Valter Šeda

Metódy funkcionálnej analýzy v numerickej matematike

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 10 (1965), No. 4, 227--234

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138461

METÓDY FUNKCIONÁLNEJ ANALÝZY V NUMERICKEJ MATEMATIKE

VALTER ŠEDA, Bratislava

Článok oboznamuje čitateľov s niektorými abstraktnými metódami používanými v numerickej matematike, predovšetkým s aplikáciou viet o pevnom bode.

ÚVOD

Súčasná numerická matematika sa vyznačuje dvoma výraznými črtami: prenikaním abstraktných metód, hlavne funkcionálnej analýzy, do numerickej matematiky a veľkým nasadením počítacích strojov. Tieto zložky sa navzájom ovplyvňujú a vedú k prehodnoteniu starých a vypracovaniu nových numerických metód. Takto sa numerická matematika rýchlo rozvíja a možno povedať, že dnes sú už skoro pre všetky úlohy vyskytujúce sa v praxi a v aplikáciách matematiky vypracované približné metódy.

Cieľom tohto článku je ukázať, ako sa používajú v numerickej matematike vety o pevnom bode. Súčasne chce upozorniť na zaujímavý článok nemeckého matematika L. COLLATZA „Theoretische Grundlagen der Numerischen Mathematik", ktorý vyšiel v Jahresbericht d. DMV *65* (1962), 72—96. Okrem svojho obsahu, s ktorým sa v ďalšom oboznámime, je tento článok cenný aj svojím zoznamom literatúry, lebo obsahuje z posledného obdobia 44 prác týkajúcich sa uvedenej problematiky.[1])

Prvá otázka, ktorú rieši Collatzov článok, je otázka formulácie problémov numerickej matematiky v reči funkcionálnej analýzy.

1. FORMULÁCIA PROBLÉMOV NUMERICKEJ MATEMATIKY V REČI FUNKCIONÁLNEJ ANALÝZY

V numerickej matematike sa pracuje s lineárnymi priestormi R. Z nich budeme uvažovať o priestore R_n n-rozmerných vektorov, o priestore $C(B)$ spojitých funkcií definovaných v uzavretej ohraničenej oblasti B priestoru R_n a konečne o priestore $L_p(B)$, $p \geqq 1$, všetkých funkcií f merateľných v B, pre ktoré je funkcia $|f|^p$ lebesgueovsky integrovateľná v B. V takomto lineárnom priestore jestvuje „nulový prvok" $\emptyset$ (napr. v R_n je to vektor, ktorého všetky zložky sú nulové). Dôležitým pojmom je pojem zobrazenia alebo operátora T, ktorý každému prvku f nejakej pod-

[1]) Medzitým, čo tento článok bol v redakčnom pokračovaní, vyšla r. 1964 v nakladateľstve Springer Verlag významná kniha toho istého autora „Funktionalanalysis und numerische Mathematik", ktorá si zasluhuje pozornosť nielen odborníkov z numerickej matamatiky a funkcionálnej analýzy, ale širokého okruhu záujemcov o poznanie metód súčasnej matematiky a o možnosti ich aplikácie pri riešení problémov vo fyzike a technických vedách.

množiny $D \subset R$ priradí prvok Tf toho istého priestoru R alebo iného priestoru R^*. Operátor T nemusí byť lineárny. Dôležitý je aj pojem čiastočného usporiadania. Pre dva vektory $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ možno napr. definovať $x \leqq y$ tak, že $x \leqq y$ práve vtedy, ak $x_j \leqq y_j$, $j = 1, \ldots, k$, $x_j \geqq y_j$, $j = k + 1, \ldots, n$.

Aby sme mohli v daných priestoroch počítať, zavádzame v nich podľa potreby skalárny súčin, normu, vzdialenosť a usporiadanie. Spôsoby zavedenia týchto pojmov nájdeme v učebniciach funkcionálnej analýzy alebo v moderne spracovanej učebnici numerickej matematiky Березин Жидков „Методы вычислений" Т. 1., 2., Гос. Изд. Физ. – Мат. лит., Москва 1959.

