Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ludvík Frank

K stému výročí narození Matyáše Lercha

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 6, 764,765--771

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138250

K STÉMU VÝROČÍ NAROZENÍ MATYÁŠE LERCHA

Ludvík Frank, Brno

I. V dějinách české matematiky bude vždy vysoce hodnoceno dílo profesora Matyáše Lercha, který na přelomu tohoto a minulého století dosáhl svými pracemi světové pověsti. Sté výročí jeho narozenin, jež připadlo na den 20. února 1960, je vhodnou příležitostí ke vzpomínce na život a dílo vědce tak významného.

Profesor Lerch pocházel z Milínova u Sušice. Jeho otec Vojtěch (1832—1911) byl zprvu zemědělským dělníkem a později si vybudoval v Sušici zcela malé hospodářství. Matyáš byl nejstarší ze tří dětí, jež zůstaly naživu. Vyrůstal tedy ve velmi skromných poměrech a nadto byl postižen zdravotně. Po těžkém úrazu, který utrpěl při hře ještě v předškolním věku, mohl choditi jen o berli. Jeho levá noha byla trvale ohnuta.

V důsledku zranění začal Matyáš chodit do školy se tříletým opožděním. Od první třídy byl však vynikajícím žákem a záhy se u něho začalo projevovat zřejmé nadání pro matematiku. Na sušické měšťanské škole měl na něho hluboký vliv matematik Emil Seifert, otec profesora Ladislava Seiferta. Byl to vynikající učitel, mající vysokoškolské vzdělání. Připravil se na své povolání absolvováním tříletého studia na pražské technice. Lerch od něho získal velmi mnoho, neboť měl již tehdy opravdový zájem o matematiku.

Po ukončení třetí třídy měšťanské školy r. 1877 byl přijat do kvinty reálného gymnasia v Plzni. Vynechání čtvrté třídy povolila zemská školní rada v Praze s ohledem na Lerchův věk a vynikající prospěch u přijímací zkoušky. Po dvou letech přestoupil na rakovnickou reálku, kde zakončil středoškolská studia r. 1880 maturitou s vyznamenáním.

Jeho matematické vědo nosti byly vskutku mimořádné. Byl schopen již od kvinty samostatn studovat podle vysokoškolských učebnic. Do maturity jich absolvoval a zvládl několik. Věnoval jejich studiu většinu svého volného času během školního roku a rovněž o prá dninách.

Vysokoškolská studia konal Lerch v Praze na technice i universitě a jeden rok ztrávil na Humboldtově universitě v Berlíně. V Praze byli jeho učiteli Ed. Weyr, G. Blažek, F. Tilšer a F. J. Studnička. V Berlíně studoval u Weierstrasse, Kroneckera, Fuchse a Rungeho. Když se roku 1885 vrátil do Prahy, vynikal hlubokou a rozsáhlou znalostí svého oboru a jeho schopnost k samostatné práci se v důsledku poctivého studia nadějně rozvinula. Svědčí o tom velmi pěkná vysvědčení, jež o Lerchově talentu, píli a vědeckém rozhledu vystavili jeho berlínští učitelé.

Počátky publikační činnosti měl Lerch v té době dávno za sebou. Do konce roku 1885 vyšlo již 14 jeho prací. Jejich themata jsou dosti rozmanitá a byla patrně inspirována látkou postupující podle studijního programu. Největší pozornosti zasluhuje pojednání *Příspěvky k theorii řad nekonečných* (Zprávy Král. čes. spol. nauk, 1885), v němž Lerch zobecnil některá limitní kriteria pro konvergenci řad s kladnými členy. Je pravda, že v těchto výsledcích neměl prioritu, jak se s počátku domníval. V přednáškách slyšel pouze o limitních kriteriích[1]) a také při studiu matematické literatury se s jejich zobecněním nesetkal. jak je podrobněji vyloženo v [6], 532 — 8. Přesto, nebo snad právě protosvědčí tato práce o dobrém postřehu a schopnostech mladého autora. Ke zobecněným kriteriím dospěl na základě úvah o množině hromadných bodů posloupnosti, pro niž užíval tehdy názvu aritmetická derivace soustavy čísel $a_1, a_2, \ldots$ Podařilo se mu to pravděpodobně ve druhé polovině roku 1884, tedy po absolvování čtyř ročníků vysokoškolského studia. Lze tak soudit z toho, že hotová práce byla předložena k tisku v zasedání královské české společnosti nauk v první polovině března 1885.

