Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vítěslav Jozífek

Modernizace vyučování geometrii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 8 (1963), No. 5, 275--282

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138409`

VYUČOVÁNÍ MATEMATICE A FYZICE

MODERNIZACE VYUČOVÁNÍ GEOMETRII

VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, Praha

Metody i obsah vyučování matematice na školách 2. a 3. stupně jsou předmětem úvah, diskusí a pokusů v celém matematickém světě. Otázkou vyučování geometrii v dnešní jednotné matematice se zabývá známá pracovnice A. Ž. KRYGOWSKÁ v časopise Mathematica et Pedagogica, roč. 1962, č. 23. Na některé její myšlenky a úvahy chceme upozornit v tomto článku.

Sledujeme-li dějiny vyučování matematice, vidíme, že každý mezník těchto dějin přináší boj kolem vyučování geometrii. Matematik FLETCHER se např. ptá, zda můžeme zachránit geometrii a co se z ní dá zachránit. V pojednání NICOLAS BOURBAKIHO Eléments d'histoire des mathématiques (Hermann, Paris 1960), str. 142—143, se mluví o nevyhnutelném úpadku elementární geometrie jako samostatné dosud žijící vědy. Nemá prý problémy, které by měly ohlas v jiných odvětvích matematiky.

Toto skeptické tvrzení neplatí pro výuku na všeobecně vzdělávací škole. Vyučování matematice je výchovou v širším slova smyslu, jejíž cíl i nedostatky se nevyčerpávají jen ve výchově v ryzí matematice. Výchova v matematice je jen částí výchovy matematikou. Ve vyučování je mnoho zájmů kulturních i praktických, které zůstávají nad matematikou jako vědou i nad zájmy badatele a přesto jsou často ve středu zájmů pedagogiky. Usuzování, prostorová představivost jako složky výchovy jsou různé a učitel nemůže zavírat oči před nimi ani před potřebami praktického života nebo před vztahy matematiky a jiných předmětů výuky. Proto je nutno připojit souhrn geometrických znalostí a uplatnit je v aplikacích právě tak jako geometrickou terminologii, která pronikla do všech oborů techniky.

Geometrická terminologie užívaná v úvahách o prostoru dvojrozměrném a trojrozměrném je upotřebitelná i pro prostor vícerozměrný i pro současnou matematiku pro svou nesrovnatelnou pružnost a ohebnost.

Elementární geometrie triumfuje i bohatstvím základních struktur. Většina jich zůstala skryta během mnoha staletí pod přísnou formou euklidovskou a byla objevena až matematiky minulého století. Máme na mysli např. transformace a jejich invarianty. Je-li dnešní matematika jednotná pro svoje struktury a pro svou axiomatickou metodu, jsou psychologické cesty přístupu k ní různé i proměnné právě tak, jako jsou mnohoznačné aspekty reality, pokud jsou nám dostupné. Výchova myšlení v současné matematice nespočívá ve volbě jednotné cesty vedoucí do světa abstraktních struktur. Žákovi musíme ukázat, že k téže struktuře vedou mnohé cesty zcela přirozené a pohodlné a že tutéž strukturu můžeme studovat různými formami.

Jednu takovou cestu nazývejme geometrickou. Je charakterizována schematizováním založeným na vnímané analogii prostorových vztahů konkretizovaných v nákresech i v prostorových modelech. Tak jsme vedeni ke vnímanému zobrazení geometrických útvarů, ke geometrickým konstrukcím a transformacím. Činnost žáka ve výhodných situacích, které mu vyučování má vytvořit, objeví mu matematické struktury jaksi zespodu. Tyto znalosti otvírají mu možnost ke schematizaci, která by nebyla již jenom vnímaná, ale pojmová a po níž by následovalo zcelení zachycených myšlenek do souboru struktur.

Tato geometrická cesta může být různá. O jedné z nich mluví C. CATTEGNO: La pedagogie des Mathématiques, L'enseignement des Mathématiques (Paris 1955) nebo v kursu deduktivní geometrie G. CHOQUET: Sur l'enseignement de la géometrie élémentaire (Paris 1961).