Pre naše účely bude užitočný tento prehľad:

Ak zavedieme	v R_n	v $C(B)$, resp. $L_p(B)$	je potom
skalárny súčin	$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$	$(f, g) = \int_B f(x) \overline{g(x)}\, dx$	R_n ($L_2(B)$) Hilbertov priestor
normu	$\lVert x \rVert = \max_j c_j \lvert x_j \rvert$, c_j sú dané kladné konštanty, napr. $c_j = 1$.	$\lVert f \rVert = \max_B p(x) \lvert f(x) \rvert$, $p(x) > 0$ daná funkcia $\in C(B)$	R_n ($C(B)$) Banachov priestor
normu	$\lVert x \rVert = \left[\sum_{j=1}^{n} \lvert x_j \rvert^p\right]^{\frac{1}{p}}$	$\lVert f \rVert = [\int_B \lvert f(x) \rvert^p\, dx]^{\frac{1}{p}}$	R_n ($L_p(B)$) Banachov priestor, $L_2(B)$ Hilbertov priestor
vzdialenosť	$\varrho(x, y) = \max_j c_j \,.\, \lvert x_j - y_j \rvert$	$\varrho(f, g) = M/(1 + M)$, $M = \max_B \lvert f(x) - g(x) \rvert$	R_n ($C(B)$) lineárny metrický úplný priestor
usporiadanie	$x \geqq y \Leftrightarrow x_1 \geqq y_1$, $x_j \leqq y_j, j > 1$	$f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)$, $x \in B$	R_n ($C(B)$) čiastočne usporiadaný priestor

Problémy numerickej matematiky možno rozdeliť na 5 typov:

1. Riešenie rovníc
   $Tu = \emptyset$, $Tu = u$ (daný je operátor T, hľadá sa u).
2. Vyšetrovanie vlastností riešení u rovníc, napr.
   a) hľadajú sa hodnoty funkcionálu Gu pre riešenie rovnice $Tu = \emptyset$, $Tu = u$,
   b) asymptotické chovanie riešení, oscilatorické vlastnosti riešení,
   c) vlastnosti koreňov rovníc.
3. Variačné úlohy s (bez) vedľajšou podmienkou. Vo všeobecnosti: Funkcionál Gu = extrém, $Tu \geqq \emptyset$, $Su = \emptyset$ (dané sú G, T, S, hľadá sa u).

Špeciálne prípady: a) Gu = extrém, $Su = \emptyset$

b) Gu = minimum, $Tu \geqq \emptyset$.

4. Úlohy na reprezentáciu:

u, φ_n sú dané prvky lineárneho priestoru R, F je množina všetkých elementov tvaru $f = \sum_{n=1}^{p} a_n \varphi_n$ s konštantami a_n, p môže byť aj ∞.

a) $u \in F$, treba nájsť a_n,

b) $u \notin F$, a_n treba určiť tak, aby vzdialenosť $\varrho(u, f)$ bola minimálna.

5. Ostatné úlohy: numerický výpočet integrálov, radov, spracovanie výsledkov pozorovania apod.

V ďalšom sa obmedzíme len na úlohy 1. typu. Sem patria riešenie lineárnych i nelineárnych systémov, začiatočné, okrajové a vlastné úlohy obyčajných a parciálnych diferenciálnych rovníc, integrálnych rovníc, diferenčných rovníc a vôbec funkcionálnych rovníc. Budeme skúmať otázku existencie riešenia, jeho jednoznačnosti a odhadu chyby pri približnom riešení úlohy.

2. BANACHOVA VETA O PEVNOM BODE

Uvažujme o rovnici $Tu = u$. Pri jej riešení hľadáme prvok u, ktorý sa zobrazí operátorom T na seba, teda je „pevným bodom" zobrazenia T. Vo funkcionálnej analýze poznáme niekoľko viet o pevnom bode. Jednou z nich je Banachova veta o pevnom bode.

Nech R je metrický priestor a $M \subset R$ je úplná množina, na ktorej je definovaný operátor T. Nech jestvuje K, $0 < K < 1$, tak, že $\varrho(Tf, Tg) \leqq K\varrho(f, g)$. Ak si zvolíme $u_0 \in M$, môžeme zostrojiť postupnosť iterácií

$$u_{n+1} = Tu_n \, (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(za predpokladu, že $u_n \in M$). Uvažujme o „guli" S prvkov, daných nerovnosťou

$$\varrho(h, u_1) \leqq r = \frac{K}{1-K} \varrho(u_0, u_1) \,. \tag{1}$$

Ak u_0 spolu s S leží v M, Banachova veta tvrdí, že v M jestvuje práve jeden pevný bod zobrazenia T, a ten leží v S. Tým je daná existencia, jednoznačnosť a odhad chyby riešenia rovnice $Tu = u$.

