André Lichnerowicz

Diferenciální geometrie a fyzikální teorie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 38 (1993), No. 2, 82--86

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138313`

Diferenciální geometrie a fyzikální teorie

André Lichnerowicz, College de France, Paris

Je mnoho způsobů, jak využít naše matematické postupy pro plné porozumění konkrétním jevům. V některých případech přicházejí zvnějšku jako pouhý nástroj; vědec si přeje získat co možno nejrychleji numerické srovnání s experimentem a potvrdit tak svou moc nad hmotným světem.

Ale samotná matematika má ctižádostivější cíle: ráda by se stala *metodou myšlení*, pomocí které chápeme realitu a nečiní si nárok na pochopení této reality, dokud není sestrojen *konzistentní* matematický model vyjadřující celistvost všech studovaných jevů. Velké fyzikální teorie naší doby vrcholí právě vytvořením takových modelů, obyčejně geometrické povahy v širokém smyslu toho slova, a v tom se buď opírají o již rozvinuté matematické teorie, nebo dávají mocný impuls k rozvoji nových matematických struktur.

Rád bych věnoval tyto stránky historii vztahů mezi diferenciální geometrií a teoretickou fyzikou. Za posledních čtyřicet let této historie byl Hlavatý jedním z tkalcovských stavů, které zpracovávají matematickou osnovu do překrásné tkaniny, která se před našimi zraky odvíjí ve stále nepředvídatelných ornamentech.

Základním prvkem diferenciální geometrie je *diferencovatelná varieta*, která historicky vznikla v mechanice. První příklady přirozených diferencovatelných variet libovolné dimenze, se kterými se setkáváme, nám byly poskytnuty Lagrangeovou analytickou mechanikou. V Lagrangeově zkoumání konfiguračních prostorů — nebo časoprostorů — dynamických systémů již byly přítomny nejen pojem diferencovatelné variety, ale víceméně implicitně i mnohé další geometrické pojmy, které byly studovány pomocí lokálních souřadnic (q^i). Ale museli jsme si počkat na Riemanna a jeho slavnou inaugurační dizertaci *O hypotézách, které leží v základech geometrie* abychom viděli zčásti zformulováno to, co bylo předtím jen zcela implicitní. Zrodila se geometrie Riemannových prostorů. Příchod pojmu *tenzoru*, za který vděčíme *krystalografovi* Voigtovi, poskytl první a nejdůležitější z velkých diferenciálně-geometrických teorií jeden z jejích podstatných nástrojů. Tenzorová analýza vybudovaná Christoffelem v oblasti čisté matematiky byla, jak nutno přiznat, ještě cosi formálního, ale díky Riccimu a Levi-Civitovi zde po roce 1990 vyrašily aplikace na klasickou dynamiku a teorii pružnosti a také na studium neizotropních prostředí. V roce 1915 poskytla Riemannova geometrie ten pravý rámec pro Einsteinovu *obecnou teorii relativity*.

Když jsem připravoval tento text, znovu jsem si přečetl výjimečné pojednání z roku 1900, napsané Riccim a Levi-Civitou a uvědomil jsem si jeho moudrost. Z hlediska Riemannovy geometrie, jakož i fyzikálních aplikací se tam najde většina základních

Úvodní přednáška z publikace *Perspectives in Geometry and Relativity — Essays in Honor of Václav Hlavatý*, Edited by Banesh Hoffmann,

pojmů ve zcela rozvinuté formě. Myšlenky těchto autorů umožnily přeložit analytickou dynamiku nejobvyklejších mechanických systémů (uzavřených holonomních systémů s vazbami nezávislými na čase) do jazyka vybroušené geometrie. Studium pohybu takového systému se převádí na studium pohybujícího se bodu v Riemannově prostoru, jehož podkladovou varietou je konfigurační prostor a metrika je dána kinetickou energií. Aplikace tohoto hlediska, což je vlastně moderní hledisko, jsou vynikající.

Vcelku lze docela dobře říci, že Einstein vděčí za možnost vytvoření své obdivuhodné teorie z roku 1915 impozantní budově vytvořené předtím Riccim a Levi-Civitou, která poskytla matematické obydlí pro intuici génia. Sám Einstein vždy uznával, nakolik je zavázán geometrům.