Bylo by možné takovéto geometrické cesty vnést do všech možných cest jednotné matematiky nebo vytvořit kurs geometrie konstruované logicky jako zvláštní kapitolu. Moderní vyučování geometrii může soustředit různé obsahy a může mít také různé formy. Žádáme od něho:

1. Potenciální bohatství základních matematických struktur a jejich široké využití v kursu geometrie.

2. Možnost „exportace" objevených struktur do jiných kapitol matematiky a naopak.

3. Možnost postupovat v ní metodou postupného odkrývání.

4. Záruku možnosti úspěšného a účinného učení znalostem zvaným tradičně geometrickým, prakticky nutným a nepostradatelným. Záruka možnosti rozvíjet u žáků prostorovou představivost a schopnost přetvářet skutečné situace do geometrických schémat, které žáci získali při řešení prakticky důležitých problémů.

Dosavadní zkušenosti i pokusy v okolních státech ve vyučování geometrii ukázaly, že v tradiční euklidovské koncepci by toto uskutečňování nebylo jednoduché. Dodnes je vyučování geometrii ve zvláštní situaci. První klasická deduktivní díla byla geometrická. To založilo didaktický mýtus vyučování elementární geometrii v euklidovském pojetí. Odtud také pramení izolace školské geometrie, která trvá dosud. Vnesení transformací do syntetické geometrie znamenalo pokus překonat tuto antickou koncepci. Bohužel dosud neúspěšně.

Metodologická revize matematických základů odhalila pojem struktury definované axiomaticky i dosah a hranici axiomatické metody. Ukázala, že elementární geometrie v tradičním pojetí není modelem axiomatické teorie, který by se dal dobře přizpůsobit potřebám a možnostem školského vyučování. Dokonce dává žákovi mylnou představu této metody z hlediska moderní vědy.

Výsledky prvních pokusů, které budou jistě dále pokračovat, nás opravňují k domněnkám, které omezují volbu axiomů pro úvodní práci se žáky. Taková axiomatika by měla splnit tyto podmínky:

1. Malý počet axiomů vyjádřených jednoduchou symbolikou.

2. Zřejmou polyvalenci. Je totiž jednoduché nalézt různé modely struktury definované takovouto axiomatikou v oboru znalostí žákovi známých. Modely jsou přirozené, poněvadž jejich konstrukce není umělá a jsou žákovi v podstatě již dobře známy.

3. Jednoduchost prvních odůvodnění. První věty mají být stručně vysloveny právě tak jako důsledky axiomů.

4. Snadné nalezení zajímavých aplikací. Interpretace vět v různých modelech vede k novým zajímavým a neočekávaným větám.

5. Důležitost uvažované struktury. Teorie nemá být omezena jen na příležitost ve vyučování.

Žák díky množství jemu známých intepretací pochopí smysl axiomatiky právě jako definici struktury, která je společná pro různé modely. Potom není přesné odůvodňování vnucováno a předem určováno učitelem. Vzhledem ke zřejmé jednoduchosti axiomů i k jednoduchosti prvních ukázek můžeme soustředit myšlení žáka k samé axiomatické metodě. Interpretací jednoduché věty v různých modelech jednoduchými odůvodněními získá žák posloupnost nových, složitějších a méně názorných vět v oboru jemu již známém.

Tyto vyslovené podmínky byly již pokusně uplatněny v axiomatice mříží.

Autorka osvětluje uvedení postulátů metodologickou anekdotou. K večeři je pozvána společnost. Její účastníci jsou předmětem takovéto hry. Písmeno *v* značí být sousedem, *f* být členem téže rodiny. Každý návštěvník má dva sousedy. Sousedi nenáležejí do příbuzenského svazku.

Na zvláštním listě je zaznamenána takováto informace šesti axiomy.

Uvažujme nyní tři možné typy návštěvníků. První návštěvník může užít různých informací u hostů a sledovat jejich reakce na jeho otázky. Potom informace má pro něho jen malou důležitost. Druhý návštěvník zná obsah symbolů *v*, *f* a šest axiomů zapsané informace. Jeho úvahy jsou deduktivní. Třetí host dostane do ruky jen list informací bez vysvětlení v něm zapsaných symbolů. Pro něho je informace strukturou společnou různým neizomorfním modelům.

Pro prvního hosta je dedukce jednou z různých metod. Pro druhého je dedukce jedinou metodou, která není zadána příznivými podmínkami. Třetí host myslí axiomaticky, neomezuje se jen na dedukci, která není pro něho dobře zužitkovatelná, poněvadž nemá pro ni vhodné podmínky.