II. V následujícím roce dosáhl Lerch habilitace na pražské technice a stal se jejím soukromým docentem. Poněvadž neměl žádných příjmů a ovšem ani majetku, přijal asistentské místo u Eduarda Weyra, který vedl II. ústav matematiky. V roce 1888 přešel na I. ústav k profesoru Blažkovi, jenž naléhavě potřeboval docenta v období své poslanecké funkce. Suploval Blažkovy přednášky a vedl příslušná cvičení. To znamenalo sice zlepšení jeho postavení, ale jen na přechodnou dobu. Pro nedostatek volných míst neměl naději na jmenování profesorem nebo alespoň honorovaným docentem. Naopak ho čekalo propuštění z techniky, když se blížil rok 1896, protože tehdejší předpisy umožňovaly setrvat na asistentském místě nejvýše deset let.

Vyvinula se situace skutečně neobvyklá. Lerch byl v té době autorem asi 120ti vědeckých pojednání a mimořádným členem Královské české společnosti nauk i České Akade-

[1]) Viz učebnici F. J. Studnička, *Všeobecné tvaroslaví algebraické*, Praha 1880.

mie, jež ho přijaly do svých řad už roku 1893. Jako vědecký pracovník měl tedy značný věhlas, a to nejen doma, ale i za hranicemi. Skoro polovina z jeho dosavadních prací vyšla v zahraničních časopisech, popřípadě v cizích jazycích v časopisech domácích. Největší přízni se těšil u francouzského matematika Charles Hermita, od něhož se mu také dostalo pomoci. Na jeho doporučení byl jmenován r. 1896 řádným profesorem matematiky na universitě ve švýcarském městě Fribourgu.

Lerchova rozsáhlá vědecká práce z docentského období je bohatá na výsledky, originální důkazové postupy i vtipné matematické obraty. Charakteristické pro ni je hojné užívání nekonečných řad, jejichž teorii si Lerch dokonale osvojil již jako student. Po obsahové stránce náleží tento úsek jeho díla velkou většinou do matematické analysy. Mimo to tvoří početnější skupinu práce z oboru teorie čísel, v nichž Lerch mistrně uplatňoval prostředky analytické. Těžiště objevů na tomto poli spadá však do doby jeho působení ve Švýcarsku.

Více než polovina ze 116ti Lerchových prací publikovaných v letech 1886—96 je věnována speciálním vyšším funkcím a nekonečným řadám. Přední místo mezi nimi zaujímají studie o funkci gamma a malmsténovských řadách.

Funkce $\Gamma(z)$, kde z značí komplexní argument, je v oboru Re $(z) > 0$ definována Eulerovým integrálem $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$. Na zbývající část komplexní roviny, s výjimkou bodů $z = 0, -1, -2, \dots$ je rozšířena např. vztahem

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)},$$

kde přirozené číslo n zvolíme tak, aby $Re\,(\,) + n + 1 > 0$.

$\Gamma(z)$ je zajímavá a důležitá funkce, uplatňující se na mnohých místech v analyse. Její bohatou teorii začal budovat Leonhard Euler a v průběhu dalších 150ti let se jejím studiem zabývala řada vynikajících matematiků, jako Legendre, Gauss, Cauchy, Weierstrass, Lipschitz, Nielsen, Hermite aj. Patří k nim i Matyáš Lerch, který objevil nové vlastnosti této funkce, jejího logaritmu ln $\Gamma(z)$, logaritmické derivace $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ a neúplných funkcí gamma, zvaných též funkcemi Prymovými, $P(s, \omega) = \int_0^{\omega} e^{-t} t^{s-1}\, dt$, $Q(s, \omega) = \int_{-\alpha}^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt$,

Jako základního matematického prostředku užíval Lerch při těchto úvahách malmsténovských řad s komplexními argumenty: $M(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2n v \pi i}}{[(w+n)^2 + u^2]^{s/2}}$. Setkáváme se s nimi už v díle Eulerově a v XIX. století se jimi nejvíce zabýval švédský matematik C. J. Malmstén. Lerchovi náleží zásluha, že podstatně rozvinul nauku o těchto řadách a objevil jejich úzkou souvislost s funkcí gamma. Hlavní práce uveřejnil v Rozpravách České Akademie v letech 1892—4. Zabýval se v nich zvláště funkcí $\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n x \pi i}}{(w+n)^s}$. Na tomto úseku navázal na výsledky Lipschitzovy a odvodil mnoho nových vztahů, z nichž nejlepší se týkají dvou speciálních případů funkce $\mathfrak{K}$, totiž $R(w, s) = \mathfrak{K}(w, 0, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s}$, $L(x, s) = \mathfrak{K}(0, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n x \pi i}}{n^s}$, Re $(s) > 1$.

