosťou (vývoj typu IL).

Ku charakterizácii uvedených dvoch typov vývojových procesov na základe rastových funkcií a dospelých jazykov máme k dispozícii silné matematické teorémy. Herman a Walker [13] napríklad dokázali o triede dospelých jazykov (o množinách terminálnych slov) OL -systémov, že je identická s triedou bezkontextových jazykov. Keďže je bezkontextové jazyky možné charakterizovať Bar Hillelovou pumpovacou lemov, je to možné urobiť aj s dospelými jazykmi OL -systémov. To znamená, že ak daný jazyk nemá pumpovaciu vlastnosť, nemôže byť dospelým jazykom OL -systému. Povedané inak, typ vývoja, vedúceho k takejto množine terminálnych štruktúr nemôže prebiehať bez interakcií.

Podobne máme pre charakterizáciu rastových funkcií deterministických OL -systémov a tiež rastových funkcií rozrastajúcich sa (nevymazávajúcich) deterministických OL -systémov k dispozícii vety Paza, Salomaa a Soittolu [14, 15] a Hermana a Vitányiho [16]. Takto je možné na základe istých vlastností odlišiť rast v OL - a IL -systémoch a rozhodnúť, či môžu niektoré typy rastu nastať bez interakcií.

Základný rozdiel vo vývoji s interakciami a bez nich môžeme badať u hociktorých rastlinných štruktúr. Silueta smreka sa nám zdá byť jednoduchšou od siluety duba, pretože prvú možno získať bez interakcií, kým druhú nie. Vo vývoji typu IL alebo OL však existujú aj jemnejšie rozdiely, ktoré možno vyjadriť pomocou počtu stavov buniek, pravidiel alebo úrovní [17].

Pre rôzne typy L -systémov poznáme tiež zaujímavé výsledky o zložitosti riešenia problému výskytu na Turingovom stroji [18]. Čas výpočtu tohto problému pre triedu deterministických OL -jazykov na deterministickom Turingovom stroji je úmerný n^2 , pre OL -jazyky je úmerný $n^{3,81}$, pre deterministické tabuľkové OL -jazyky je polynomiálny (neznámeho stupňa) a pre tabuľkové OL -jazyky je to NP-úplný problém (posledný výsledok dosiahol Van Leeuwen [19]). Ehrenfeucht, Lee a Rozenberg [20, 21] určili pre tie isté triedy jazykov zložitost' problému výskytu podslov. Ku komplexnejšie-

mu chápaniu rozdielov medzi uvedenými triedami jazykov prispeli aj rôzne výsledky o rozhodnuteľnosti, napríklad Čulíkov a Frišov dôkaz [22] rozhodnuteľnosti problému ekvivalencie pre deterministické OL -systémy a skorší Blattnerovej výsledok o nerozhodnuteľnosti tohto problému pre OL -systémy. [23].

Popri úvahách o zložitosti spočívajú najdôležitejšie aplikácie L -systémov v simuláciách špecifických procesov rastlinného vývoja. Pre tieto účely vytvorili Baker a Herman [24] počítačový program nazvaný *CELIA*, ktorý sme v Utrechte podstatne prepracovali. *CELIA* umožňuje simulovať vývoj jednoduchých i vetviacich sa bunkových vlákien tak s interakciami pozdĺž vlákien, ako aj bez nich. Stav buniek sú určované daným počtom (do 100) parametrov. V danom okamihu sa hodnota každého z parametrov určuje na základe jeho predchádzajúcej hodnoty a hodnôt parametrov v susediacich bunkách. Okrem iného boli týmto spôsobom ako vývojové riadiace mechanizmy naprogramované a výpočtovo realizované difúzne a reakčno-difúzne procesy. *CELIA* bola použitá napríklad k simulácii vývoja heterocystných útvarov modrozelených rias [24] a inflorescentného vývoja u niektorých druhov rodu zložnokvetých (*Compositae*) [25, 26]. Použitie iné programy boli vykonané aj simulácie vývoja koreňových sústav a stromov [28].

V súčasnosti je všeobecne známe, že veľmi dôležitou stránkou rastlín je „modulárnosť“ ich vývoja, a veľká časť výskumu je orientovaná na správanie sa týchto modulov (podjednotiek). Uvedený prístup sa niekedy nazýva tiež „demografický“ [29], pretože v prípade vývoja bez interakcií je možné vypočítať nárast počtu podjednotiek rastovými maticami podobnými Leslieho maticiam, ktoré sa využívajú v demografii. Táto oblasť tvorí špeciálnu súčasť teórie rastových funkcií OL -systémov, a to ako pre deterministické, tak aj pre stochastické OL -systémy (stochastické OL -systémy boli skúmané v prácach [30, 31]). Rastové funkcie oboch spomínaných typov OL -systémov boli využité na opis populácií deliacich sa buniek [32, 33, 34].

