Alois Urban

Geometrie pláství v rovině

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 7 (1962), No. 4, 193--210

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138583

ke zcela nové společenské úloze a také ve zcela jiné dějinné perspektivě než kapitalismus hodnotí smysl a význam veškeré práce vykonané pro její rozvoj." V dalších částech svého projevu hovořil s. Dolanský o perspektivě Jednoty při rozvoji naší socialistické společnosti a při přechodu ke komunismu. Potom odevzdal s. J. Dolanský Řád práce akademiku V. Kořínkovi a s. V. Hájkovi a akademik Šorm vyznamenání „Za zásluhy o výstavbu" časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální a medaili Jana Ámose Komenského ministru školství a kultury F. Kahudovi, akademiku B. Bydžovskému, in memoriam akademiku J. Hroncovi, dále akademiku V. Jarníkovi, M. Valouchovi. F. Duškovi, P. Bartošovi a F. Vejsadovi.

V další části slavnosti odevzdal akademik Kořínek diplomy nově zvoleným čestným členům JČMF a na zakončení zahrálo kvarteto matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university skladbu J. Zacha.

GEOMETRIE PLÁSTVÍ V ROVINĚ*)

Alois Urban, Praha

Článek uvádí čtenáře do základů jedné speciální části novější diferenciální geometrie, podává přehled jejích základních pojmů a ukazuje její souvislost s teorií nomogramů.

1. ÚVOD

Tento článek chce v podstatě upozornit na velmi zajímavou a lehce psanou knížku z diferenciální geometrie (i pro matematika, který se právě nezabývá geometrií nebo dokonce speciálně diferenciální geometrií). Jde o publikaci známého hamburského geometra Wilhelma Blaschka, Einführung in die Geometrie der Waben (Úvod do geometrie pláství), která vyšla jako IV. svazek knižnice Elemente der Mathematik vom höheren Standtpunkt aus (Základy matematiky z vyššího hlediska), vydávané nakladatelstvím Birkhäuser[1]). Knížka je u nás přístupna rovněž v ruském překladě, který vyšel poměrně nedávno[2]).

Jak již název naznačuje, podává se v ní úvod do geometrie pláství. Geometrie pláství není nic jiného než známá „textilní geometrie" nebo také „geometrie tkání", jak původně Blaschke nazval nové odvětví klasické diferenciální geometrie, k jehož vzniku dal sám podnět a jehož základy vybudoval se svými spolupracovníky a žáky. Od původního názvu ustoupil hlavně proto, že vznikala řada nedorozumění, jež

*) Předneseno na 1. čs. konferenci o diferenciální geometrii, která se konala od 10. do 15. 9. 1961 na Richtrových boudách v Krkonoších.

[1]) W. Blaschke, *Einführung in die Geometrie der Waben*, Basilej-Stuttgart, 1955, str. 108.

[2]) В. Бляшке, Введение в геометрию тканей, Москва, 1959, стр. 144.

vrcholila tím, že pracovníci textilního průmyslu se na něho stále obraceli s odbornými dotazy z textilu.

Dal proto přednost novému označení. Je prý pro něho mnohem příjemnější stýkat se s včelami a včelaři než s tkalci. Ruský překlad se pouze pro gramatické obtíže s ruským slovem plástev (сот, соты je pomnožné) přidržel původního označení. České názvy „tkáň", „tkanina" se nezdají nejlepší, a proto snad v češtině bude vhodné užívat překladu nového označení, tedy „plástev", „geometrie pláství" apod.

První prací z tohoto nového odvětví diferenciální geometrie je šestistránková italská práce G. THOMSENA[3]) z r. 1927, která vznikla na Blaschkův popud. V 20. a 30. letech vycházely potom již další práce od různých autorů vesměs pod společným titulem „Topologische Fragen der Differentialgeometrie" (Topologické otázky diferenciální geometrie), které byly uveřejňovány převážně v Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg (Pojednání matematického semináře hamburské university). Nejvíce prací napsali Wilhem Blaschke a Geritt BOL; ze 66 prací, které vznikly do r. 1938, každý z nich měl po 14. Prvý souborný přehled výsledků podal právě W. Blaschke, a to teprve v r. 1932 v Chicagu v rozmnožených přednáškách[4]), z nichž později vznikla ve spolupráci s G. Bolem dobře známá učebnice Geometrie der Gewebe (Geometrie tkání)[5]), která vyšla v r. 1938 jako 49. svazek Springerovy řady učebnic „Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen".

Vyjití učebnice neznamenalo, že se W. Blaschke přestal o nové geometrické téma zajímat. Na několika přednáškových cyklech v Barceloně, Hamburku, Cařihradě a Messině referoval o své geometrii pláství; přednášky byly nejprve publikovány španělsky v Barceloně v r. 1954[6]). Z nich právě v r. 1955 vznikl Úvod do geometrie pláství.

Geometrie pláství je zajímavou, ještě zdaleka ne uzavřenou diferenciálně geometrickou disciplínou. Na rozdíl od jiných moderních matematických disciplín základní úlohu v ní hrají zcela názorné pojmy. V úvodě ke své knížce W. Blaschke, chtěje navázat na postesknutí známého italského geometra Francesca SEVERIHO, že „La matematica moderna è ammalata di astrattismo" (moderní matematika trpí přílišnou abstrakcí), vyslovuje přesvědčení, že jím pěstované nové odvětví diferenciální geometrie má velmi zdravý základ. Hned však dodává: či je málo moderní?

2. CO JE GEOMETRIE PLÁSTVÍ?

Zhruba řečeno, geometrie pláství je topologická diferenciální geometrie „v malém". Podle známého KLEINOVA erlangenského programu se geometrie klasifikují podle

[3]) G. THOMSEN, Un teorema topologico sulle schiere di curve..., Boll. un Mat. ital., Bologna, *6*, 1927.

[4]) W. BLASCHKE, *Topological Questions of Differential Geometry*, Chicago, 1932.

[5]) W. BLASCHKE und G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Berlin, 1938, str. 340.

[6]) W. BLASCHKE, *Introductiòn a la Geometria de los tejidos*, Seminaro Matematico de la Universidad de Barcelona, 1954.

základní grupy transformací. To platí i pro diferenciální geometrii. Vedle diferenciální geometrie obyčejného euklidovského (metrického) prostoru existují ještě další diferenciální geometrie, např. afinní, projektivní, konformní atd. Nejobecnější geometrií v tomto smyslu je právě topologická diferenciální geometrie.

Topologická diferenciální geometrie v euklidovské rovině studuje geometrické vlastnosti, které jsou invariantní vzhledem ke všem zobrazením

$$2.1 \qquad x^* = x^*(x, y), \quad y^* = y^*(x, y), \quad \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial x}, & \frac{\partial y^*}{\partial x} \\ \frac{\partial x^*}{\partial y}, & \frac{\partial y^*}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x^*, y^*)}{\partial(x, y)} \neq 0 .$$

Přitom x, y jsou kartézské souřadnice roviny, $x^*(x, y)$, $y^*(x, y)$ analytické funkce reálných proměnných x, y s nenulovým jakobiánem, takže rovnice (2.1) udávají vzájemně jednoznačné spojité zobrazení jisté oblasti $\mathfrak{G}$ roviny $\mathfrak{E}$ na jistou oblast $\mathfrak{G}^*$ téže roviny.[7] Taková zobrazení se nazývají *topologická zobrazení*. Názorným příkladem topologických zobrazení oblasti $\mathfrak{G}$ roviny jsou různé tvary, kterých může nabýt oblast $\mathfrak{G}$ zakreslená např. na mírně napnuté gumové bláně při natažení nebo naopak při smršťění gumy. Úplně obdobně lze definovat pojem topologické diferenciální geometrie v prostoru, na plochách apod.