Často nemôžeme iteračný krok $u_1 = Tu_0$ presne vykonať, napr. integrujeme pomocou nejakej približnej formuly. Použijeme teda miesto operátora T iný operátor T^*, $u_1^* = T^*u_0$; nech je známy odhad chyby ε pri zámene operátora T operátorom T^*, tj. $\varrho(Tf, T^*f) < \varepsilon$ pre všetky $f \in M$. Potom uvažujeme o guli S^* prvkov h

$$\varrho(h, u_1^*) \leqq r^* = \frac{1}{1-K} [K\varrho(u_0, u_1^*) + \varepsilon] \,. \tag{1*}$$

Ak s u_0 aj S^* patrí do M, leží jediný pevný bod T v S^*. Je to už tvar vety o pevnom bode, vhodný pre numerické výpočty.

Príklad 1. Nech $q(t) \in C(<0, \infty))$, $\int_0^\infty t|q(t)| \, dt < \infty$. Ukážeme, že potom jestvuje práve jedno riešenie problému

$$\frac{d^2u}{dt^2} + q(t)\,u = 0, \lim_{t \to \infty} u(t) = 1\,. \tag{2}$$

Toto riešenie vyhovuje integrálnej rovnici

$$u(t) = 1 - \int_t^\infty (s - t)\, q(s)\, u(s)\, ds \tag{2*}$$

a obrátene: každé (spojité) riešenie rovnice (2*) splňuje vzťahy (2). Nech $t_0 \geqq 0$ má tú vlastnosť, že $\int_{t_0}^\infty (s - t_0)\,|q(s)|\, ds < 1$. Dokážeme existenciu a jednoznačnosť riešenia (2*) v intervale $< t_0, \infty)$. Označíme M množinu všetkých $u(t) \in C(< t_0, \infty)$, ktoré majú limitu $\lim_{t\to\infty} u(t) = 1$ a pre $u, v \in M$ zavedieme vzdialenosť $\varrho(u, v)$ vzťahom $\varrho(u, v) = \sup_{t_0 \leqq t < \infty} |u(t) - v(t)|$. Potom operátor T, daný $Tu(t) = 1 - \int_t^\infty (s - t)\, q(s)\, u(s)\, ds$, je definovaný na M a $TM \subseteqq M$. Ďalej je $\varrho(Tu, Tv) = \sup_{t_0 \leqq t < \infty} \left| \int_t^\infty (s - t)\, q(s)\,(v(s) - u(s))\, ds \right| \leqq \varrho(u, v) \sup_{t_0 \leqq t < \infty} \int_t^\infty (s - t)\,|q(s)|\, ds$. Avšak $f(t) = \int_t^\infty (s - t)\,|q(s)|\, ds$ je nerastúca funkcia, lebo $f'(t) = -\int_t^\infty |q(s)|\, ds \leqq 0$, preto $\sup_{t_0 \leqq t < \infty} \int_t^\infty (s - t)\,|q(s)|\, ds = \int_{t_0}^\infty (s - t_0)\,|q(s)|\, ds < 1$. Teda $\varrho(Tu, Tv) \leqq K\,.\,\varrho(u, v)$, $K = \int_{t_0}^\infty (s - t_0)\,|q(s)|\, ds < 1$. Množina M je úplná. Zvolíme $u_0 \equiv 1$. Potom $u_1(t) = 1 - \int_t^\infty (s - t)\, q(s)\, ds$. Podľa predchádzajúcej teórie jediné riešenie rovnice (2*) existuje na množine $S \subset M$, danej nerovnosťou (1). Toto vyhovuje rovnici $d^2u/dt^2 + q(t)\,u = 0$, preto ho možno jednoznačným spôsobom rozšíriť na celý interval $<0, +\infty)$.

3. TOPOLOGICKÉ VETY O PEVNOM BODE

Nech operátor T je definovaný a spojitý na množine M priestoru R a nech zobrazí M do seba $(TM \subseteqq M)$.

Brouwerova veta o pevnom bode hovorí, že ak R je n-rozmerný priestor R_n a M je uzavretá jednotková guľa v ňom, má T v M aspoň jeden pevný bod. Veta se už dávno používa v mechanike, napr. pri dôkaze existencie periodických riešení diferenciálnej rovnice $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, v ktorej $f(t + T, x, \dot{x}) = f(t, x, \dot{x})$ a ktorej riešenia sú jednoznačne určené začiatočnými podmienkami.

Obecnejšia je Schauderova veta o pevnom bode: Ak R je Banachov priestor, M je uzavretá a konvexná, TM kompaktná množina, má T aspoň jeden pevný bod v M.