Ve skutečnosti, když se objevily Ricciho práce, byly přivítány tehdejšími matematiky s pouhým zdvořilým uznáním. Ačkoli vzbudily zájem některých specialistů z různých částí světa, jejich tematika byla bohužel příliš vzdálena od středu zájmu většiny matematiků, zabývajících se hlavně analýzou, teorií míry nebo teorií funkcí reálné a komplexní proměnné. Pokud šlo o diferenciální geometry, ti se věnovali vybrušování teorie ploch vložených do euklidovského prostoru nebo se zabývali projektivními a konformními prostory, či obecněji Kleinovými prostory a shledávali Ricciho dílo „poněkud formálním a umělým“ (Darboux).

Celá situace se změnila s příchodem obecné teorie relativity. Tato teorie vytvořila po skončení 1. světové války prostor společných zájmů pro matematiky a teoretické fyziky. Kolem této teorie, povzbuzovány její fantastickou popularitou, byly vytvářeny obdivuhodné geometrické struktury a lze věřit, že je nadále autentickým zdrojem současné diferenciální geometrie.

Nejprve byl objeven pojem paralelismu v Riemannově prostoru a to téměř současně Levi-Civitou a Schoutenem. Zatímco dosud měla nová geometrie spíše „analytický“ charakter, byly nyní odhaleny nástroj, jazyk a intuitivní postupy skutečně geometrické.

Na druhé straně napomohla sama fyzika k překročení příliš omezujícího rámce Riemannovy geometrie. Tehdejším teoretickým fyzikům byla známa pouze dvě fyzikální pole: elektromagnetické pole a gravitační pole. Bylo to v podstatě zkoumání elektromagnetického pole, které vedlo fyziky k sestrojení speciální teorie relativity a k zájmu o podivný plochý Minkowského časoprostor s indefinitní metrikou. V rámci obecné teorie relativity, což je v podstatě relativistická teorie gravitace, elektromagnetické pole nevystupuje přirozeně, ale zdá se být uměle zavedeno zvnějšku. Došlo zde k rozčarování, které už dnes ovšem tak silně nepociťujeme vzhledem k bohatství fyzikálních polí, která jsme byli od té doby nuceni vzít na vědomí. Teoretická fyzika tak pocítila naléhavou potřebu hledat nějakou „sjednocenou teorii pole“. Bylo rozhodnuto pokusit se vytvořit teorii, která by mohla vést ke sjednocení gravitačního a elektromagnetického pole uvnitř jediného hyperpole, které by mělo za základ geometrickou strukturu vesmíru.

Od roku 1919, kdy Hermann Weyl učinil první krok k takové teorii, úsilí se znásobilo, ale veškeré postupné výsledky se ukázaly být fyzikálně nevyhovujícími z toho či jiného důvodu. Spolu s Weylovými prostory, v nichž hraje základní roli konformní grupa, se objevil Eddingtonův prostor, první příklad prostoru s afinní konexí. Tyto první skici, i když poměrně těžkopádné, byly nesmírně důležité pro rozvoj diferenciální geometrie. Šlo o konstrukce, které byly zpočátku navzájem poněkud izolované. Později byly zahrnuty do syntézy dosažené po roce 1922 jednak velkým grupovým teoretikem Elie Cartanem a jednak Schoutenem a Hlavatým.

Dovolte mi citovat úryvek na toto téma z úvahy Elie Cartana, ve které jasně poukazuje na souvislost mezi geometrií a fyzikou.

„Prostory, jejichž existenci jsem předvídal," říká Elie Cartan „jsou zobecněním, kterého by nebylo možné dosáhnout pouhým sledováním základních myšlenek Riemanna, Weyla a Eddingtona. Byla to moje koncepce struktury grup, která mi ukázala cestu ... Spokojím se s výkladem o prostorech, které souvisejí s teorií relativity."

„Víme, že Einstein svou obecnou teorií relativity odvrhl koncepci ... homogenního časoprostoru, který předchází jevům a do kterého se tyto jevy náhodou včleňují, aniž by jej pozměňovaly. Speciální teorie relativity tuto koncepci respektovala a měla nanejvýš ten účinek, že změnila povahu základní grupy vesmíru. To již neplatilo v případě obecné teorie relativity, ve které geometrické a kinematické vlastnosti časoprostoru ... závisejí na rozložení hmoty ... Znamená to, že pojem grupy je tím z fyziky úplně vyloučen? V žádném případě, protože základní Einsteinova hypotéza není, jak se mnoho lidí domnívá, předpoklad, že je možné formulovat zákony fyziky ve všech souřadnicových soustavách — což by byla pouhá tautologie — ale to, že v každé dostatečně malé oblasti vesmíru platí zákony speciální teorie relativity jako první aproximace ..."