Topologická diferenciální geometrie v rovině studuje rovinné útvary ve dvou směrech: a) „v malém" (lokální vlastnosti), b) „ve velkém" (globální vlastnosti). Geometrie pláství se zajímá o prvý okruh otázek. Podobná situace je ovšem již i v klasické metrické diferenciální geometrii, která rovněž v podstatě se rozpadá na dva směry, z nichž jeden studuje lokální vlastnosti křivek a ploch (většina učebnic diferenciální geometrie křivek a ploch se zabývá právě těmito otázkami) a druhý studuje globální vlastnosti.

Je zřejmé, že z topologického hlediska každá křivka v každém svém obyčejném bodě je „v malém" topologicky ekvivalentní s úsečkou. Podobně ovšem i plocha v regulárním bodě je topologicky ekvivalentní s částí roviny. Z hlediska topologické diferenciální geometrie nelze tedy lokálně rozlišovat křivky ani plochy. Vzniká otázka, které lokální vlastnosti křivek a ploch se vlastně mají v topologické lokální diferenciální geometrii studovat. Na tuto otázku je možno odpovědět takto: Nelze-li topologicky „v malém" rozlišovat křivky nebo plochy, je možno všimnout si systému křivek nebo ploch.

Nejjednodušší systém křivek v rovině je vrstva křivek. *Vrstvou* $\mathfrak{S}$ *křivek* $\mathfrak{k}(u)$ rozumíme jednoparametrickou soustavu takových křivek, že

(a) každým bodem dané oblasti $\mathfrak{G}$ prochází právě jedna křivka soustavy,

(b) jednoduše pokrývá oblast $\mathfrak{G}$ v tom smyslu, že žádná z křivek $\mathfrak{k}(u)$ nemá v $\mathfrak{G}$ singulární bod (tento požadavek ovšem souvisí s požadavkem (a)).

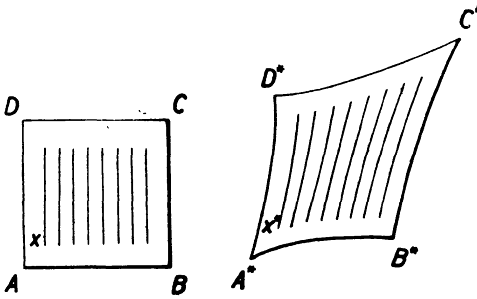
[7]) Označení útvarů se přidržuje v hlavních rysech označení užitých ve zmíněné Blaschkově knížce, aby čtenář, který se míní geometrií pláství podrobněji zabývat, mohl se v ní lépe orientovat.

Jsou-li x, y kartézské souřadnice v rovině, pak rovnici vrstvy křivek můžeme psát ve tvaru

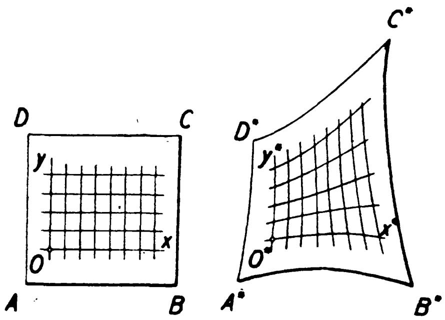
2.2 $$F(x, y, u) = 0\,,$$

kde u značí parametr volený v nějakém vhodném intervalu I nebo častěji ve tvaru

2.3 $$u = u(x, y)\,,$$



Obr. 1.



Obr. 2.

kde u opět značí parametr a $u(x, y)$ je analytická funkce vyznačených argumentů. Pro pevné $u \in I$ dostáváme tedy určitou křivku $\mathfrak{k}(u)$ vrstvy (2.3). Požadavek, že křivky vrstvy nemají v $\mathfrak{S}$ singulární bod, je totožný s požadavkem, aby nikde v $\mathfrak{S}$ nebyly

2.4 $$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

současně rovny nule.

Snadno se uváží, že vrstva křivek nemá topologický diferenciální invariant, tj. všechny vrstvy jsou „v malém" topologicky ekvivalentní (obr. 1).

Topologicky ekvivalentní „v malém" jsou i *sítě křivek* (obr. 2), tj. dvojice vrstev $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2)$ křivek $\mathfrak{k}(u_i)$

2.5 $$u_i = u_i(x, y)$$

(kde $u_i \in I_i$ $(i = 1, 2)$, $u_i(x, y)$ jsou analytické funkce) takových, že pro ně platí:

(a) křivky různých vrstev, které procházejí týmž bodem dané oblasti, se v tomto bodě nedotýkají,

(b) dvě křivky různých vrstev mají v dané oblasti nejvýše jeden společný bod a

(c) pro něž v oblasti $\mathfrak{S}$ jest

2.6 $$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x, y)} = \det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

(což není nezávislé na předchozích podmínkách).

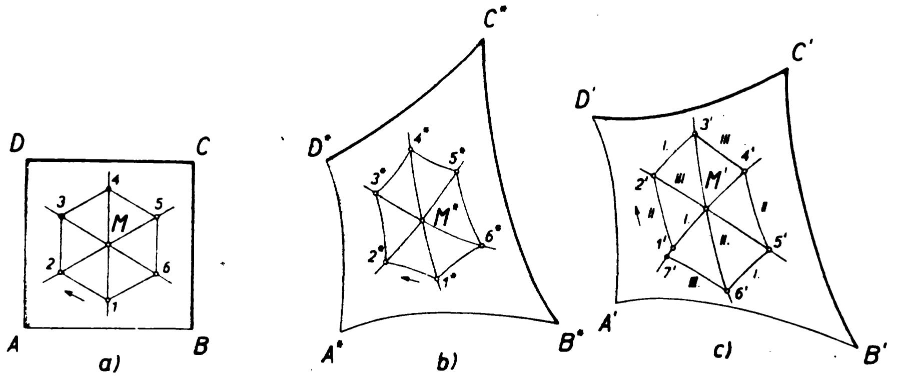
Teprve tři vrstvy křivek $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$

2.7
$$u_i = u_i(x, y)$$
$$(u_i \in I_i,\ i = 1, 2, 3)$$

takové, že každé dvě tvoří síť, tedy takové, že každým bodem dané oblasti $\mathfrak{G}$ prochází právě jedna křivka každé vrstvy, které se vzájemně nedotýkají a pro něž platí podmínka

2.8
$$\frac{\partial(u_i, u_j)}{\partial(x, y)} \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,,$$

mohou být topologicky „v malém" různé.



Obr. 3.