Rastúce modulárne štruktúry je vo väčšine prípadov potrebné opísať dvojrozmernými alebo trojrozmernými generujúcimi systémami. Z toho dôvodu sú skúmané grafové a poľové OL -systémy [35, 36, 37, 38] ako aj mapové OL -systémy [39, 40] a tzv. *cell-work* OL -systémy [41]. Charakterizačné výsledky týkajúce sa rastových funkcií a iných vlastností týchto viacdimezných OL -systémov je možné sčasti získať z prv spomenutých výsledkov týkajúcich sa jednorozmerných OL -systémov. Aplikácie viacdimezných systémov prebiehajú v oblasti bunkových klonov a máme zostavené aj počítačové programy na ich simuláciu pomocou mapových L -systémov [42, 43] ako aj pre bunkové vzory na cylindrických plochách (*phyllotaxis*, [44]).

Žiaľ, zatiaľ čo matematická teória L -systémov je spracovaná v mnohých knihách a zborníkoch konferencií [45, 46, 47, 48], jej biologické aplikácie sú poväčšinou roztrúsené v množstve časopiseckých článkov. Dostupných je len zopár pomerne krátkych prehľadov ([49] a moja kapitola v [46]).

3. Sledujete vývoj svojich systémov aj po matematickej línii?

Majú takto dosahované výsledky svoju biologickú interpretáciu?

Snažím sa čítať matematické články o L -systémoch, len čo sa o nich dozviem (napríklad cez *Mathematical Reviews* [50]). Aspoň tie, ktoré sa dotýkajú hlavných výsledkov.

Nie je to práca ľahká, nájde sa medzi nimi dosť veľa technických a náročných článkov. Určite existuje veľa článkov (a niekoľko kníh), ktoré sa priamo či nepriamo zaoberajú biologickou motiváciou tejto oblasti. Niektoré závažnejšie články tohto druhu som už bol spomenul vyššie. Existujú však aj ďalšie, ktoré sa týkajú špecifických problémov výpočtov alebo počítačových simulácií. Ostatne celý rad výsledkov prispieva k rozvoju matematických základov tejto oblasti, a má teda nepriamy vplyv na jej rozvoj. Medzi takéto výsledky možno zaradiť rad výsledkov o rozhodnuteľnosti a o rastových funkciách.

Iná a zložitejšia je situácia v spojitosti s rôznymi riadiacimi zariadeniami, ktoré boli pridané k L -systémom počas ich rozvoja. Niektoré spomedzi týchto zariadení rozširujúcich či ohraničujúcich použiteľnosť pravidiel je totiž obtiažne biologicky motivovať. Napríklad obmedzenia na počet symbolov, ktoré môžu byť v jednom kroku odvodenia prepísané, alebo ovplyvnenie prepisu symbolu jeho polohou je ťažko možné zosúladiť s tým základným predpokladom týchto modelov, v zmysle ktorého každá vyvíjajúca sa podjednotka nesie rovnaký program vývoja. Je samozrejme vždy možné očakávať objavenie takých vývojových procesov, pri ktorých vznikne požiadavka takýchto ohraničení. Pravdepodobne je však lepšie zmieriť sa so skutočnosťou, že každá matematická teória má svoj vlastný život a vnútorný vývoj a že rozhodne nie je vecou biológov určovať matematikom, čo by mali považovať za zaujímavé a hodné skúmania a čo nie. Totiž aj v prípade, keď matematicky obdržané výsledky nie sú aplikovateľné v biológii, je ešte celkom možné, že sú aplikovateľné inde v matematike či v iných prírodovedných disciplínach.