O pronikavosti Lerchovy intuice svědčí použití analytického pokračování funkce R respektive $R - \frac{1}{s-1}$, jež odvodil pro okolí bodů $s = 0$ a $s = 1$ ve tvaru

$$R(w, s) = (\tfrac{1}{2} - w) + \ln \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} \cdot s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots,$$

$$R(w.s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + b_1(s-1) + b_2(s-1)^2 + \dots.$$

Koeficienty a_k, b_k závisí na argumentu w. Tyto rozvoje jsou znamenitým objevem a Lerch jich mistrně využil při studiu funkce Γ. Z mnoha důsledků, jež z nich vyplývají, připomínám alespoň jeden téměř bezprostřední. Derivujeme-li první rovnici parciálně podle s v bodě $s = 0$, dostaneme vzorec $\Gamma(w) = \sqrt{2\pi}\, e^{R_s(w,0)}$, který bývá označován jako *Lerchova definice funkce* Γ.

Lerch byl velikým znalcem též eliptických integrálů a funkcí. V období, o němž jednají tyto odstavce, jim věnoval 16 prací. Kromě původních výsledků obsahují i četná zobecnění vztahů již dříve známých a jsou cenným zdrojem poučení též pokud se důkazových metod týče. V tomto ohledu Lerch přímo hýřil vtipnými nápady.

V uvedených pracích se zabýval základními eliptickými funkcemi sn u, cn u, dn u a řadou jiných transcendent s nimi souvisících. Jako ukázku jeho objevů na tomto úseku uvedu jeden z těch, kterých si on sám velice cenil. Vztahuje se k funkcím

$$\mathfrak{K}(w_1, w_2, v_1, v_2, a, b, c, s, u) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i(mv_1+nv_2)}}{[a(w_1+m)^2 + 2b(w_1+m)(w_2+n) + c(w_2+n)^2 + u]^s},$$

$$\Phi(u, w, v, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u+m} \cdot \frac{e^{2mv\pi i}}{1 - e^{2\pi i(w+m\omega)}},$$

o nichž dokázal, že jsou vázány identitou (Příspěvky k theorii funkcí elliptických nekonečných řad a integrálů omezených, 1895):

$$\mathfrak{K}(w_1, w_2, v_1, v_2, a, b, c, 1, 0) = \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} [e^{2v_2\pi i(-w_2+w_1\omega_1)}\, \Phi(w_1, -w_2+w_1, v_1v_1+v_2\omega_1, \omega_1) -$$

$$- e^{2v_2\pi i(w_2-w_1\omega_2)}\, \Phi(w_1, -w_2-w_1\omega_2, v_1-v_2\omega_2\ \omega_2)], \qquad \omega_{1,2} = \frac{\mp b + i\sqrt{ac-b^2}}{c}.$$

Hlavní výsledek spočívá v důkazu, že funkce $\mathfrak{K}(w_1, w_2, v_1, v_2, a, b, c, s, u)$ a výraz $e^{2_- v_2\pi i(-w_2+w_1\omega_1)}\, \Phi(w_1, -w_2 + w_1\omega_1, v_1 + v_2\omega_1, \omega_1) - e^{2v_2\pi i(w_2 - w_1\omega_2)} \,.\, \Phi(w_1, -w_2 - w_1\omega_2, v_1 - v_2\omega_2, \omega_2)$ jsou invariantní vzhledem k transformaci

$$\begin{array}{llll}
(1) & a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, & (4) & w_1 = \alpha w_1' + \beta w_2', \\
(2) & b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, & (5) & w_2 = \gamma w_1' + \delta w_2', \\
(3) & c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2, & (6) & v_1' = \alpha v_1 + \gamma v_2, \\
 & \alpha\delta - \beta\gamma = 1, & (7) & v_2' = \beta v_1 + \delta v_2.
\end{array}$$

V prvních třech rovnicích poznáváme vzorce pro koeficienty kvadratické formy $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$, jež vznikne z formy $ax^2 + 2bxy + cy^2$ použitím substituce $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. O pět let později vyšla z Lerchova pera rozsáhlá a velmi úspěšná práce o kvadratických formách, o níž bude stručně pojednáno ve III. oddíle tohoto článku.