Příklad 2.1. Topologicky ekvivalentní a neekvivalentní soustavy křivek. Jestliže za trojici vrstev křivek volíme tři vrstvy rovnoběžek v rovině (tedy tři osnovy rovnoběžek), které vzájemně svírají úhel $\frac{1}{3}\pi$, pak je možno kolem každého bodu M roviny sestrojit pravidelný šestiúhelník o středu v M tak, že jeho úhlopříčky i strany leží na přímkách daných vrstev přímek; při konstrukci vyjdeme z libovolného bodu 1 $(\neq M)$, který leží na přímce jedné vrstvy jdoucí bodem M; další je již zřejmé z obr. 3a. Topologickou transformací (2.1) (např. roztažením) získáme z tohoto šestiúhelníka křivočarý šestiúhelník (obr. 3b), který je s předchozím topologicky ekvivalentní. Je však zřejmé, provedeme-li naznačenou konstrukci pro libovolné křivky (2.7) s podmínkami (2.8) $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$, tj. sestrojíme-li bodem M' křivky všech tří vrstev I – III (symbol I (II, III) značí, že křivka náleží vrstvě $\mathfrak{S}_i$ pro $i = 1$ (2, 3)), zvolíme-li na jedné z nich bod $1' \neq M'$ a ke konstrukci dalších bodů $2' - 7'$ užijeme již jen křivek daných vrstev křivek, pak nemusí vždy $7' \equiv 1'$. Z toho je patrno, že trojice vrstev křivek v obr. 3c není topologicky ekvivalentní s trojicí vrstev v obr. 3a nebo v obr. 3b.

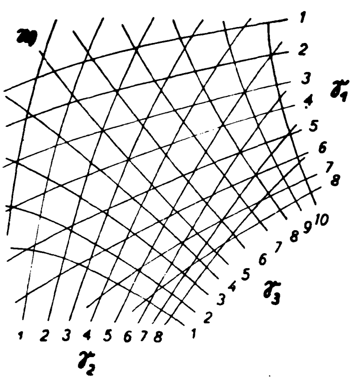
Geometrický útvar, který je tvořen trojicí vrstev $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ o rovnicích (2.7), (2.8), se nazývá *křivočará* 3-*plástev* nebo stručně jen *plástev* $\mathfrak{W}$.

O oblasti $\mathfrak{G}$ (tzv. *oblast regularity* plástve) je vhodné předpokládat, že je vypuklá vzhledem k dané plástvi $\mathfrak{W}$. Rozumí se tím, že průnik každé křivky plástve s oblastí $\mathfrak{G}$ je jediný spojitý oblouk.

3. PLÁSTVE A NOMOGRAMY

Teorie pláství těsně souvisí s monografií, která, jak známo, nachází své uplatnění především v technické praxi, kde se jí užívá ke grafickému znázornění funkčních vztahů.

Vyloučíme-li z rovnic (2.7) všech tří vrstev $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ křivek dané plástve $\mathfrak{W}$ definované v oblasti $\mathfrak{G}$ proměnné x, y, dostaneme tzv. *rovnici plástve*



Obr. 4.

3.1 $$W(u_1, u_2, u_3) = 0\,;$$

touto rovnicí jsou vázány parametry u_1, u_2, u_3 křivek plástve, které procházejí jediným bodem.

Obráceně, je-li v oblasti regularity $\mathfrak{G}$ dána nějaká analytická funkce W tří proměnných u_i $(i = 1, 2, 3)$, která vyhovuje v $\mathfrak{G}$ podmínce

3.2 $$\frac{\partial W}{\partial u_i} \neq 0\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

potom lze z topologického hlediska studovat plástev diferenciálně geometricky, tj. „v malém".

Z uvedeného je hned patrno, je-li dána plástev $\mathfrak{W}$ graficky a jestliže k jednotlivým křivkám každé z vrstev plástve jsou připojeny příslušné parametry u_i $(i = 1, 2, 3)$, pak $\mathfrak{W}$ je nomogramem rovnice (3.1) (obr. 4).

Lehko se uváží, že všechny plástve, které příslušejí dané rovnici (3.1), jsou „v malém" topologicky ekvivalentní, tj. existují transformace (2.1), které převádějí (v oblasti $\mathfrak{G}$) křivky vrstev $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ plástve $\mathfrak{W}$ v křivky $\mathfrak{S}_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$ plástve $\mathfrak{W}$ (v oblasti $\mathfrak{G}^*$), při čemž $\mathfrak{W}$ a $\mathfrak{W}^*$ mají touž rovnici (3.1).

Je zřejmé, že např. změna parametru v jednotlivých vrstvách dané plástve nemá vliv na její topologickou strukturu; nemůže se proto změnit ani rovnice plástve. Jestliže však uvažujeme jen funkci $W(u_1, u_2, u_3)$, tzv. *funkci plástve*, pak ovšem k dané plástvi $\mathfrak{W}$ existuje nekonečně mnoho takových funkcí. Známe-li jednu z nich, např. $W(u_1, u_2, u_3)$, lze všechny ostatní funkce dané plástve z ní sestrojit těmito transformacemi:

(1) Transformací parametrů

3.3 $$u_i = u_i(u_i^*)\,, \quad \det\left|\frac{\partial u_i}{\partial u_i^*}\right| \neq 0 \quad \text{v} \quad \mathfrak{G}\,,$$

v každé vrstvě $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ dané plástve $\mathfrak{W}$; při této transformaci je

3.4 $$W^*(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = W(u_1(u_1^*), u_2(u_2^*), u_3(u_3^*)) .$$

(2) Násobením nenulovým faktorem $H \neq 0$ v $\mathfrak{G}$:

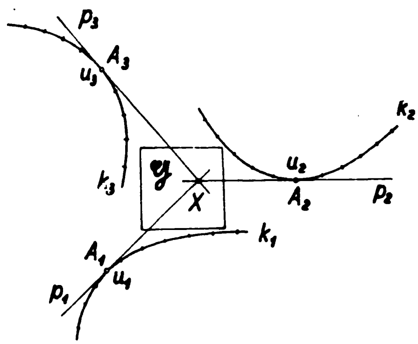
3.5 $$\hat{W}(u_1, u_2, u_3) = H(u_1, u_2, u_3)\, W(u_1, u_2, u_3) .$$

(3) Transformací

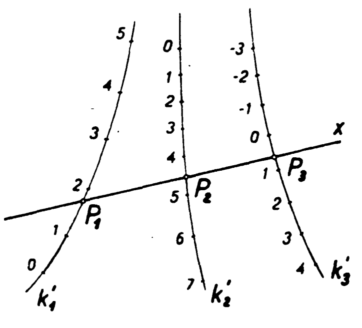
3.6 $$\tilde{W}(u_1, u_2, u_3) = F(W(u_1, u_2, u_3)) ,$$

kde

3.7 $$F(0) = 0 , \quad F'(0) \neq 0 .$$



Obr. 5.



Obr. 6.

Těmito transformacemi se rovnice plástve nemění. Funkce plástve ovšem není určena jednoznačně. Je jí však možno, známe-li nějakou vhodnou charakteristickou geometrickou vlastnost dané plástve, užitím této vlastnosti *normovat* (k normování se užívá např. tzv. křivosti plástve, která bude definována později).

Příklad 3.1. Určete funkci přímočaré plástve.

Přímočarou pláství rozumíme plástev, jejíž každá vrstva $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ je jednoparametrická soustava přímek.