Tabuľky a kódovania sú dva špeciálne druhy riadiacich mechanizmov, ktoré boli ku L -systémom pridané a ktoré majú priamu biologickú interpretáciu, aj keď nie v takej všeobecnej podobe, v akej boli pôvodne navrhnuté. Tabuľkové L -systémy zaviedol Rozenberg [51, 52] ako prirodzené rozšírenie OL - a IL -systémov. V prípade tabuľkových systémov je na každom kroku odvodenia potrebné vybrať pravidlá z jednej spomedzi niekoľkých tabuliek. Výber tabuliek je nedeterministický. Je jasné, že tento aspekt tabuľkových systémov je novým zdrojom nedeterminizmu v riadení. Zdvojená neurčitost' v prípade tabuľkových OL -systémov (keď aj výber pravidiel vo vnútri každej tabuľky môže byť nedeterministický) spôsobuje, že rozpoznanie generovanej štruktúry je obtiažnejšie. Táto skutočnosť je ostatne vyjadrená už spomínanou NP-úplnosťou problému výskytu slova v tabuľkových OL -systémoch [19]. Aj keď sa všeobecný tvar tabuľkových systémov javí byť matematicky príťažlivý, jeho biologická použiteľnosť je obmedzená. Zaujímavejšie sú ale tie tabuľkové systémy, v ktorých sú jednotlivé tabuľky deterministické (takže je možné získať rastové funkcie deterministických tabuľkových OL -systémov [15, 48]) a tie, v ktorých je postupnosť použitia tabuliek určená jednoduchým pravidlom, napríklad regulárnou riadiacou postupnosťou (takto získame dvojnásobne deterministické tabuľkové OL -systémy [53]). V realite ľahko nájdeme príklady takýchto systémov napr. v podobe pravidelne sa meniacich podmienok, za ktorých prebieha vývoj [54]. Niektoré deterministické prípady tabuľkových systémov sú teda aplikovateľné, aj keď o všeobecnom tvare to nemusí byť pravda.

Ďalším špeciálnym prípadom dodatočných ohraničení L -systémov je „kanonické rozšírenie“ („kanonické ohraničenie“). Táto operácia spočíva v zoskupení slov obsahu-

júcich len symboly z nejakej podabecedy a vo vytvorení jazyka takýchto slov [46, 55]. Ukázalo sa, že matematicky sú tieto rozšírené *L*-jazyky (*EOL*-, *ETOL*- a *EIL*-jazyky) zaujímavé, predovšetkým vďaka dobrým uzáverovým vlastnostiam (na rozdiel od *OL*- alebo *IL*-jazykov, ktoré vzhľadom na väčšinu operácií uzavreté nie sú). Ale nebolo zrejmé, prečo by ich mali študovať biológovia. Neskôr však bolo dokázané, že rozšírenia rozličných tried *L*-jazykov sú identické s kódmi týchto jazykov [56]. Kódy slov môžu byť interpretované ako štruktúry získané nedokonalým pozorovaním, teda ako štruktúry, v ktorých niektoré stavy podjednotiek nie je možné navzájom rozlíšiť. Z biologického hľadiska však opäť nie sú zaujímavé všetky kódy, ale iba tie, ktoré ponechávajú určité dobre pozorovateľné symboly nezmenené. Zvláštnu dôležitosť majú a široko sú skúmané napríklad kódy rôznych deterministických tried *L*-systémov (ako vetviace sa systémy, v ktorých kód nemení symbol vetvenia). Z biologického hľadiska sú zaujímavé aj rastové funkcie homomorfizmov *DOL*-systémov, (*HDOL*-systémov), pretože reprezentujú rastové funkcie štruktúr, v ktorých majú rozličné podjednotky rôzne váhy [48].

4. Je možné očakávať v blízkej budúcnosti taký vplyv „neexaktných“ vied (biológie, spoločenských vied) na vývoj matematiky alebo teoretickej computer science, aký mala v minulom storočí a v prvej polovici tohto storočia fyzika (kalkulus, štatistika, navrhovanie experimentov)?

Z mojich predchádzajúcich odpovedí je — myslím si — jasné, že vidím stimulujúci účinok biológie na matematiku, aspoň pokiaľ ide o jej diskrétnu a kombinatorickú časť. Dnes je zrejme diskrétna a kombinatorická podstata biologických štruktúr počnúc molekulárnou úrovňou až po úroveň bunkovú a populačnú. Poukazuje to na podstatný rozdiel medzi biologickými a fyzikálnymi systémami. Praktickí biológovia si tento rozdiel uvedomujú a vychádzajú z neho sa im zdá byť zrejme, že ešte stále nemajú k dispozícii také matematické nástroje, ktoré by umožňovali efektívne prevádzať výpočty o biologických štruktúrach a procesoch.