Pokud se týče teorie obecných funkcí, přispěl Lerch k objasnění některých důležitých otázek základní povahy. Především upoutaly jeho pozornost spojité funkce, jež nemají derivaci na množině husté nebo dokonce ve všech reálných bodech. Zobecnil Weierstrassův známý příklad a sám konstruoval několik speciálních funkcí majících uvedenou vlastnost. Jedna z nich je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n!\pi x}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Její spojitost na celé ose číselné je zřejmá v důsledku Weierstrassova kriteria pro stejnoměrnou konvergenci. Lze však dokázat, že nemá derivaci v žádném bodě. Uveřejněna byla v pojednání *Contributions à la theorie des fonctions* r. 1886, tedy bezprostředně po ukončení Lerchových vysokoškolských studií. Weierstrassův příklad[2]) byl publikován r. 1875 a zněl

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos a^n \pi x\,, \quad b \in (0, 1)\,, \quad ab > 1 + \frac{3\pi}{2}\,, \quad a \text{ liché přirozené číslo}\,.$$

Další otázkou, kterou se Lerch zabýval na počátku svého docentského období, byly funkce, jež sice mají v každém bodě definičního oboru derivace všech řádů, avšak nedají se nikde rozvinout v mocninnou řadu. Jinak řečeno, existuje k dané funkci Taylorova řada, aniž by platila rovnice mezi oběma v intervalu jakkoli malém. Jsou to případy, kdy Taylorův zbytek nekonverguje k nule v žádném intervalu. Od Lercha pochází

---

[2]) Uveřejnil Du Bois-Reymond v pojednání *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente*, Journal für Mathematik 79 (1875), 21—37.

formálně jednoduchý příklad takové funkce:[3]) $f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\cos a^n c}{n!}$, $a > 1$, liché celé číslo. Podobné otázky byly ve druhé polovině XIX. století studovány ještě dosti často a nutno říci, že ne vždy bez omylů.

Systematičnost, s níž mladý Lerch uvažoval o hlubších základech matematické analysy je patrna z toho, že od themat shora uvedených přešel ke studiu funkcí s omezeným existenčním oborem. Nazýváme tak funkce komplexního argumentu, jež jsou analytické, tj. rozvinutelné v Taylorovu řadu, v ohraničeném oboru Ω a v žádném bodě jeho hraniční čáry se již nedají rozvinout. Nemají tedy analytického pokračování mimo obor Ω. Hlavní pojednání o nich napsal r. 1888 pod názvem *Über Funktionen mit beschränktem Existenzbereiche*. Jako vždy, ilustruje Lerch i zde své obecné výsledky vhodnými příklady. Uvádí mimo jiné funkci $w = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, která je analytická v oblasti $|z| < 1$ a nemá analytického pokračování, pomocí něhož by bylo možno její obor rozšířit.

K nejdůležitějším Lerchovým výsledkům v obecné teorii funkcí patří hlavní věta o funkcích vytvořujících, jež je v literatuře uváděna s jeho jménem. Byla publikována v pojednání *O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících*, jež vyšlo v Rozpravách České Akademie r. 1892.

Vytvořujícími funkcemi jsou nazývány integrály $I(a) = \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} \varphi(x) \, dx$, kde a značí komplexní parametr a x reálnou integrační proměnnou. Funkce $\varphi(x)$ se nazývá určující. Za základní úlohu považujeme otázku, zdali k dané funkci vytvořující $I(a)$ existuje jediná určující funkce $\varphi(x)$. Přesněji řečeno, hledáme vztah mezi určujícími funkcemi příslušnými k téže funkci vytvořující. Je totiž zřejmé, že existuje-li jedna $\varphi(x)$, pak jich existuje nekonečně mnoho. Na příklad změna hodnot $\varphi(x)$ na množině míry nulové nemá vlivu na hodnotu integrálu $I(a)$. Lerch dokázal, že při téže funkci vytvořující platí pro každé dvě určující funkce identita $\int_{0}^{x} [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] \, dt = 0$, $x \in (0, +\infty)$. Tato věta má základní význam v teorii Laplaceovy transformace.