Jsou-li x, y kartézské souřadnice euklidovské roviny, jsou rovnice vrstev (za jistých předpokladů o koeficientech a_i, b_i, c_i, které zde nebudeme vypisovat)

3.8 $$\mathfrak{S}_i \equiv a_i(u_i)\, x + b_i(u_i)\, y + c_i(u_i) = 0 , \quad i = 1, 2, 3$$ [8]).

Přímky vrstvy $\mathfrak{S}_i$ obecně obalí křivku k_i (obr. 5) (mohou ovšem také tvořit svazek nebo osnovu přímek). Podle našich předpokladů musí k_i ležet vně oblasti regularity $\mathfrak{G}$ plástve určené vrstvami (3.8). Každá z křivek k_i je opatřena *škálou* parametrů u_i. Za funkci dané plástve je možno vzít determinant

3.9 $$W(u_1, u_2, u_3) \equiv \begin{vmatrix} a_1(u_1), & b_1(u_1), & c_1(u_1) \\ a_2(u_2), & b_2(u_2), & c_2(u_2) \\ a_3(u_3), & b_3(u_3), & c_3(u_3) \end{vmatrix} .$$

[8]) Pro analytické vyjádření vrstev $\mathfrak{S}_i$ se v tomto případě užilo rovnic tvaru (2.2) místo rovnic tvaru (2.3).

Rovnice dané plástve

$$W(u_1, u_2, u_3) = 0 \tag{3.10}$$

udává pak podmínku pro to, aby tři přímky p_i ($i = 1, 2, 3$), jež jsou tečnami křivek k_i v bodech A_i o parametrech u_i, procházely jediným bodem X.

Poznámka. V nomografii se obvykle užívá duálního útvaru (obr. 6). Kótované obálky k_i ($i = 1, 2, 3$) přejdou v křivky k_i', tzv. *stupnice*; přímky p_i se v dualitě zobrazí do bodů P_i a průsečík X přímek p_i přejde ve spojnici x bodů P_i.

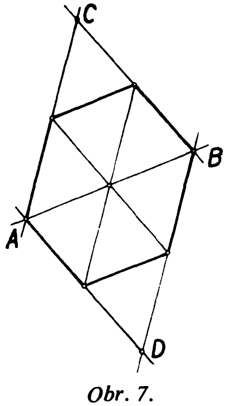
Vzniklý obrazec je známý *spojnicový nomogram.*

4. ŠESTIÚHELNÍKOVÉ PLÁSTVE

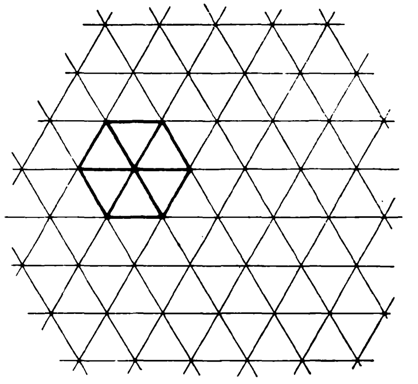
Přímočaré plástve $\mathfrak{W}$ v rovině tvořené rovnoběžnými přímkami (vrstvy plástve jsou osnovy přímek) a plástve s nimi topologicky ekvivalentní se nazývají *šestiúhelníkové plástve.*

Jaké jsou podmínky pro to, aby daná plástev v rovině byla šestiúhelníková? Najdeme nejprve geometrickou a pak analytickou charakteristiku šestiúhelníkových pláství.

U přímočaré plástve vytvořené rovnoběžnými přímkami tří daných osnov přímek můžeme podobně jako v příkladu 2.1 sestrojit šestiúhelník (středově souměrný), jehož strany a úhlopříčky jsou přímkami dané plástve (obr. 7). Konstrukce lze provést např. tak, že vyjdeme z trojúhelníka $\triangle ABC$ tvořeného přímkami plástve. Z definice plástve plyne, že v každé plástvi lze trojúhelníku z křivek plástve vepsat jediný další trojúhelník z křivek plástve. V přímočaré plástvi dané třemi osnovami rovnoběžných přímek vepsaný trojúhelník je tvořen středními příčkami daného trojúhelníka (obr. 7). Podobně *sousednímu trojúhelníku* $\triangle ABD$ plástve, tj. trojúhelníku, který s daným trojúhelníkem $\triangle ABC$ má společnou stranu (v obr. 7 stranu AB), je takto možno vepsat trojúhelník z křivek plástve. Oba vepsané trojúhelníky mají jeden z vrcholů (střed strany AB) společný.



Obr. 7.



Obr. 8.

Odtud je patrno, že v každé šestiúhelníkové plástvi je možno užitím vždy dvou sousedních trojúhelníků plástve (které ovšem mohou být i křivočaré) sestrojit uzavřený šestiúhelníkový útvar, který má sedm bodů (šest vrcholů a „střed“) a obsahuje po třech křivkách každé vrstvy dané plástve. V případě přímočaré plástve tvořené třemi osnovami rovnoběžek je to středově souměrný šestiúhelník se středem a úhlopříčkami, které jím procházejí (obr. 7).

Dá se dokázat, že tato podmínka existence uzavřených šestiúhelníkových útvarů (obecně křivočarých šestiúhelníků) je nejen nutná, ale také stačí pro to, aby daná plástev byla šestiúhelníková, tj. topologicky ekvivalentní s přímočarou pláství vytvořenou třemi osnovami rovnoběžek. Tím jsou již geometricky charakterizovány šestiúhelníkové plástve.

Jestliže každé dva směry, které určují zmíněné osnovy rovnoběžek, svírají úhel $\frac{1}{3}\pi$, nazývá se příslušná plástev *pravidelná.* Protože každou obecnou přímočarou plástev tvořenou třemi osnovami rovnoběžek je možno afinitou převést na pravidelnou plástev, je možno vzít pravidelnou plástev za reprezentanta všech šestiúhelníkových pláství (obr. 8).

Abychom mohli podat analytickou charakteristiku šestiúhelníkových pláství, můžeme se tedy omezit jen na analytické vyšetření pravidelných pláství. Rovnice osnov $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ přímek, které tvoří danou plástev

4.1 $$a_i x + b_i y + c_i = u_i\,, \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$ [9]

$(a_i, b_i, c_i$ jsou jisté konstanty, $u_i \in I_i$ jsou parametry) je možno užitím rovnic (3.3)–(3.7) normovat tak, že rovnice plástve je

4.2 $$W \equiv u_1 + u_2 + u_3 = 0\,.$$

Poznámka. Volíme-li např. pravoúhlé souřadnice v rovině tak, aby jedna osnova přímek byla rovnoběžná s osou x, pak rovnice všech tří osnov přímek můžeme uvést na tvar

$$y = u'_1\,, \quad x\sqrt{3} - y = u'_2\,, \quad x\sqrt{3} + y = u'_3\,,$$

z nichž transformací parametrů

$$u_1 = 2u'_1\,, \quad u_2 = u'_2\,, \quad u_3 = -\,u'_3$$

v jednotlivých osnovách přímek, které tvoří danou pravidelnou plástev (tj. přečíslováním přímek prvé a třetí osnovy) dostaneme rovnice

$$2y = u_1\,, \quad x\sqrt{3} - y = u_2\,, \quad -x\sqrt{3} - y = u_3\,;$$

eliminací x, y (stačí rovnice sečíst) najdeme již (4.2).