Teória formálnych jazykov, ktorá je spolu s teóriou automatov dôležitou súčasťou teoretickej computer science, môže zohrať v tomto vývoji významnú úlohu. Existuje inak obyčajne nezdôrazňovaný geometrický aspekt teórie formálnych jazykov, ktorý je však obzvlášť vhodný pri štúdiu biologických štruktúr. Dokonca už aj najbežnejšie gramatiky a systémy generujúce jednorozmerné slová sú schopné produkovať geometrické tvary, t.j. množiny slov s akousi abstraktnou priestorovou vlastnosťou. Napríklad jazyk pozostávajúci zo slov $a^n b^n c^n$ (pre všetky n) predstavuje množinu úsečiek rozdelených na tri rovnaké úseky. Takýto jednorozmerný typ útvarov je potom možné porovnať s typmi útvarov, s ktorými sa zapodieваме v dvojrozmernej geometrii. Môžeme ho napríklad zrovnáť s množinou všetkých rovnostranných trojuholníkov. V takomto akomsi zmysle sú teda generatívne systémy skúmané v rámci teórie formálnych jazykov porovnateľné s generatívnymi prostriedkami geometrie, akými sú pravidlá na bisekciu úsečiek alebo pravidlá konštrukcie rovnostranných trojuholníkov.

„Geometrická“ stránka formálnych jazykov sa stáva ešte očividnejšou v spojitosti s grafovými gramatikami alebo mapovými či *cellwork* generatívnymi systémami. Použitie týchto zariadení na vytváranie ozajstných dvojrozmerných či trojrozmerných obráz-

kov nás presvedča o skutočnosti, že pravidlá gramatík musia poskytovať aj topologické informácie o štruktúrach, a tiež analyticko-geometrické informácie týkajúce sa vzdialeností, uhlov a pod. Vyššie spomínaná „geometria“ formálnych jazykov má teda svoju „topologickú“ a aj „analytickú“ zložku. V jednorozmernom prípade nie je táto skutočnosť očividná, nakoľko je tu topológia pre všetky slová rovnaká (s výnimkou cirkulárnych slov, pozri [57]). My sme obe zložky skúmali pre prípad mapových generatívnych systémov a ich implementácií, poskytujúcich kresby bunkových klonov [43].

Všetko toto poukazuje azda na nevyhnutnosť vyvinúť pre výskum biologických štruktúr akýsi zmiešaný diskretno-spojité matematický formalizmus. Nazdávam sa, že rovnaký vývoj prebieha aj v teórii riadenia, kde je pri vytváraní komerčných alebo priemyselných modelov potrebné opísať súčasne diskretné aj spojité procesy. To isté platí pravdepodobne vo všeobecnosti aj v spojitosti so spoločenskými vedami. Dobrý príklad takýchto zmiešaných modelov poskytuje vzrastajúce využívanie teórie hier. K tomu však, aby bola pre „neexaktné“ vedy nájdená vhodná podoba matematiky, je treba vykonať ešte hodný kus práce.

Literatúra

- [1] WHITEHEAD, A. N. and RUSSEL, B.: *Principia Mathematica, 3 Volumes, Second edition*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1925.
- [2] WOODGER, J. H.: *The Axiomatic Methods in Biology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1937.
- [3] LINDENMAYER, A.: *Life cycle as hierarchical relations*. In: *Form and Strategy in Science* (J. R. GREGG and F. T. C. HARRIS, eds.), D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1964, 416–470.
- [4] GINSBURG, S.: *An introduction to Mathematical Machine Theory*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1962.
- [5] ASHBY, W. R.: *An Introduction to Cybernetics*. Chapman and Hall, London, 1961.
- [6] KLEENE, S. C.: *Representation of events in nerve nets and finite automata*. In: *Automata Studies* (C. E. SHANNON and J. MCCARTHY, eds.) Princeton Univ. Press, Princeton, 1956, 1–41.
- [7] LINDENMAYER, A.: *Mathematical models of cellular interactions in development, I. Filaments with one-sided inputs. II. Simple and branching filaments with two-sided inputs*. J. Theor. Biol. 18, (1968) 280–299, 300–315.
- [8] HERMAN, G. T.: *Computing ability of a developmental model for filamentous organisms*. J. Theor. Biol. 25 (1969) 421–435.
- [9] VAN DALEN, D.: *A note on some systems of Lindenmayer*. Math. Systems Theory 5 (1971) 128–140.
- [10] ROZENBERG, G. and DOUCET, P. G.: *On OL languages*. Inf. and Control 19 (1971) 302–318.
- [11] LINDENMAYER, A.: *Developmental systems without cellular interactions, their languages and grammars*. J. Theor. Biol. 30 (1971) 455–484.
- [12] MÄENPÄÄ, J. and ROZENBERG, G. and SALOMAA, A.: *Bibliography of L-systems*. Report No. 81–20, Inst. of Appl. Math. and Computer Science, Univ. of Leiden, 1981 (suplementárna bibliografia bola opublikovaná tiež v Bulletin EATCS, No. 13, Febr. 1981).
- [13] HERMAN, G. T. and WALKER, A.: *Context-free languages in biological systems*. Int. J. Comp. Math. 4 (1975) 369–391.
- [14] PAZ, A. and SALOMAA, A.: *Integral sequential word functions and growth equivalence of Lindenmayer systems*. Inf. and Control 23 (1973) 313–343.
- [15] SALOMAA, A. and SOITTOILA, M.: *Growth functions of L systems: characterization and decidability*, dve časti v knihe *Automata-Theoretical Aspects of Formal Power Series*. Springer-Verlag, New York, 1978.