Žák ve škole je v situaci prvního hosta. Učitel se ho přitom snaží přesvědčit, že jedinou cestou pro něho je dedukce. Ve složitějších případech se ptáme, jsou-li vlastnosti, které byly dedukovány, pravdivé vždy a všude. V takovém případě nestačí jenom vnímání Sezná-li např. žák, že se tři výšky v trojúhelníku protínají v jediném bodě, je otázkou, je-li to pravda pro každý trojúhelník, např. pro takový, který má vrcholy ve dvou rozích sešitu a třetí někde na nějaké planetě. Těžko se o tom přesvědčíme nějakým experimentem. I když jsme o tom sami přesvědčeni, nebudeme moci o tom přesvědčit pochybujícího žáka. Podle Géometrie Plane (1960) Andréa Delesserta je to právě logika, která má uvádět do geometrie pořádek a přesnost. Po vysvětlení našeho případu je žák v situaci druhého hosta. Má objekty, jejichž vlastnosti nemůže studovat na základě zkušeností získaných jen vnímáním. Situace třetího hosta se ve vyučování nevyskytuje.

Zbývá otázka, proč geometrie ve svém klasickém pojetí není vhodná pro cestu axiomatickou. Euklidovská axiomatika je těžká a složitá. Teorie je jednoznačná, předmět je pro žáka světem schémat, která jsou mu představována pojmově. První věty jsou samozřejmé, demonstrace umělá a zbytečná, vyjádřená často žákem slovy: „Dnes jsme dokazovali, že dva stejné trojúhelníky jsou stejné".

Hlavní znaky geometrie se podávaly jenom v drobtech, např. definicemi konvexních útvarů apod. Definice podávané na pojmech množiny bodů jsou metodologicky cizí deduktivní soustavě Euklidových Základů.

Metodika moderního pojetí geometrie není dosud zpracována. Budeme muset zachránit vše, co může zjednodušit přístup k moderní současné matematice a k myšlení se vztahem k této disciplíně. Autorka uvádí tři základní struktury, metrický prostor, grupu a vektorový prostor ve formě vyučování pojmům vzdálenost, transformace, vektor.

Každé dvojici bodů X, Y množiny bodů přiřadíme reálné číslo $d(X, Y)$, které vyhovuje známým podmínkám:

1. $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X \equiv Y$,
2. $d(X, Y) = d(Y, X)$,
3. $d(X, Y) + d(Y, Z) \geqq d(X, Z)$.

Dosazením v 3 X za Z dojdeme ke vztahu $d(X, Y) \geqq 0$.

Množinu bodů doplníme axiomy, které charakterizují zvláštní strukturu euklidovského metrického prostoru. Například: $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$, $d(A, C) = d(A, D)$, $d(A, B) + d(B, D) = d(A, D)$, odkud plyne $C \equiv D$. To je interpretováno v tradiční geometrii pro $AC = AD$ zobrazením čtyř různých bodů A, B, C, D na úsečce, což odpovídá větě Euklidovy geometrie.

Soustavu axiomů definujících euklidovskou vzdálenost doplněnou definicí úsečky AB tak, že množina bodů X, pro které platí $d(X, A) + d(X, B) = d(A, B)$, uvádí geometrie ve studiu klasické geometrie. Ale euklidovská geometrie definovaná uvedenou axiomatikou nám velmi jasně představuje důležitou strukturu metrického prostoru.

Ukážeme-li pojem vzdálenosti a tím i pojem metrického prostoru, vysvětlíme žákovi, co rozumíme cestou od vnímané schematizace ke schematizaci pojmové.

V názorné geometrii se setkáme s ukázkou nejkratší cesty jako se spojením dvou bodů na různých plochách. Načrtneme obraz a najdeme postačující podmínky pro vzdálenost. Potom si hrajeme s různými metrikami v afinní rovině, v množině volené učitelem, abychom došli k obecnému pojmu vzdálenost v metrickém prostoru. Nakreslíme např. dvě k sobě kolmé přímky. Bod se pohybuje jen po těchto dvou přímkách. Úsečka omezená dvěma krajními body může být představena body na téže přímce nebo body mohou být na obou různých přímkách.

Rozumíme-li měrou nejkratší cesty dvou bodů na těchto přímkách míru vyjádřenou délkou úsečky, ptáme se, co je to vzdálenost dvou bodů? Jakým útvarem se stává v tomto zvláštním prostoru úsečka definovaná užitím pojmu vzdálenost? Má tytéž vlastnosti jako dosud uváděná úsečka?

Jiný příklad. Sledujme dráhu tramvaje, která obíhá v okruhu stále v témže směru kolem města. Co je pro průvodčího vzdáleností? Je to délka nejkratší spojnice dvou bodů na trati ve směru pohybu? Jistě ne, neboť nesplňuje podmínku symetričnosti vzdálenosti. Vzdálenost od bodu A do B je jiná než vzdálenost od bodu B a A v témže směru pohybu.