Dokázali jsme tedy:

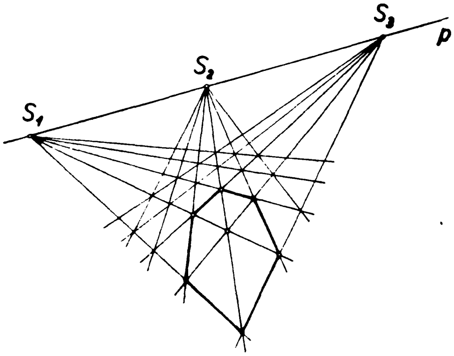
Funkci každé šestiúhelníkové plástve lze vždy vyjádřit součtem parametrů (při vhodně volené parametrizaci).

---

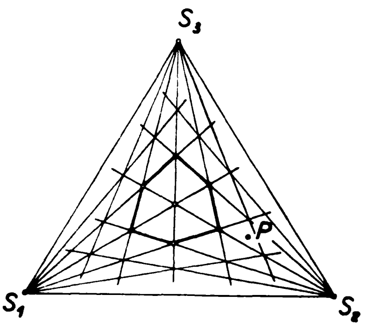
[9]) Rovnice (4.1) jsou speciálním případem rovnice (3.8) pro $a_i(u_i) = a_i$, $b_i(u_i) = b_i$, $c_i(u_i) = c_i - u_i$.

Příklad 4.1. Šestiúhelníková plástev tvořená třemi lineárně závislými svazky přímek.

Tři různé svazky přímek, jejichž středy leží na přímce p, tvoří zřejmě šestiúhelníkovou plástev. Za oblast regularity této plástve můžeme vzít např. otevřenou polorovinu určenou přímkou p (obr. 9). Tato plástev není jen topologicky, ale je již i projektivně ekvivalentní s pravidelnou pláství, u níž středy S_i $(i = 1, 2, 3)$ svazků přímek jsou nevlastní body rozšířené euklidovské roviny a přímka p je její nevlastní přímkou. (Útvar na obr. 9 je tedy v podstatě perspektivou útvaru na obr. 8.)



Obr. 9.



Obr. 10.

Příklad 4.2. Šestiúhelníková plástev tvořená třemi lineárně nezávislými svazky přímek.

Tři lineárně nezávislé svazky přímek $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ o středech S_i v euklidovské rovině tvoří rovněž šestiúhelníkovou plástev, a to uvnitř trojúhelníka $S_1S_2S_3$ (obr. 10).

Nechť

4.3 $$p_i \equiv a_i x + b_i y + c_i = 0$$

jsou rovnice stran trojúhelníka $S_1S_2S_3$. Lineární formy p_i jsou např. normovány tak, aby $p_i(P) = +1$, kde P je libovolný pevný vnitřní bod trojúhelníka $S_1S_2S_3$. Potom v každém vnitřním bodě $\triangle\, S_1S_2S_3$ je $p_i > 0$. Položíme-li nyní

4.4 $$\lg p_i/p_j = u_k$$

(kde i, j, k je cyklická permutace čísel 1, 2, 3), pak parametry $u_k (k = 1, 2, 3)$ jsou definovány uvnitř $\triangle\, S_1S_2S_3$ a platí pro ně

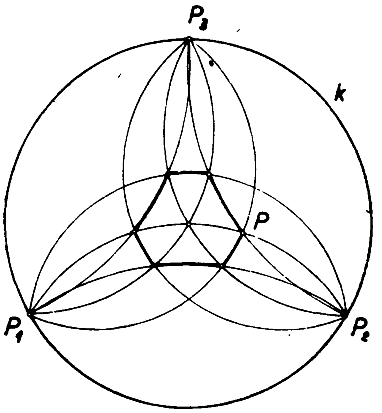
4.5 $$W \equiv u_1 + u_2 + u_3 = 0\,.$$[10])

Plástev určená danými svazky přímek uvnitř $\triangle\, S_1S_2S_3$ je tedy šestiúhelníková.

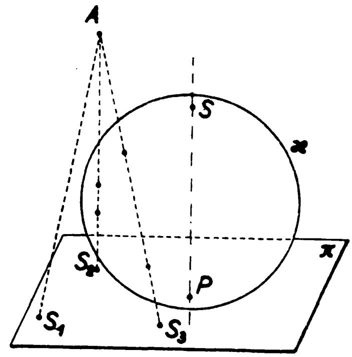
[10]) Neboť $u_1 + u_2 + u_3 = \lg p_2/p_3 + \lg p_3/p_1 + \lg p_1/p_2 = \lg p_2 - \lg p_3 + \lg p_3 - - \lg p_1 + \lg p_1 - \lg p_2 = 0.$

Příklad 4.3. Šestiúhelníková plástev tvořená třemi svazky kružnic.

Za vrstvy křivek, které určují plástev, zvolme tři svazky kružnic $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ o základních bodech P_j, P_k $(i, j, k$ je cyklická permutace prvků 1, 2, 3), které neleží v přímce[11]. Pro jednoduchost předpokládejme, že určují rovnostranný trojúhelník. Snadno dokážeme, že vytvořená plástev je uvnitř kružnice k opsané $\triangle P_1P_2P_3$ šestiúhelníkovou pláství (obr. 11).



Obr. 11.



Obr. 12.

Nechť P je libovolný vnitřní bod kruhu k a nechť $\frac{1}{3}\pi < \alpha_i < \frac{4}{3}\pi$ je ten úhel $\sphericalangle P_jPP_k$, v němž neleží P_i. Rovnice kružnice svazku $\mathfrak{S}_i$ určeného základními body P_j, P_k $(i, j, k$ je cyklická permutace 1, 2, 3), je pak $\alpha_i =$ konst. Pro úhly kružnic daných svazků, které procházejí bodem P, platí

4.6 $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi\,,$$

a proto volíme-li za parametr u_i např.

4.7 $$u_i = \alpha_i - \tfrac{2}{3}\pi\,,$$

najdeme

4.8 $$W \equiv u_1 + u_2 + u_3 = 0\,.$$

Plástev je tedy šestiúhelníková.

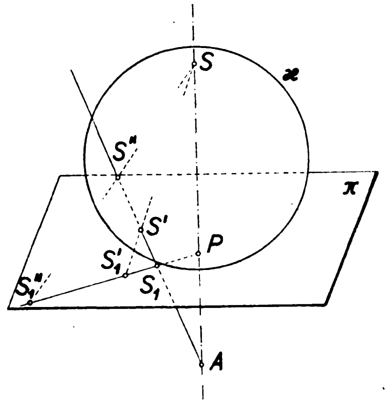
Příklad 4.4. Šestiúhelníkové plástve tvořené kružnicemi.