„Podle Einsteinovy hypotézy musí být fyzikální jevy takové, že ... fyzikům odhalují euklidovský charakter velmi malé části vesmíru. Ale infinitesimální euklidovský charakter vesmíru se projevuje v infinitesimálním euklidovském přemístění (které dává do souvislosti ortonormální reper pozorovatele s ortonormálním reperem nekonečně blízkého pozorovatele). Proto nejen *vzdálenost* dvou nekonečně blízkých pozorovatelů, ale i *porovnání směrů* vycházejících od těchto dvou pozorovatelů náleží do sféry zkušenosti."

Elie Cartan odtud vyvozuje, že nejobecnější časoprostor slučitelný s Einsteinovou hypotézou by měl být jím definovaný „časoprostor s euklidovskou konexí" a ukazuje, že při hledání sjednocené teorie pole se Einsteinovy myšlenky zpočátku vyvíjely přesně způsobem, který on sám ukázal v roce 1922.

„To, co jsem právě řekl," dodává, „se vztahuje na všechny jiné grupy stejně jako na grupu euklidovských přemístění a vede tak k vytvoření širších tříd prostorů, které se vyskytují ... v analýze a mechanice. Já jsem zejména ... zkoumal, zdali by *čistě mechanické* jevy dovolovaly porovnání směrů v časoprostoru a ukázal jsem, že to by platilo, pokud by každá částice hmoty měla moment hybnosti, který by nebyl nekonečně malý v porovnání s její hybností."

Z těchto úryvků jasně vidíme, podle mého názoru, jak si geometrie a fyzika navzájem pomáhaly svými vlastními prostředky a také svou vlastní intuicí. Syntéza, které tak bylo dosaženo a která spojuje různé existující diferenciální geometrie z Kleinova slavného „Erlangenského programu" ukazuje, jak je možné spojit s každou Lieovou grupou „prostory s konexí této grupy". Program, který zde byl naznačen, daleko přesáhl souhrn všech skutečně sestrojených realizací z oné epochy.

Dnes o tomto programu hovoříme v jazyce *fibrovaných prostorů*, prostorů, kterým se Elie Cartan patrně přiblížil téměř intuitivně a jejichž struktura byla rozpracována pod jeho vlivem jeho žákem Ehresmannem a také Whitneyem v letech 1936–39. Tento jazyk však nebyl nikdy použit samotným E. Cartanem. Nejpřirozenější fibrované prostory jsou definovány jako souhrny všech kontravariantních vektorů v různých bodech diferencovatelné variety nebo jako souhrny všech lineárních reperů v různých bodech této variety. V druhém případě je fíbr v daném bodě, tj. soubor všech lineárních reperů v daném bodě *homeomorfní strukturní grupě*, což je zde lineární grupa. Takový fibrovaný prostor se nazývá hlavní a moderní diferenciální geometrie je založena především na pojmu *konexe na hlavním fibrovaném prostoru* příslušném k dané grupě. V případě fibrovaného prostoru lineárních reperů se obdrží lineární konexe (nesprávně nazývaná afinní konexí, protože každé z nich je kanonicky přiřazena jistá afinní konexe). Jestliže má varieta Riemannovu metriku, pak hlavnímu fibrovanému prostoru ortonormálních reperů odpovídají metrické konexe (neboli euklidovské konexe v terminologii E. Cartana), z nichž právě jedna má nulovou torzi, totiž Riemannova konexe. V závislosti na signatuře metriky je strukturní grupa buďto ortogonální grupa nebo Lorentzova grupa.

Co se týče obecné teorie relativity, je třeba poznamenat, v protikladu s tím, co se až příliš často říká, že fyzikální interpretace by měla zahrnovat pouze „pohyblivé" ortonormální repery a lokální souřadnice by měly sloužit pouze k určení polohy události, tj. měly by dávat, mohu-li se tak vyjádřit, kartografii podkladové variety časoprostoru. Ve fyzikálních interpretacích se můžeme vyhnout mnoha zdánlivým obtížím, jestliže budeme připouštět jen ortonormální trojice, jejichž časový směr charakterizuje prostorově-časovou rychlost pozorovatele.