Jej zobecnením je Schauderova-Tichonovova veta o pevnom bode: Ak R je lokálne konvexný topologický lineárny priestor a M je kompaktná a konvexná množina, má T v M aspoň jeden pevný bod.

Z tvaru topologických viet vidno, že nedávajú len existenčné výroky, ale aj oblasti, v ktorých jestvujú riešenia. Zato nič nehovoria o ich jednoznačnosti. Často sa používajú v súvislosti s teóriou monotónnych operátorov v čiastočne usporiadaných priestoroch. V takomto priestore definovaný operátor T nazývame izotónny (antitónny), ak $v \leqq w$ má za následok $Tv \leqq Tw$ ($Tv \geqq Tw$).

Majme v čiastočne usporiadanom priestore R rovnicu

(3) $$u = Tu + r = \tilde{T}u\,,$$

r je daný, u hľadaný prvok, T je daný spojitý (vo všeobecnosti nelineárny) operátor, definovaný v $D \subset R$.

Predpokladajme, že T je súčtom $T_1 + T_2$ izotónneho T_1 a antitónneho operátora T_2. Napr. ak u je reálny vektor, $T = (t_{jk})$ reálna matica, dá sa písať $T = T_1 + T_2$, kde $T_1 = \frac{1}{2}(T + |T|)$ je „kladná časť" T, $T_2 = \frac{1}{2}(T - |T|)$ záporná časť T.

Tvoríme dve postupnosti iterácií v_n, w_n vzťahom

(4) $$\begin{aligned} v_{n+1} &= T_1 v_n + T_2 w_n + r \\ w_{n+1} &= T_1 w_n + T_2 v_n + r\,, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

(za predpokladu, že v_n, $w_n \in D$). Ak platí

(5) $$v_0 \leqq v_1,\ v_0 \leqq w_0,\ w_1 \leqq w_0\,,$$

platí všeobecne

(6) $$v_n \leqq v_{n+1},\ v_n \leqq w_n,\ w_{n+1} \leqq w_n$$

a teda máme

$$v_0 \leqq v_1 \leqq \ldots \leqq v_n \leqq \ldots \leqq w_n \leqq \ldots \leqq w_1 \leqq w_0\,.$$

Uvažujme teraz o „intervaloch" $M_n = \langle v_n, w_n \rangle$ (M_n je množina všetkých h splňujúcich $v_n \leqq h \leqq w_n$). Pri zobrazení $\tilde{T}$ je obraz M_n obsažený v M_{n+1} a tým skôr $\tilde{T}M_n \subseteqq M_n$. Ak R je aj Banachov priestor, za znesiteľných predpokladov je každý interval uzavretý a konvexný. Ak možno ešte ukázať, že $\tilde{T}M_n$ je kompaktný, má rovnica (3) podľa Schauderovej vety v M_n aspoň jeden pevný bod u a platí odhad $v_n \leqq u \leqq w_n$.

V mnohých prípadoch možno sa zaobísť bez Schauderovej vety. Ak sa dá z monotónnosti a ohraničenosti postupností $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ usúdiť, že jestvuje $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$, plynie zo spojitosti T

$$\begin{aligned} v &= T_1 v + T_2 w + r \\ w &= T_1 w + T_2 v + r\,. \end{aligned}$$

Ak naviac T je lineárny, element $z = \frac{1}{2}(v + w)$ je riešením rovnice (3) a $v_n \leqq z \leqq w_n$ pre všetky n.

Príklad 2. Uvažujme o začiatočnej úlohe

$$\frac{dx}{dt} = e^{-x}, \quad x(0) = 0. \tag{7}$$

Separáciou premenných zistíme, že (jediným) riešením tejto úlohy je funkcia $x = \ln(t + 1)$, $t > -1$. Úloha (7) je ekvivalentná s úlohou nájsť riešenie integrálnej rovnice

$$x(t) = \int_0^t e^{-x(s)} \, ds, \tag{7*}$$

ktorá má takto (jediné) riešenie $x = \ln(t + 1)$.