Celou řadu dalších šestiúhelníkových pláství v rovině dostaneme užitím stereografické projekce (obr. 12). Šestiúhelníkovou plástev $\mathfrak{W}_0$, která je tvořena třemi svazky přímek o středech S_i $(i = 1, 2, 3)$ (viz příklad 4.2), promítneme z libovolného bodu A na kulovou plochu $\varkappa$ dotýkající se roviny π. Na $\varkappa$ dostaneme tak v jisté oblasti šestiúhelníkovou plástev $\mathfrak{W}_\varkappa$, kterou na $\varkappa$ vytínají tři svazky rovin AS_i $(i = 1, 2, 3)$; plástev $\mathfrak{W}_\varkappa$ je tvořena kružnicemi kulové plochy $\varkappa$. Stereografickou

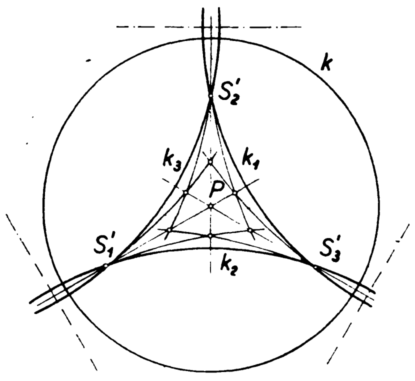
[11]) Do svazku kružnic o základních bodech P_j, P_k počítáme ovšem i přímku P_jP_k.

projekcí plástve $\mathfrak{W}_\kappa$ [12]) na π dostaneme v jisté oblasti roviny π šestiúhelníkovou plástev tvořenou (pokud $A \notin SS_i$) kružnicemi. Podle polohy bodu A a os AS_i svazků rovin, které vytínají na kulové ploše svazky kružnic tvořících jednotlivé vrstvy plástve $\mathfrak{W}_k$, vzhledem ke kulové ploše κ, dostáváme různé typy šestiúhelníkových pláství v rovině π tvořených kružnicemi, přesněji řečeno kruhovými oblouky.

Uveďme alespoň jeden typ takto sestrojené plástve z kruhových oblouků. Jestliže S_1 je střed svazku přímek v rovině π (který určuje vrstvu čar dané plástve $\mathfrak{W}_0$),



Obr. 13.



Obr. 14.

pak jeho promítnutím z bodu A vhodně voleného na přímce SP vně kulové plochy κ na kulovou plochu dostaneme na κ dva různé body S', S'', které jsou základními body svazku kružnic na kulové ploše (obr. 13). Promítnutím základních bodů S', S'' z S na rovinu π najdeme pak dva různé základní body S_1', S_2'' (na přímce jdoucí P) svazku kružnic, který již tvoří jednu vrstvu křivek hledané plástve $\mathfrak{W}$.

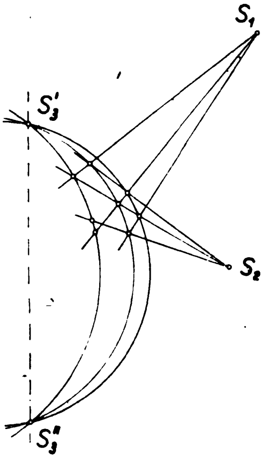
Jestliže středy S_i $(i = 1, 2, 3)$ svazků plástve $\mathfrak{W}_0$ tvoří rovnostranný trojúhelník se středem v P, najdeme uvedenou konstrukcí tři páry bodů S_i', S_i'' $(i = 1, 2, 3)$ podle obr. 14, které jsou základními body svazku kružnic $\mathfrak{S}_i$ plástve $\mathfrak{W}$. Kružnice k_i procházející základními body svazků $\mathfrak{S}_j$, $\mathfrak{S}_k$ (i, j, k je cyklická permutace prvků 1, 2, 3) určují křivočarý trojúhelník o vrcholech S_i' $(i = 1, 2, 3)$; jeho vnitřek je možno vzít za oblast regularity plástve $\mathfrak{W}$. Kružnice k, která pravoúhle protíná všechny kružnice plástve, je stereografickým průmětem kružnice kulové plochy κ ležící v polární rovině bodu A.

Příklad 4.5. Nešestiúhelníková plástev, jejíž vrstvy jsou dva svazky přímek a svazek kružnic.

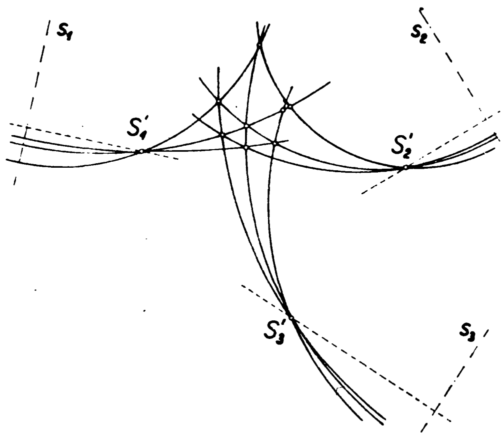
Svazky přímek (nebo osnovy přímek) a svazek kružnic nemusí ovšem vždy určit šestiúhelníkovou plástev. Lze sestrojit příklady, kdy tomu tak není (obr. 15; S_1, S_2 jsou středy svazků $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ přímek; S_3', S_3'' jsou základní body svazku $\mathfrak{S}_3$ kružnic).

[12]) Při stereografické projekci kulové plochy na tečnou rovinu π střed S promítání je bod kulové plochy diametrálně sdružený s dotykovým bodem zvolené průmětny π a kulové plochy.

Příklad 4.6. Nešestiúhelníková plástev, jejíž vrstvy jsou tvořeny svazky kružnic. Zvolme svazky $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2. 3)$ kružnic o základních bodech S'_i, S''_i tak, aby přímky $S'_iS''_i$ určily obecný trojúhelník. Snadno se přesvědčíme, že plástev určená svazky $\mathfrak{S}_i$ není šestiúhelníková (obr. 16).



Obr. 15.



Obr. 16.

Ze šestiúhelníkových pláství (konstruktivně) nejjednodušší jsou přímočaré plástve. V předchozích příkladedch byla ukázána konstrukce dvou projektivně různých typů takových pláství (příklad 4.1 a příklad 4.2). Jaké jsou všechny přímočaré plástve? Na tuto otázku odpovídá základní věta GRAFOVA-SAUEROVA:

Přímočaré plástve šestiúhelníkové jsou právě ty plástve, které jsou tvořeny tečnami křivky třetí třídy.

Samozřejmě se přitom omezujeme jen na oblasti regularity, tj. na oblasti roviny dané křivky, v nichž tečny křivky skutečně tvoří plástev. Důkaz věty nebudeme podávat.

Dříve uvedené příklady 4.1 a 4.2 přímočarých šestiúhelníkových pláství představují dva nejjednodušší případy z devíti reálných projektivně různých typů křivek třetí třídy. V příkladě 4.1 křivka se rozpadá na tři lineárně závislé svazky přímek, v příkladě 4.2 na tři lineárně nezávislé svazky přímek. Uveďme alespoň ještě dva jednoduché příklady přímočarých šestiúhelníkových pláství.

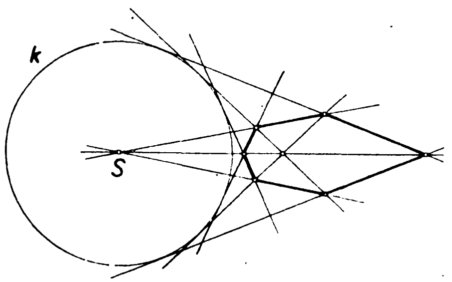
Příklad 4.7. Přímočará šestiúhelníková plástev příslušející složené křivce třetí třídy.