Dokonce i v klasické analytické mechanice poskytuje pojem fibrovaného prostoru nesmírně užitečný rámec. Základním prvkem pro studium mechaniky holonomního dynamického systému je v podstatě fibrovaný prostor směrů tečných ke konfiguračnímu časoprostoru systému. V případě systému s vazbami nezávislými na čase hraje základní roli fibrovaný prostor kovariantních vektorů tečných k (n-rozměrnému) konfiguračnímu prostoru systému. Je to bod tohoto fibrovaného prostoru, který je representován lokálními souřadnicemi (q^i, p_i). Tento fibrovaný prostor má jednu podstatnou zvláštnost: automaticky obsahuje uzavřenou antisymetrickou diferenciální formu maximální hodnosti, totiž $2n$. To nás vede ke zobecnění této struktury a ke studování variet všech typů (bez fibrace) dimenze $2n$, na kterých je dána taková forma (tj. symplektických variet). Algebra infinitesimálních transformací zachovávajících tuto formu pak přirozeně vede k pojmu Poissonovy závorky. Opět se zde proplétají geometrie a matematická fyzika.

Pojem fibrovaného prostoru se ukázal obzvlášť vhodným při formulaci a řešení velkých problémů *globální diferenciální geometrie*, která vznikla z velkolepého rozvoje algebraické topologie a z prací Hermanna Weyla, Elie Cartana, Marstona Morseho a S. Bochnera. K formulaci takových problémů vedly klasická dynamika a relativistická dynamika. V relativistickém rámci jeden z nejslavnějších a stále ještě velmi nedokonale pochopených problémů byl položen Einsteinem a Hermannem Weylem: je-li dán časoprostor, který všude splňuje Einsteinovy rovnice pro prázdný prostor, za jakých topologických nebo asymptotických globálních podmínek je tento prostor plochý nebo lokálně plochý? Chceme-li zaútočit na takový problém, musíme skutečně zmobilizovat všechny rezervy moderní globální geometrie.

Geometrický objekt jiný než tenzor se zrodil v roce 1913 z výzkumů E. Cartana o ireducibilních reprezentacích ortogonální grupy. Ale tento objekt zůstal ve stínu, pečlivě utajen pod průsvitností čisté matematiky. Teprve Diracův génius, který hledal relativistickou teorii elektronu, jej znovu objevil nějakých patnáct let poté, aby mu zajistil jméno a příslušnost v říši vědy. Tak se pojem *spinoru* zrodil dvakrát, jednou zásluhou matematika a podruhé fyzika. Jestliže byl po dlouhou dobu jedním ze základů kvantové mechaniky, stal se v posledních letech účinným prostředkem v globální diferenciální geometrii, hlavně díky impozantnímu dílu Atiyaha a Singera.

Spinory a spinorové variety byly v naší době objektem mnoha důležitých Diracových výzkumů. Ale není pochyb, že zásluhou Veblena, Tauba a Hlavatého jsme znovuobjevili geometrický aspekt, který nás musí zajímat.

Zdá se, že jsme zde velmi vzdáleni od vleklých pokusů (1920–50) o sestrojení „sjednocené teorie pole". Ovšem souběžné práce Einsteina a Schrödingera vyústily nakonec v neobyčejně zajímavou verzi takové teorie. Ačkoli Einsteinova a Schrödingerova teorie je nepochybně nevyhovující pro fyziky a třebaže dokonce i její fyzikální interpretace klade obtížné problémy, tato teorie zaujala jisté geometry. Rovnice pole vykazují četné zajímavé charakteristiky a celá teorie dává příklad geometrie, která nenáleží přesně vzato k velkolepému programu, o kterém jsem hovořil, ale zaslouží si studium sama o sobě. Hlavatý přispěl rozhodující měrou k tomuto výzkumu — k určení grup holonomie různých typů a také k úsilí o fyzikální interpretaci. Všechny své schopnosti velkého geometra soustředěného na vytříbené postupy diferenciální geometrie a zvyklého na překonávání obtížných problémů — všechny tyto schopnosti dal do služeb této teorie. Tím z ní vytvořil, mohu-li to tak říci, *svou vlastní teorii*, a proto jsem pokládal za vhodné vzdát mu poctu tím, že jsem zde, kvůli němu, demonstroval vzájemnou provázanost geometrie a fyziky.

Přeložil Oldřich Kowalski