Teraz dokážeme existenciu riešenia (7*) v intervale $\langle 0, t_0 \rangle$; $t_0 > 0$ je ľubovoľne veľké číslo a nájdeme preň odhad vyššie uvedenou metódou. Ak v $C(\langle 0, t_0 \rangle)$ zavedieme normu a spôsob usporiadania podľa tabuľky (volíme $p(t) \equiv 1$), bude $R = C(\langle 0, t_0 \rangle)$ čiastočne usporiadaný Banachov priestor. Rovnica (7*) je potom typu (3), kde operátor $\tilde{T}$ je daný vzťahom $\tilde{T}x = \int_0^t e^{-x(s)} \, ds$, $0 \leqq t \leqq t_0$, pre všetky $x(t) \in R$. Tento operátor je antitónny, preto tuná $\tilde{T} = T_2$, T_1 je nulový operátor a $r \equiv 0$. Výjdeme z prvkov $v_0 \equiv 0$, $w_0(t) = t$ priestoru R a utvoríme postupnosti iterácií v_n, w_n vzťahom (4). Nakoľko je $v_1 = T_2 w_0 = \int_0^t e^{-s} \, ds = 1 - e^{-t}$, $w_1 = T_2 v_0 = t$, splnené sú nerovnosti (5), čo má za následok (6). Interval $M_n = \langle v_n, w_n \rangle$ je uzavretý a konvexný. Z rovnomernej ohraničenosti funkcií $x(t) \in M_n$ plynie rovnomerná ohraničenosť $e^{-x(t)}$ a odtiaľ rovnomerná ohraničenosť a rovnomocná spojitosť funkcií $\tilde{T}x$, $x \in M_n$. Z toho na základe Ascoliho vety dostávame, že $\tilde{T}M_n$ je kompaktná množina. Jestvuje tedy v $\langle 0, t_0 \rangle$ riešenie (7*), ktoré sa nachádza v každej množine M_n.

4. MODIFIKÁCIE ITERAČNÝCH METÓD

Analýzou iteračných metód dostaneme, že pri použití Banachovej vety robí ťažkosti požiadavka, aby bola Lipschitzova konštanta $K < 1$, kým pri topologických vetách máme ťažkosti s nájdením začiatočných vektorov v_0, w_0, ktoré splňujú (5) a so zaručením predpokladov týchto viet. Porovnaním oboch metód pri riešení lineárnych úloh dostaneme, že, ak sa dá použiť Brouwerova veta a dáva nejaký odhad, dá sa aj Banachova veta použiť, dáva však vo všeobecnosti horší odhad. Pri riešení nelineárnych úloh zlyháva niekedy Banachova veta, inokedy topologické vety.

Uvažujme teraz o tom, ako zmeniť iteračnú metódu v prípade, že Lipschitzova konštanta $K \geqq 1$. Rovnicu $Su = \emptyset$ možno rôznymi spôsobmi priniesť do tvaru $u = Tu$, napr. ak položíme

$$Tu = u - ASu, \tag{8}$$

kde A je operátor majúci inverzný, s vlastnosťou $A\emptyset = \emptyset$. Špeciálnym prípadom tejto metódy je Newtonova, v ktorej $A = (S')^{-1}$, S je vo Fréchetovom zmysle diferencovateľný operátor a S' má inverzný. Newtonova iteračná metóda konverguje za veľmi všeobecných podmienok, ak u_0 je dostatočne blízko riešenia u. Možno ju úspešne použiť v úlohách o vlastných hodnotách, pri inverzii matíc, v diferenciálnych rovniciach a v aproximačných úlohách. Ak S nie je diferencovateľný alebo $(S')^{-1}$ možno ťažko dostať, nahradíme Newtonovu metódu regulou falsi. Aj táto metóda sa používa v rôznych typoch funkcionálnych rovníc.

Vhodné vektory v_0, w_0, ktoré vystupujú pri použití topologických viet a majú splňovať (5), dajú sa určiť výpočtami na počítacom stroji. Úlohu (3), v ktorej (tak ako predtým) $T = T_1 + T_2$, T_1 je izotónny a T_2 antitónny operátor, možno riešiť aj týmto spôsobom. Zostroja sa iterácie

$$u_{n+1} = Tu_n + r, (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

a diferencie

$$\delta_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Pomocou nich sa utvoria prvky

$$v_n = u_{n+1} + s_n\delta_{n+1},\ w_n = u_{n+1} + S_n\delta_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2),$$

pričom konštanty s_n, S_n sa určia tak, aby boli splnené predpoklady (5) pre použitie topologických viet o pevnom bode.