Základní křivka třetí třídy nechť se rozpadá na kružnici k (tedy tečny kružnice k tvoří dvě vrstvy plástve; přesněji řečeno, jedny polotečny tvoří jednu vrstvu a druhé polotečny druhou vrstvu plástve) a svazek přímek (střed svazku, který tvoří třetí vrstvu plástve, je zvolen ve středu S kružnice k; obr. 17).

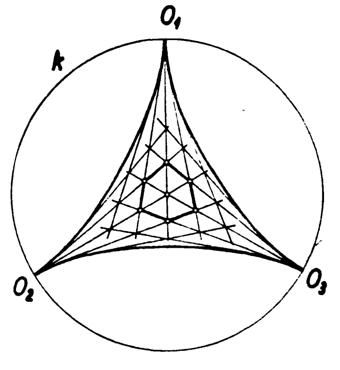
Příklad 4.8. Přímočará šestiúhelníková plástev příslušející speciální jednoduché křivce třetí třídy.

Za základní křivku třetí třídy zvolme křivku se třemi body vratu, a to známou Steinerovou hypocykloidu (obr. 18). Kladné polotečny ke dvěma větvím (kladná orientace je určena parametrem, který na obou větvích roste od společného bodu vratu) tvoří jednu vrstvu přímek (přesněji řečeno polopřímek) plástve.

Problém najít všechny šestiúhelníkové plástve, jejichž křivky jsou kruhové oblouky, není ještě plně rozřešen. Dá se dokázat, že nutná podmínka, aby taková plástev existovala, je, aby funkce plástve byla kvadratická ve všech parametrech u_i. Příklady 4.4 a 4.6 ukazují, že otázka, zda plástve, jejichž vrstvy jsou svazky kružnic, jsou či nejsou šestiúhelníkové, těsně souvisí se vzájemnou polohou základních bodů svazků kružnic plástve.



Obr. 17.



Obr. 18.

5. OBECNÉ PLÁSTVE V ROVINĚ

Dosavadní úvahy byly celkem elementárního rázu a nezaváděly žádné diferenciálně geometrické pojmy v geometrii pláství. Čtenář, který se nezajímá podrobněji o diferenciální geometrii, ale chtěl by se seznámit alespoň přehledně s některými dalšími výsledky geometrie pláství, může vynechat další řádky až k větě udávající geometrický význam anulování tzv. křivosti plástve. Stačí, když vezme na vědomí, že podobně jako v obyčejné diferenciální geometrii křivek a ploch i v geometrii pláství je možno zavést pojem křivosti. Pro zájemce alespoň stručně naznačíme, jak je možno v teorii pláství zavést pojmy známé z klasické diferenciální geometrie, zvláště pak pojem křivosti plástve.

Jestliže vrstvy $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ dané plástve $\mathfrak{W}$ jsou dány rovnicemi

5.1 $$u_i(x, y) = u_i\,, \quad (u_i \in I_i\,;\ i = 1, 2, 3)\,,$$

lze utvořit Pfaffovy formy

5.2 $$\sigma_i = g_i(x, y)\, \mathrm{d}u_i\,, \quad (i = 1, 2, 3\ ;\ \text{nesčítá se})\,,$$

kde $g_i(x, y) \neq 0$ jsou nenulové funkce a $\mathrm{d}u_i$ jsou úplné diferenciály funkcí $u_i(x, y)$.

Diferenciální rovnice $\sigma_i = 0$ určují ovšem jednotlivé vrstvy $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ dané plástve $\mathfrak{W}$. Součinitele g_i lze vždy volit tak, aby pro všechny body $(x; y)$ oblasti $\mathfrak{G}$ regularity dané plástve a pro všechny směry $(dx; dy)$ platilo

5.3 $$\sum_{i=1}^{3} \sigma_i = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0\,.$$

Formy σ_i nejsou touto volbou určeny jednoznačně. Je možno je ještě násobit (resp. dělit) faktorem $g(x, y) \neq 0$; připouštějí se proto ještě transformace

5.4 $$\sigma_i^* = \sigma_i g^{-1}\,, \quad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Z rovnice (5.3) plyne, že pro vnější součiny forem σ_i platí

5.5 $$\sigma_2 \wedge \sigma_3 = \sigma_3 \wedge \sigma_1 = \sigma_1 \wedge \sigma_2\,.$$

Vnější součin

5.6 $$\Omega = \sigma_1 \wedge \sigma_2$$

se nazývá *plošný element* plástve $\mathfrak{W}$. Při transformaci (5.4) se transformuje podle

5.7 $$\Omega^* = \Omega g^{-2}\,.$$

Vnější diferenciály Pfaffových forem σ_i se liší jen skalárním činitelem od plošného elementu Ω, a tedy

5.8 $$d\sigma_i = h_i \Omega \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$

při čemž platí, jak plyne z (5.3),

5.9 $$\sum_{i=1}^{3} h_i = 0\,.$$

Veličiny h_i se nazývají *Christoffelovými symboly* plástve. Užitím daných forem σ_i a skalárů h_i se definuje tzv. *konexe* γ plástve $\mathfrak{W}$

5.10 $$\gamma = h_3\sigma_2 - h_2\sigma_3 = h_1\sigma_3 - h_3\sigma_1 = h_2\sigma_1 - h_1\sigma_2\,,$$

která při transformaci (5.4) se transformuje podle

5.11 $$\gamma^* = \gamma - d\lg g\,.$$

Vnější diferenciál $d\gamma$ konexe γ je možno psát ve tvaru

5.12 $$d\gamma = k\Omega\,,$$

kde skalár k se nazývá *křivost plástve*; při transformaci (5.4) se transformuje křivost takto

5.13 $$k^* = g^2 k\,.$$

Říkáme, že *skalár v je váhy p*, jestliže při transformaci (5.4) se transformuje podle

5.14 $$v^* = g^p v\,;$$

křivost plástve je tedy skalár váhy 2.

K libovolnému skaláru v můžeme sestrojit skaláry v_i užitím relací

5.15 $$dv \wedge \sigma_i = v_i \Omega .$$

Jestliže nyní definujeme diferenciální operátor ∂_i vztahem

5.16 $$\partial_i v \stackrel{\text{def}}{=} v_i ,$$

platí zřejmě

5.17 $$dv = \sigma_2 \, \partial_3 v - \sigma_3 \, \partial_2 v = \sigma_3 \, \partial_1 v - \sigma_1 \, \partial_3 v = \sigma_1 \, \partial_2 v - \sigma_2 \, \partial_1 v ,$$

při čemž

5.18 $$\sum_{i=1}^{3} \partial_i v = 0 .$$

Užitím Christoffelových symbolů, resp. konexe plástve, je možno definovat absolutní derivaci, resp. absolutní diferenciál.