- [16] HERMAN, G. T. and VITÁNYI, P. M. B.: *Growth functions associated with biological development*. Amer. Math. Monthly 83 (1976) 1—15.
- [17] KELEMENOVÁ, A.: *Levels in L-systems*. Mathematica Slovaca 33 (1983) 87—98.
- [18] JONES, N. D. and SKYUM, S.: *Complexity of some problems concerning L-systems*. Math. Systems Theory 13 (1979) 29—43.
- [19] VAN LEEUWEN, J.: *The membership question for ETOL languages is polynomially complete*. Inf. Proc. Letters 3 (1975) 138—143.
- [20] EHRENFUCHT, A. and LEE, K. P. and ROZENBERG, G.: *Subword complexities of various classes of deterministic developmental languages without interactions*. Theor. Computer Sci. 1 (1975) 59—78.
- [21] EHRENFUCHT, A. and LEE, K. P. and ROZENBERG, G.: *Subword complexities of various classes of deterministic developmental languages with interactions*. Int. J. Computer and Inf. Sci. 4 (1975) 219—236.
- [22] ČULIK II, K. and FRIŠ, I.: *The decidability of the equivalence problem for DOL systems*. Inf. and Control 35 (1977) 20—39.
- [23] BLATTNER, M.: *The unsolvability of the equality problem for the sentential forms of context-free grammars*. J. Computer and Systems Sci. 7 (1973) 463—468.
- [24] BAKER, R. and HERMAN, G. T.: *Simulation of organisms using a developmental model, I. Basic description, II. The heterocyst formation problem in blue-green algae*. Int. J. Bio-Med. Computing 3 (1972) 201—215, 251—267.
- [25] FRIJTERS, D.: *Principles of simulation of inflorescence development*. Annals of Botany 42 (1978) 549—560.
- [26] JANSSEN, J. M. and LINDENMAYER, A.: *Quantitative descriptions and hormone distributions models for basitonic branching and basipetal flowering sequences in the floral development of Compositae*. Rukopis, 1983.
- [27] BELL, A. D. and ROBERTS, D. and SMITH, A.: *Branching patterns: The simulation of plant architecture*. J. Theor. Biol. 81 (1979) 351—375.
- [28] FISHER, J. B. and HONDA, H.: *Branch geometry and effective leaf area: a study of Terminalia branching pattern, I. Theoretical trees, II. Survey of real trees*. Amer. J. Botany 66 (1979) 633—644, 645—655.
- [29] HARPER, L. J. and BELL, A. D.: *The population dynamics of growth form in organisms with modular construction*. In: *Population Dynamics* (R. M. Anderson and B. D. Tutner and L. R. Taylor, eds.) Blackwell, Oxford, 1979.
- [30] EICHHORST, P. and SAVITCH, W.: *Growth functions of stochastic Lindenmayer systems*. Inf. and Control 45 (1980) 217—228.
- [31] JÜRGENSEN, H. and MATTHEWS, D. E. and WOOD, D.: *Life and death in Markov deterministic tabled OL systems*. Inf. and Control 48 (1981) 80—95.
- [32] JÜRGENSEN, H. and MATTHEWS, D. E.: *On cell division as a branching process*. Biol. Zentralblatt 102 (1983) 535—543.
- [33] HARTE, C. and LINDENMAYER, A.: *Mitotic index in growing cell populations: mathematical models and computer simulations*. Biol. Zentralblatt 102 (1983) 509—533.
- [34] LINDENMAYER, A.: *Growth functions of cell populations with lineage control*. In: *Biomathematics and Cell Kinetics* (A. J. VALLERON and P. D. M. MACDONALD, eds.), Elsevier/North-Holland Biomed. Press, Amsterdam, 1978, 117—131
- [35] ČULIK II, K. and LINDENMAYER, A.: *Parallel graph generating and graph recurrence systems for multicellular development*. Int. J. Gen. Systems 3 (1976) 53—66.
- [36] ČULIK II, K. and WOOD, D.: *A mathematical investigation of propagating graph OL systems*. Inf. and Control 43 (1979) 50—82.
- [37] SIROMONEY, R. and SIROMONEY, G.: *Extended controlled table L-arrays*. Inf. and Control 35 (1977) 119—138.
- [38] NIRMAL, N. and KRITHIVASAN, K.: *EOL and ETOL array languages*. Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 90 (1981) 167—180.