Príklad 3. Uvažujme o použití metódy regula falsi pri riešení funkcionálnej rovnice $Tu = \emptyset$. Podobne ako v najjednoduchšom prípade je $(n + 1)$-vá aproximácia u_{n+1} riešenia u tejto rovnice daná pomocou u_{n-1}, u_n vzťahom

$$u_{n+1} = u_n - (Tu_n - Tu_{n-1})^{-1}(u_n - u_{n-1})\,Tu_n = \frac{u_{n-1}Tu_n - u_nTu_{n-1}}{Tu_n - Tu_{n-1}} \tag{9}$$

Tuná sa o množine M, na ktorej je definovaný operátor T, predpokladá, že $TM \subseteq M$, M je lineárny normovaný priestor, na ktorom je definovaný súčin uv pre každé dva prvky $u, v \in M$ a pre niektoré $v \in M$ aj podiel $u/v = uv^{-1}$, v^{-1} je inverzný ku v (M je komutatívny okruh obsahujúci aj inverzné prvky niektorých svojich prvkov, napr. M je komutatívne teleso). V prípade, že $M = C(B)$, má uv, resp. u/v význam súčinu, resp. podielu dvoch funkcií.

Riešme teraz približne metódou regula falsi začiatočnú úlohu

$$(Tu \equiv)\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u - 1 = 0, \quad u(0) = 2.$$

Jej riešenie je $u = 1 + \mathrm{e}^{-t}$. Funkcie u_0, u_1 zvolíme tak, aby splňovali začiatočnú podmienku: $u_0(t) \equiv 2$, $u_1(t) = t + 2$. Potom na základe (9) je

$$u_2(t) = \frac{2(t + 2) - (t + 2)\,1}{(t + 2) - 1} = \frac{t + 2}{t + 1} = 1 + \frac{1}{t + 1},$$

$$u_2(0) = 2 \text{ a } u_3(t) = \frac{(t+2)\,t/(t+1)^2 - (t+2)/(t+1)\,.\,(t+2)}{t/(t+1)^2 - (t+2)} =$$

$$= 1 + \frac{2t+2}{t^3 + 4t^2 + 4t + 2}.$$

Vidíme, že u_2, aj u_3, majú tú istú asymptotu ako riešenie $u = 1 + e^{-t}$ pre $t \to \infty$.

5. POZNÁMKA K VETÁM O MONOTÓNII

Obvykle možno skôr dokázať existenciu riešenia funkcionálnych rovníc ako nájsť ostrý odhad pre toto riešenie. Výnimky z tohoto pravidla sa vyskytnú v prípade, že platí veta o monotónii. Pre mnoho začiatočných a okrajových úloh diferenciálnej rovnice $Tu = 0$ s okrajovou podmienkou $Ru = 0$ nasleduje z

$$Tz \leqq Tv,\ Rz \leqq Rv$$

výrok o monotónnosti $z \leqq v$ v uvažovanej oblasti. Príkladom toho môžu byť niektoré porovnávacie vety a Čaplyginove vety o diferenciálnych nerovnostiach. Ak potom predpokladáme existenciu riešenia u okrajovej úlohy, možno odhad zdola v, odhad zhora w pre u určiť, v ktorom funkcia v má nekladný, funkcia w nezáporný „defekt" Tv, Rv. Potom platí $v \leqq u \leqq w$.

Wankelův benzínový motor

s rotačním pístem zhotovený v NSR pohání pokusný automobil. Má spalovací komoru o obsahu 500 cm^3, výkon 50 k při 5500 ot/min a spotřebu 10 l na 100 km. Dává automobilu rychlost až 150 km/hod.

Sk

Téměř nezničitelný kabel

se instaluje mezi New Yorkem a Kalifornií na trase dlouhé asi 6400 km. Obsahuje 12 koaxiálních vedení, a to 6 pro každý směr; každé z nich přenese 1860 telefonních hovorů. Na trase je 900 podzemních zesilovacích stanic a 11 obsluhovaných podzemních středisek vybavených ochranou proti atomovému výbuchu a zamoření; mají např. zásobu vody a potravin pro obsluhující personál na 3 týdny. Kabel je uložen v hloubce 1,2—1,5 m, snese přetlak 15 at a neuškodí prý mu ani nedaleký atomový výbuch.

Sk

Technika není všechno

tvrdí pracovníci americké pobřežní stráže. Během posledních dvou let vyšetřovali 44 větší lodní srážky, z nichž 25 nastalo za omezené viditelnosti, a ve všech případech nejméně jedna ze zúčastněných lodí byla vybavena dobrým radarovým zařízením. Hlavní příčinou srážek je prý nedostatečný výcvik a zkušenost radarových operátorů.

Sk