V průběhu celé své vědecké činnosti Lerch rád řešil konkrétní problémy z integrálního počtu a publikoval z tohoto oboru 26 prací, z nichž většina spadá do docentského období. Jejich studium je velmi poučné a zajímavé. Lerch ovládal integrální počet stejně dokonale jako nekonečné řady. Určité integrály, zpravidla závislé na jednom nebo více parametrech, jsou po nekonečných řadách nejčastěji užívaným matematickým prostředkem v celém jeho díle. V operacích s nimi užíval často důmyslných obratů, jež zkracovaly cestu k výsledku. Mimo nové objevy dokázal četné známé už vztahy kratším a elegantním způsobem. V literatuře o Lerchovi se v tomto ohledu traduje poznámka o jeho vtipném odvození Raabeova vzorce[4])

$$\int_{0}^{1} \ln \Gamma(x + u) \, dx = u \ln u - u + \ln \sqrt{2\pi}\,, \quad (u > 0)\,,$$

jež přešlo do vysokoškolských učebnic (Hermite, Teixeira, Petr). Hermite je uvádí slovy: „*Voici pour y parvenir la méthode ingénieuse et élegante de M. Matyas Lerch*“. I při jiných příležitostech se Hermite vyslovoval o Lerchovi velmi pochvalně. V jednom dopise Stieltjesovi o něm píše: „*Il est extremement ingénieux et je fais grand cas de son talent*...“

Předmětem Lerchových úvah v oboru integrálního počtu jsou zpravidla speciální integrály, s nimiž se setkal při studiu vyšších funkcí. Mezi výsledky nacházíme mnoho zajímavých vztahů, jež často zobecňují vzorce známé z klasických prací předchůdců. Za ilustraci toho nám může posloužit relace[5])

$$\int_{0}^{+\infty} I_0(u) \, u^{s-1} \, du = \frac{1}{\pi} \, 2^{s-1} \Gamma^2 \left(\frac{s}{2}\right) \sin \frac{s\pi}{2}\,,$$

[3]) *Ueber die Nichtdifferentierbarkeit gewisser Functionen*, Crelles Journal 103 (1888), 126—138.

[4]) *Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe*, Giornale di Matematische 26 (1888), 39—40.

[5]) *Úvahy z počtu intrgálního*. Rozpravy Čes. Akademie 5 (1896), č. 23, 1—16.

jež platí v komplexním oboru Re $(s) \in (0; 0{,}5)$ a na reálné ose pro $s \in (0; 1{,}5)$. Volba $s = 1$ dává známý vzorec $\int_0^{+\infty} I_0(u)\, du = 1$ a derivování v tomtéž bodě vede k rovnici Weberově

$$\int_0^{+\infty} I_0(u) \ln u \, du = \Gamma'(1) - \ln 2.$$

III. Jmenování řádným profesorem na universitě ve Fribourgu bylo pro Lercha důležitým životním mezníkem. Jednak mělo význam jako ocenění jeho dosavadní práce a jednak znamenalo konec existenčním a materiálním starostem, jež ho dosud stále provázely. Smlouva zněla na deset let,tedy do roku 1906.Podmínky pracovní i finanční byly výhodné. Služební povinnosti se prakticky omezovaly na šest až osm hodin přednášek a dvě hodiny semináře týdně. Zkoušek bylo málo. Celá universita měla totiž jen asi 200 posluchačů. Druhým matematikem byl Holandan Daniels.

Roku 1899 se podařilo jednomu německému orthopedovi zmenšit Lerchovy potíže s chůzí na minimum. Od té doby užíval jen hole a na krátké vzdálenosti chodil i bez ní.

V následujícím roce dosáhl Lerch svého největšího vědeckého úspěchu. Pařížská Akademie mu udělila Velkou cenu za velmi rozsáhlou a vynikající vědeckou práci *Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratique binaires aux coefficients entiers.* Po slavném biologu Janu Ev. Purkyňovi to byl druhý případ, že cena byla přiznána českému vědci. Lerch byl navržen též na jmenování řádným členem této proslulé vědecké společnosti. Dalšími kandidáty byli Dedekind, Hilbert, Jordan a Noether. Jmenován byl Dedekind.