- [39] MAYOH, B. H.: *Mathematical models for cellular organisms*. Techn. Rep. No. DAIMI-PB 12, Datalogisk Afdeling, Aarhus Universitet, 1973
- [40] LINDENMAYER, A. and ROZENBERG, G.: *Parallel generation of maps: developmental systems for cell layers*. Lect. Notes in Computer Sci. vol. 73, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 301–316.
- [41] LINDENMAYER, A.: *Models for plant tissue development with cell division orientation regulated by preprophase bands of microtubules*. Differentiation 26 (1984) 1–10.
- [42] SIERO, P. L. J. and ROZENBERG, G. and LINDENMAYER, A.: *Cell division patterns: syntactical description and implementation*. Computer Graphics and Image Processing 18 (1982) 329–346.
- [43] DE DOES, M. and LINDENMAYER, A.: *Algorithms for the generation and drawing of maps representing cell clones*. Lect. Notes in Computer Sci. vol. 153, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 39–57.
- [44] VEEN, A. H. and LINDENMAYER, A.: *Diffusion mechanism for phyllotaxis*. Plant Physiology 60 (1977) 127–139.
- [45] ROZENBERG, G. and SALOMAA, A. (eds.): *L-Systems*. Lect. Notes in Computer Sci. vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [46] HERMAN, G. T. and ROZENBERG, G.: *Developmental Systems and Languages*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1975 s príspevkom od A. LINDENMAYERA (táto kapitola je opublikovaná v ruskom preklade v Kibernetičeskij sbornik, novaja serija, vyp. 17. Mir, Moskva, 1980, 192 až 232).
- [47] LINDENMAYER, A. and ROZENBERG, G. (eds.): *Automata, Languages, Development*. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1976.
- [48] ROZENBERG, G. and SALOMAA, A.: *The Mathematical Theory of L Systems*. Academic Press, New York, 1980.
- [49] LINDENMAYER, A.: *Developmental algorithms: lineare versus interactive control mechanisms*. In: *Developmental Order: Its Origin and Regulation, 40th Symp. Soc. Dev. Biol.* (S. SUBTELNY and P. B. GREEN, eds.), Alan R. Liss Inc., New York, 1982, 219–245.
- [50] Mathematical Reviews, Annual Index Volumes uvádza od r. 1981 práce o L-systémoch pod kódom 68 D 22.
- [51] ROZENBERG, G.: *TOL systems and languages*. Inf. and Control 23 (1973) 357–381.
- [52] EHRENFUCHT, A. and ROZENBERG, G.: *A pumping theorem for deterministic ETOL languages*. RAIRO-Sér. Rouge 9 (1975) 13–23.
- [53] ČULIK II, K. and WOOD, D.: *Doubly deterministic tabled OL systems*. Int. J. Computer and Inf. Sci. 8 (1979) 335–347.
- [54] SURAPIPTH, V. and LINDENMAYER, A.: *Thioguanine-dependent light sensitivity of perithecial initiation in Sordaria fimicola*. J. Gen. Microbiol. 57 (1969) 227–237.
- [55] HERMAN, G. T. and LINDENMAYER, A. and ROZENBERG, G.: *Description of developmental languages using recurrence systems*. Math. Systems Theory 8 (1975) 316–341.
- [56] NIELSEN, M. and ROZENBERG, G. and SALOMAA, A. and SKYUM, S.: *Nonterminals, homomorphisms and codings in different variations of OL-systems. I. Deterministic systems, II. Nondeterministic systems*. Acta Informatica 3, 4 (1974) 357–364, 87–106.
- [57] RUOHONEN, K.: *On circular words and $(\omega^* + \omega)$ -powers of words*. Elektron. Inf. Verarb. und Kybernetik 13 (1977) 3–12.