Všechna tato, i když omezená, přece jen tvořivá pozorování, neopouštějí ještě vnímané zobrazování. Přiblížit se k pojmovému uvažování můžeme až se žáky staršími. Ukažme složitější příklad. Vzorec pro měření vzdálenosti dvou množin M, N bodů (zabstraktněných stromů ve dvou lesích) je vyjádřena vzorcem $d(M, N) = (a + b - 2c)/(a + b - c)$, kde a značí počet prvků množiny M, které nejsou prvky množiny N, b obdobně počet prvků množiny N, c počet prvků společných oběma množinám. Vidíme, že platí

$$0 \leqq d(M, N) \leqq 1\,,$$
$$d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M \equiv N\,,$$
$$d(M, N) = 1 \Leftrightarrow c = 0\,,$$
$$d(M, N) = d(N, M)\,.$$

Nejzajímavější pro žáky je možnost ilustrace kalkulu $d(M, N) + d(N, P) \geqq$ $\geqq d(M, P)$ a toho, že $d(M, N)$ se stává vzdáleností, takže rostliny v lese se pro žáky stávají body. Tím se dostáváme k abstraktnímu prostoru, jehož podklad je konkrétní. Přitom jsme vyšli ze hry. Takto můžeme systematizovat se žáky podle jejich vkusu a zálib. O metrickém prostoru mluvíme pokaždé, máme-li jakýkoli soubor předmětů a úmluvu přizpůsobenou pojmu vzdálenost. Začínáme porozuměním, že část geometrické hry, kterou jsme získali jako popis zobrazující reálnou skutečnost, je jen teorie struktury, která je nejdříve objevena v této skutečnosti, ale která odhaluje potom svou polyvalenci. Ukázaný příklad nebyla jen hra, byly to vážné problémy v mnoha oborech. Je to také přesně vyznačená geometrická cesta, při které dítě provádí něco s instrumenty, obrázky a nakonec najde základní strukturu jednotné matematiky a její aplikace. Axiomatické myšlení je živé a tvořivé, nejenom logické a ztrnulé. Pojem vzdálenosti můžeme vytěžit ve všech kapitolách geometrie.

Další částí je nauka o prostoru a o jeho transformacích. K definici útvaru vyslovíme axiomy, které se týkají soustavy vztahů. Jestliže se redukuje soustava na jeden vztah, získáváme velmi jednoduchou strukturu, např. pořadí, ekvivalenci, funkci atd. Omezme se na problémy, které se zdají nejdůležitější k odvození pojmu transformace.

Žák vyjde z toho, že transformace množiny bodů je jen zvláštní příklad funkce. Zkušenosti ukazují, že musíme začít studiem transformací v geometrii příklady, které jsou voleny mimo grupu podobností. Příklady nesmějí být příliš abstraktní a konstrukce musí být co nejjednodušší.

Zvolme např. pevný bod O naší roviny a úsečku délky a. K bodu $M \not\equiv O$ přiřadíme bod M', kde M' leží na polopřímce OM a $MM' = a$. Představa roviny zbavená bodu O je vnějšek kružnice o středu O a o poloměru a. Přímka neincidující s bodem O se takto transformuje ve větev přímkové konchoidy.

Uveďme tři základní otázky:

1. Úloha invariantů ve znalostech matematických útvarů.
2. Algebraické aspekty při studiu transformací.
3. Pojem transformace jako metodologický prostředek syntézy v kursu geometrie.

Nechme hrát děti s červenými a žlutými kostkami. Při určitém rozložení kostek dítě pozná jedno-jednoznačný vztah mezi oběma druhy stejného počtu kostek. Hraje-li si s nimi, ztrácí představu této korespondence a je zapotřebí znovu je uspořádat tak, aby si tuto korespondenci uvědomilo.

Vyučování geometrii nám dává příležitosti znovu oživit útvary rozdílné struktury způsobem, který ukazuje nejen to, co se zachovává v té nebo oné transformaci, ale také to, co se nezachovává. Můžeme analyzovat zcela přístupným způsobem přenos struktury jedné množiny do jiné užitím přizpůsobené aplikace. Tak vybavíme pojem izomorfismu, a to dokonce v kursu, který věnuje pozornost tradičním předmětům. Instruktivním příkladem homomorfismu je např. rovnoběžné promítání, které přiřazuje k danému útvaru útvar afinní téhož druhu, ale který nezachovává metrické vztahy. Základní věty pro konstrukce při rovnoběžném promítání užívané ve školské řeči jsou obsaženy ve větě o přenosu struktur.