Ve vědeckém díle Lerchově převládá i nyní matematická analysa. Ze 73 pojednání uveřejněných v těchto deseti letech patří skoro 50 do analysy a přinášejí mnoho dalších nových výsledků, hlavně v oboru speciálních funkcí a nekonečných řad. Je mezi nimi i řada vzorců, jež došly zajímavého uplatnění ve studiích o kvadratických formách $ax^2 + bxy + cy^2$ s koeficienty celými. Jako příklad vybírám z nich vztah mezi logaritmickou derivací funkce gamma $\psi(u) = \Gamma'(u)\,\Gamma^{-1}(u)$ a funkcí théta $\vartheta_3(u, \mathrm{i}z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \pi\mathrm{i}(n^2 \mathrm{i}z + 2nu)$, odvozený Lerchem ve tvaru

$$\psi(u) - \psi(1-u) = -C - \ln 4\pi + \ln z_0 - \int_0^{z_0} \frac{\vartheta_3(u, \mathrm{i}z)}{z}\, dz - \int_{z_0}^{+\infty} \frac{\vartheta_3(u, \mathrm{i}z) - 1}{z}\, dz.$$

Zde značí C Eulerovu konstantu $C = -\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n\right) = 0{,}577215\ldots$ a z_0 je libovolné kladné číslo.

Eulerova konstanta upoutala vícekráte Lerchovu pozornost. Nalezl pro ni nové formule, jako na příklad: $C = \lim_{x\to+\infty} \left(-\ln x + \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}\right)$.

Je vidět, že Lercha lákaly především konkrétní problémy. Měl velmi vyhraněný smysl pro reálnost matematických úvah a vždy si kladl také otázku o numerické použitelnosti svých výsledků. Z tohoto hlediska jsou zvláště důležitým matematickým prostředkem nekonečné řady dosti rychle konvergující. Jak již bylo řečeno, užíval jich Lerch vskutku bohatě.

Práce z let 1897—1906 obsahují dále významný přínos k teorii neúplné funkce gamma $Q(s, w) = \int_{\omega}^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt$, jež od časů Eulerových byla často předmětem úvah matematiků. K hlavním problémům patřilo hledání explicitních výrazů pro tuto transcendentu, tedy úkol, v němž bylo těžko Lercha překonat. Objevil a publikoval mnoho rozvojů pro ni. K nejlepším z nich náleží patrně:

$$Q\left(1 - s, \frac{u}{v}\right) = e^{-\frac{u}{v}} v^s \sum_{0}^{\infty} c_n(v)\, \Delta^n u^{-s},$$

kde jest Re $(u) > 0$, $0 < v < \frac{1}{\ln 2}$, Re $(s) \in (-\infty, +\infty)$; $C_0 = 1$, $C_n = v\left[c_{n-1} - \frac{1}{2}c_{n-2} + \right.$

$+ \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} c_0 \Big]$; $\Delta^0 f(u) = f(u)$, $\Delta^n f(u) = \Delta^{n-1} f(u+1) - \Delta^{n-1} f(u)$. Jest vybrán z pojednání *Über einige Entwicklungen auf dem Gebiete der unvollständigen Eulerschen Integrale zweiter Art* (1905) a stal se Lerchovi východiskem k odvození nových rozvojů funkce integrál-logaritmus.

V pracích z oboru nekonečných řad zaujímají přední místo úvahy o vlastnostech goniometrických řad a Fourierových rozvojů. V pojednání *Doplněk k nauce o řadách Fourierových*[6]) dokázal tuto zajímavou větu:

Nechť funkce $f(z)$ je konečná a integrace schopná v intervalu $\langle 0, 1. \rangle$ *Nechť v bodě* $x \in \in (0, 1)$ *je f spojitá a obě funkce*

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t}, \qquad \frac{f(x-t) - f(x)}{t},$$

nechť jsou integrace schopné od bodu $t = 0$. Pak platí

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{2n x \pi i}$$

kde $c_n = \int_0^1 f(z) \, e^{-2nz\pi i} \, dz$. Tonelli ve své knize *Serie trigonometriche* (Bologna, 1927) připisuje větu mylně Pringsheimovi.

Zvlášť úspěšná byla v tomto období Lerchova vědecká činnost v oboru teorie čísel. Nejvýznamnější je ovšem práce, jež byla poctěna cenou pařížské Akademie.[7]) Lerch v ní studoval kvadratické formy $(a, b, c) = ax^2 + bxy + cy^2$ s celými koeficienty. Základními pojmy při těchto úvahách, které náleží do aritmetické teorie kvadratických forem, jsou ekvivalence a třída. Dvě formy (a, b, c), (a', b', c') označujeme za ekvivalentní, jestliže existuje lineární transformace $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$ s celými koeficienty a determinantem rovným jedné, která převádí jednu formu ve druhou. Třídou nazýváme množinu forem navzájem ekvivalentních. Je to vždy množina nekonečná. Rovněž množina forem se společným diskriminantem $b^2 - 4ac$ je nekonečná a má tu vlastnost, že se dá rozložit na konečný počet tříd. Lerch jej označuje $Cl(D)$, když forma má kladný diskriminant D a $Cl(-\Delta)$ v případě záporného diskriminantu $-\Delta$. Hlavním problémem v této nauce je stanovení čísla Cl. Z mnohých výsledků, k nimž Lerch dospěl, uvádím dva vzorce:

$$Cl(D) = \frac{1}{\ln E(D)} \left[\frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{D}}}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{n^2\pi}{D}}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \, dx \right],$$

$$Cl(-\Delta) = \frac{\tau}{2\pi} \sqrt{\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} \frac{\cosh \frac{n\pi}{\Delta}}{\cosh \frac{2n\pi}{\Delta}} + \frac{\tau}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2 \sinh \frac{n\pi}{2}}.$$

V těchto rovnicích značí (D/n), $(-\Delta/n)$ Legendrův symbol známý z teorie čísel a nabývající hodnot 1, 0, —1 podle definice, kterou zde nebudu vypisovat. Symbol $E(D)$, vystupující v prvním vzorci, je určen výrazem $E(D) = \frac{1}{2}(T + U\sqrt{D})$, v němž T, U je nejmenší a největší kladné číslo vyhovující tzv. Fermatově rovnici $T^2 - DU^2 = 4$. Číslo τ ve druhém vzorci je stanoveno takto: $\tau = 6$, je-li $\Delta = 3$, $\tau = 4$, pro $\Delta = 4$ a konečně $\tau = 2$ pro $\Delta = 4$.

IV. Roku 1906 byl Lerch jmenován profesorem České vysoké školy technické v Brně. Stal se nástupcem profesora Antonína Suchardy (1854—1907), který odešel z vážných zdravotních důvodů do výslužby. Na brněnské technice působil Lerch 14 let a byl přednostou II. ústavu matematiky. V roce 1914 přijal za svého asistenta Dr. Karla Čupra, v němž nalezl nejen svého spolupracovníka, ale i nástupce.

Po desetiletém pobytu v cizině vrátil se Lerch do vlasti jako matematik světového jména. Jeho návrat byl v českém vědeckém životě významnou událostí, jež měla svou

[6]) Rozpravy Čes. Akademie 9 (1900), 1—15.

[7]) Uveřejněna v časopise *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 33 (1906), 1—144.

odezvu. Jednota českých matematiků a fysiků přivítala Lercha volbou čestným členem (1907) a pražská universita ho jmenovala roku 1909 svým čestným doktorem. Na brněnské technice byl zvolen děkanem strojního odboru na studijní rok 1908—9. Nejvyšší akademickou hodnost, funkci rektora pro rok 1910—11 si však již netroufal přijmout, protože jeho zdravotní stav se začal povážlivě zhoršovat. Stupňovaly se potíže vyvolávané cukrovkou a insulin nebyl ještě znám. K jeho objevu došlo až v roce 1922. Každoročně o prázdninách absolvoval Lerch lázeňské léčení, jež mu přinášelo na kratší dobu jakési zlepšení. Vcelku však nemoc pokračovala.

Únava, jež byla jedním z průvodních zjevů choroby, působila Lerchovi nesnáze při výkonu povolání i při práci vědecké. Přesto vyšlo z jeho pera v letech 1907—1920 ještě 31 prací. Většina z nich je opět z těch úseků matematické analysy, v nichž po celou dobu své činnosti pracoval. Na rozdíl od předcházejících životních období vzrostl Lerchův zájem o geometrické problémy. Ze 14ti geometrických prací, které vůbec napsal, jich spadá 8 do let jeho působení na brněnské technice. Dvě z nich jsou značně rozsáhlé: *O dvou plochách stu: ně čtvrtého* (1913, 141 stran), *O čarách a plochách, jež se vytvořují při kotálení kruhu po čáře rovinné, jakož i o některých jiných plochách kruhových* (1917, 157 stran). Lerch dovedl znamenitě aplikovat matematický aparát při úvahách geometrických, ale přesto je nutno říci, že na tomto poli nevytvořil díla takového významu jako v analyse a teorii čísel. Jednu ze svých nejznámějších prací z geometrie, *Bestimmung der Anzahl merkwürdiger Gruppen einer allgemeinen Involution n-ter Ordnung k-ter Stufe* publikoval již roku 1885, tedy v době ukončení vysokoškolských studií. Zobecnil v ní některé výsledky Emila Weyra z r. 1879.