Absolutní derivací invariantu v váhy p rozumíme

5.19 $$D_i v \stackrel{\text{def}}{=} \partial_i v + p h_i v$$

a *absolutním diferenciálem*

5.20 $$Dv \stackrel{\text{def}}{=} dv + p\gamma v .$$

Je tedy

5.21 $$Dv = \sigma_2 \, D_3 v - \sigma_3 \, D_2 v = \sigma_3 \, D_1 v - \sigma_1 \, D_3 v = \sigma_1 \, D_2 v - \sigma_2 \, D_1 v ,$$

při čemž

5.22 $$\sum_{i=1}^{3} D_i v = 0 .$$

Při transformaci (5.4) dostáváme

5.23 $$D^* v^* = g^p \, Dv , \quad D_i^* v^* = g^{p+1} \, D_i v$$

podobně jako při obdobných operátorech v tenzorovém počtu, resp. v diferenciálních geometriích prostorů s konexemi.

Dá se dokázat základní věta:

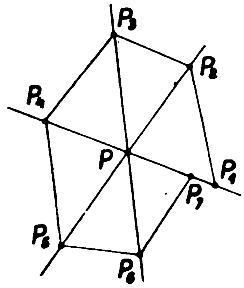
Křivost plástve $\mathfrak{W}$ *v jejím bodě* $P(x; y)$ *a její absolutní derivace* $D_1 k$, $D_2 k$, $D_1 D_1 k$, $D_1 D_2 k$, $D_2 D_2 k$ *atd. udávají úplný systém nezávislých diferenciálních invariantů plástve*; to znamená, jestliže dvě plástve $\mathfrak{W}$ a $\mathfrak{W}'$ mají shodné všechny tyto invarianty v odpovídajících si bodech P a P', jsou obě plástve topologicky „v malém“ ekvivalentní.

Geometrický význam křivosti k plástve udává věta:

Nutná a postačující podmínka pro to, aby plástev byla šestiúhelníková, je, aby její křivost byla identicky rovna nule.

Jestliže $k \neq 0$, pak to tedy znamená, že šestiúhelníkový útvar tvořený známým způsobem (obr. 19) není uzavřený. Při vhodné volbě označení vrstev dané plástve a při oběhu obvodu útvaru v kladném smyslu kolem P, při $k > 0$ přibližuje se obíhaná dráha k bodu P, při $k < 0$ vzdaluje se od bodu P. Tato interpretace křivosti pláství pochází od G. THOMSENA.

Poznámka. Na závěr uveďme ještě poznámku, z níž bude patrno, jak teorie pláství úzce souvisí jednak s nomografií, jednak s teorií korespondencí.



Obr. 19.

Každou plástev danou rovnicí

$$W(u_1, u_2, u_3) = 0 \tag{5.24}$$

je možno zobrazit různými nomogramy, které všechny ovšem jsou topologicky ekvivalentní. Se zřetelem na grafickou konstrukci nomogramů vzniká celkem přirozená otázka, zda je možno vždy k dané rovnici (5.24) najít přímkový nomogram. Lehko se zjistí, že nikoliv. Otázka pak je, jaké jsou podmínky pro to, aby daná rovnice se dala znázornit přímkovým nomogramem tj. aby plástev či nomogram (daný rovnicí (5.24)) byl *rektifikace schopný*. Problém ještě není rozřešen; byla jen vyslovena tato domněnka (GRONWALLOVA domněnka z r. 1912):

Lze-li plástev, která není šestiúhelníková, rektifikovat, potom všechny její rektifikace jsou projektivně ekvivalentní.

Dosud se skutečně nepodařilo uvést jediný příklad, který by této domněnce odporoval.

Je zajímavé, že studium analytických korespondencí mezi dvěma rovinami přineslo k tomuto závažnému problému nomografie, a tedy i pláství, alespoň částečnou odpověď.

V jedné své práci[13]) O. BORŮVKA totiž dokázal, že *maximální počet projektivně různých přímkových realizací rektifikace schopné plástve, která není šestiúhelníková, je* 16.

Pro šestiúhelníkové plástve jednoznačnost realizace ovšem nemůže platit, neboť existují projektivně různé typy křivek třetí třídy (jejichž tečny právě tvoří všechny přímkové šestiúhelníkové plástve).

6. ZÁVĚR

Článek je jen velmi stručným pohledem na elementy zajímavého novějšího odvětví diferenciální geometrie. Zaměřil se pouze na vysvětlení některých nejzákladnějších pojmů, a to alespoň pro rovinné plástve.

Problematika geometrie pláství je ovšem mnohem širší. Kromě uvedených rovin-

[13]) O. BORŮVKA, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectif II*, Spisy přír. fak. M. u., Brno, č. 85 (1938); na souvislost výsledku O. Borůvky s uvedeným problémem ukázal G. Bol.

ných 3-pláství $\mathfrak{W}^3$ poměrně dost byly studovány v rovině 4-plástve $\mathfrak{W}^4$, méně již n-plástve $\mathfrak{W}^n$.

Jistou paralelou k teorii rovinných pláství křivek je teorie pláství ploch v prostoru, kde obdobou šestiúhelníkových pláství křivek jsou osmistěnové plástve ploch.

Rovněž se studovaly plástve křivek ležících na plochách (příkladem takové plástve je plástev tvořená třemi svazky kružnic na kulové ploše z příkladu 4.4), plástve křivek v prostoru i plástve v prostoru složené z křivek a ploch.

I když v geometrii pláství se již dosáhlo mnoha výsledků, zůstává v ní otevřeno stále ještě hodně problémů. Jak dřívější rozsáhlá Blaschkova a Bolova učebnice, tak i novější úvodní Blaschkova knížka, která znamenitým způsobem seznamuje čtenáře se základní tematikou geometrie pláství, nejen vyvolávají řadu podnětů k dalšímu studiu, ale přímo kladou otázky a předkládají k řešení četné ještě neřešené problémy, které jistě zaujmou každého geometra. Bylo by proto dobré, kdyby mladší vědečtí pracovníci se o toto odvětví diferenciální geometrie blíže zajímali; geometricky zajímavá problematika jistě je již sama podnítí k vlastní vědecké tvorbě.

ELEKTROMAGNETICKÁ STRUKTURA ATOMOVÝCH JADER A NUKLEONŮ

JOSEF KVASNICA, Praha

Článek podává přehled teoretických předpokladů, na nichž je založeno experimentální zkoumání elektromagnetické struktury atomových jader a nukleonů, jakož i hlavních experimentálních výsledků, za něž byl R. HOFSTADTER vyznamenán Nobelovou cenou za fyziku na r. 1961.

ÚVOD

Čtenáři je jistě známo, že rozptyl pomalých částic α, resp. pomalých elektronů (tzv. Rutherfordův rozptyl) na jádrech může poskytnout informace pouze o celkovém náboji jader. Z těchto pokusů však vůbec nelze získat informace o elektromagnetické struktuře jader, tj. informace o rozdělení elektrického náboje, resp. magnetického momentu. Podobná situace je i při studiu rozptylu kvant γ s malou frekvencí (Thompsonův rozptyl).

Příčina těchto faktů je docela jednoduchá. Představme si, že dojde k rozptylu kvanta γ s vlnovou délkou $\lambda = 1$ Å na atomovém jádře. Protože rozměry atomových jader jsou podstatně menší (řádově 1 f $= 10^{-13}$ cm), fáze takové elektromagnetické vlny se v oblasti jádra prakticky nezmění. Proto i síla působící na jádro bude v celé oblasti jádra prakticky stejná a rozptyl takové vlny bude záviset pouze na celkovém