Přejděme nyní ke druhé otázce. Jako základ mějme definici izometrie (shodného zobrazení) jako transformace, která zachovává vzdálenost, ve dvou větách, které lze snadno žákům demonstrovat na konstrukcích:

1. Dvě rovinná shodná zobrazení, která koincidují ve třech nekolineárních bodech jsou identická.
2. Každé rovinné shodné zobrazení je výsledkem nejvýše tří osových souměrností.

Jako příklad uvedeme: Je dán bod A a jeho obraz A'. Stačí nám to k určení obrazu bodu $X \not\equiv A$? Žáci najdou konstrukcí, že bod X' je představován množinou bodů na kružnici o středu A' a o poloměru AX. Zvolíme-li další bod B a jeho obraz B' tak, že $AB = A'B'$, získáme dva možné obrazy bodu X'. Potřebujeme ještě doplňující informaci tím, že zvolíme obdobně obraz C' bodu C (body A, B, C nejsou kolineární).

Druhou větu ověříme známou konkrétní konstrukcí. Vyjdeme ze tří nekolineárních bodů A, B, C a chceme získat osovými souměrnostmi dané body A', B', C'. Zvolíme osovou souměrnost s osou o_1 tak, aby obraz A_1 byl totožný s bodem A'. Není-li $B_1 \equiv B'$ a $C_1 \equiv C'$, zvolíme druhou osovou souměrnost s osou o_2 tak, aby obraz bodu $B_1 \equiv B'$. Osa jde bodem A'. Tak dostaneme body A', B', C_2. Může být $C_2 \equiv C'$. Nenastane-li tento případ, volíme další osu souměrnosti o_3 tak, aby obraz $C_3 \equiv C'$. Rozepíšeme-li danou konstrukci, vidíme skutečně, že jsou potřebné nejvýše tři osové souměrnosti, abychom trojici nekolineárních bodů A, B, C mohli přiřadit obrazy A', B', C' ve shodném zobrazení.

Množina osových souměrností se ukazuje jako plodná partie involutorních prvků grupy rovinných shodných zobrazení. Zjišťuje se např., že složení dvou různých osových souměrností je komutativní právě tehdy, jsou-li osy k sobě kolmé. Tak se dojde ke středové souměrnosti. Můžeme studovat vlastnosti skládání osových souměrností a získat klasifikaci kompletní grupy rovinných shodných zobrazení.

Ukažme na některé vztahy a důsledky formou skládání osových a středových souměrností.

Označme A' středovou souměrnost o středu A, a' osovou souměrnost o ose a a T_{AB} translaci o vektoru AB. Žáci najdou:

$$A'a' = a'A' \Leftrightarrow a \text{ je osou souměrnosti útvaru } \{A\} \Leftrightarrow A \in a,$$
$$a'b' = b'a' \Leftrightarrow b \text{ je osou souměrnosti } a \Leftrightarrow a \perp b \text{ nebo } a \equiv b,$$
$$a'b' = b'c' \Leftrightarrow b \text{ je osou souměrnosti útvaru } f \equiv a \cup c,$$
$$A'B' = B'C' \Leftrightarrow B \text{ je středem dvojice } (A, C),\ A'B' = B'A' \Leftrightarrow A \equiv B,$$
$$A'B'C' = D' \Leftrightarrow AB = DC.$$

Odtud dojdeme k závěru, že skládáním lichého počtu středových souměrností vznikne souměrnost středová. Žáci zjistí také, že $A'B' = T_{2AB}$.

Středové souměrnosti $A'B'$ se nahradí skládáním souměrností osových o ose $b \equiv AB$ a o osách a, c jdoucích body A, B kolmo na b. Tak se získá $(A'B') = (a'b') . (b'c') = (a'c') = T_{2AB}$. Žáci tak provádějí kalkul na transformacích a získávají věty, které vyjadřují vlastnosti útvarů.

Autorka se domnívá, že při studiu vykonává žák operace na transformacích, což osvobozuje jeho představy o operacích, které jsou velmi omezené a které jsou navozeny tradičním vyučováním geometrii. V něm se totiž operovalo jen s velikostmi úsečky, úhlu atd. Tato omezení způsobí, že žák neporozumí dobře vlastnostem komutativnosti a asociativnosti, poněvadž v aritmetice se nesetká s operacemi, které tyto vlastnosti nemají. Jejich představy jsou uzavřené a brání se sebejednoduššímu zobecnění. Při pokusech v Polsku viděli učitelé úžas žáků, když jim položili otázku: Je operace $A*B = C$, kde C je středem úsečky AB, komutativní, je asociativní? Odůvodnění našli ve větě o těžnicích a těžišti trojúhélníku.

Algebraizaci elementární geometrie provádí BACHAM. Autor žádá jen grupu elementů, která obsahuje involutorní elementy. Po formulaci axiomů, které definují strukturu grupy, studuje ji pomocí kalkulu prováděného s prvky grupy. Struktura jím definovaná je struktura shodných rovinných zobrazení ochuzená v této koncepci vyloučením axiomu uspořádání a spojitosti. Tato partie se jistě nehodí do školy jako ukázka abstrakce.

Ve vyučování geometrii trojrozměrného prostoru máme situace analogické, které zachovávají grupu shodných zobrazení a podobností. Tak např. grupa rotací pravidelných mnohostěnů dává dobrou příležitost pro ilustraci Cayleyovy věty ve zvláštním případě izomorfismu konečné grupy a grupy permutací.

Studium založené na pojmu transformace nám umožní značnou ekonomii časovou i pracovní. Máme-li např. vlastnosti rovnoběžníku studované v tradičním pojetí, dostáváme čtyři náčrty, čtyři věty, které jednají o vlastnostech úhlů a stran rovnoběžníka, a to právě tak jako o úhlopříčkách a o jejich průsečíku. V našem pojetí jsou vlastnosti a věty podřízeny obecné a řídící myšlence a vycházejí jako okamžitý důsledek faktu, že střed úsečky spojující dva body nebo střed dvou rovnoběžných přímek je středem souměrnosti útvaru složeného z těchto přímek, věty, která je přímým závěrem axiomu rovnoběžnosti a základních vlastností shodného zobrazení. Všechny věty jsou důsledkem jedné a téže ideje. Střed rovnoběžníku je středem souměrnosti dvojic vrcholů *AB* a *CD* právě jako dvojic *AD* a *BC*, a tedy středem rovnoběžníku.

Zmiňme se ještě o vektorovém prostoru. Zde můžeme rozeznávat dva různé postoje. Jeden tradiční a druhý, který vyžaduje nový pohled podle CARTANA. První řeší problém pojmem vektor a vektorový prostor v geometrickém kursu, který zachovává klasický princip a má hlavní cenu v technice, která má být zažita žáky praktickými aplikacemi. I když se uznávají tyto hodnoty, nemůže se již dnes zůstat na této hranici. V přijaté modernizaci geometrie musíme myslet jako již dříve více na pojmy. Tak dojdeme ke dvěma koncepcím, ke koncepci minimální a maximální. Užijeme zde vektorové algebry ve smyslu akademickém založené na pojmu vzdálenosti a grupy shodných zobrazení. Tato koncepce, ještě nevyzkoušená a trochu revoluční, se dá vyjádřit dvěma podmínkami:

Žák má být přesvědčen, že stačí zřídit omezený seznam vět, které obsahují vlastnosti součtu vektorů, skalárního a vektorového součinu vektorů, chceme-li vytvořit algebraickou geometrii.

Žákovi ukážeme jiné modely vektorového prostoru a naznačíme jejich obecnou strukturu.

Maximální koncepce je založena na axiomatické soustavě vektorového prostoru. Tuto koncepci studují v Belgii pod vedením prof. PAPYHO.

Uvedené myšlenky jsou jen částí idejí modernizace vyučování matematice, které jsou založeny na pojmu množin. Vcelku jde o to, jak zachránit pro cestu zvanou geometrickou moderní matematiku se všemi jejími topologickými a algebraickými aspekty. Pokusy, které provádí A. Ž. KRYGOWSKÁ, nejsou izolovány. V Belgii jsou již zpracovány učebnice prof. PAPYM a obdobné koncepce, které byly uvedeny v tomto článku, byly již provedeny matematikem CHOQUETEM a jdou dokonce dále nežli pokusy v Polsku. Je jisté, že dochází ke kompromisům, má-li myšlenka moderní matematiky vejít do programu, do života všech škol i do vědomí všech učitelů. To bude vyžadovat ještě mnoho času i pokusů. O nich se jedná v různých symposiích matematiků, psychologů a pedagogů, která se konají každého roku v různých státech.