V. V roce 1920 byl Lerch převeden na nově zřízenou Masarykovu universitu v Brně jako její první profesor matematiky. Jeho životní energie byla v té době již značně oslabena, avšak toto jmenování ho povzbudilo k novému vypětí sil. Splnilo se mu celoživotní přání stát se profesorem české university. S elánem se dal do budování matematického ústavu za vydatné pomoci svého mladého asistenca Otakara Borůvky.

Výrazem této nálady je i sepisování dvoudílné učebnice eliptických funkcí. Zůstala však už nedokončena. Vyšel pouze první svazek.[8])

Poslední pocta, jíž se Lerchovi v životě dostalo, bylo jmenování řádným členem České akademie roku 1921. V následujícím roce se již nevrátil do Brna z prázdnin, které trávil v rodinném domku v Sušici. Osudnou se mu stala koupel v řece Otavě, přestože si jí dopřál za krásného letního počasí. Za tři dny nato dne 3. srpna 1922, zemřel na prudký zápal plic a s ním spojené diabetické bezvědomí. Je pohřben na sušickém hřbitově.

VI. V Matyáši Lerchovi ztratila československá matematika jednoho ze svých největších představitelů v průběhu celých dějin. Jeho životní dílo, náležející svými problémy i metodami řešení do závěrečného období klasické analysy, obohatilo matematiku mnoha výsledky a přispělo tak k dobré pověsti naší vědy za hranicemi.

I z tohoto článku je patrno, že Lerch se zajímal po celou dobu své vědecké činnosti o konkrétní matematické otázky a s oblibou studoval speciální vyšší funkce, integrály určitých funkcí nebo typů a stejně i nekonečné řady, kvadratické formy aj. Zpravidla zaváděl do studovaných pojmů parametry, mnohdy celou řadu parametrů, a vhodnou volbou jejich hodnot obdržel v závěru hledané výsledky. Tento postup odpovídal jeho vlohám, k nimž patřila především pronikavá intuice a mimořádná kombinační schopnost.

Poměrně zřídka se zabýval širokými třídami funkcí, a proto je mezi jeho objevy málo vět obecných. S tím souvisí patrně skutečnost, že jeho jméno není v dnešní matematické literatuře citováno tak často, jak by odpovídalo velikosti jeho díla. Je to dílo veliké nejen svým obsahem, ale i rozsahem. Uloženo je ve 238 pracích majících úhrnem okolo 3500 stran, ačkoli je mezi nimi pouze jediná nevelká učebnice.

Lerchovy práce jsou publikovány ve 32 různých časopisech a sbornících. Česky je jich napsáno 118 a v cizích jazycích 120, z toho 80 francouzsky, 34 německy, 3 chorvatsky, 2 polsky a 1 portugalsky.

V den stého výročí Lerchových narozenin byla v Brně pořádána oslava, na níž se sešli zástupci vysokých škol a studenti s představiteli veřejného života a průmyslu. Slavnost vyvrcholila odhalením pamětní desky na budově, v níž Lerch pracoval poslední dva roky svého života.

[8]) *Eliptické funkce*, Spisy vydávané přír. fakultou Masarykovy univ. 1926, 1—160.

Literatura o Lerchovi

[1] K. Petr, *Matyáš Lerch*, Almanach Čes. Akad. 1923, 116—138.

[2] K. Čupr, *Prof. Matyáš Lerch*, Časopis pro pěst. matem. a fys. 52 (1923), 301—313.

[3] K. Čupr — K. Rychlík, *Seznam vědeckých prací † prof. Mat. Lercha*, Čas. pro pěst. mat. 54 (1925), 140—151.

[4] L. Frank, *O životě Matyáše Lercha*, Čas. pro pěst. mat. 78 (1953), 119—137.

[5] J. Škrášek, *Seznam prací prof. Matyáše Lercha*, Čas. pro pěst. mat. 78 (1953), 139—148.

[6] O. Borůvka a spolupracovníci, *Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analysy*, Práce Brněnské zákl. Čsl. akad. věd 29 (1957), 417—540.

[7] O. Borůvka, *Mathias Lerch als Fortsetzer der Klassiker in der Theorie der Gammafunktion*, *Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers*, Akademie-Verlag, Berlin 1959, 78—86.

[8] J. Škrášek, *Život a dílo prof. Mat. Lercha* (*K stoletému výročí jeho narození*), Čas. pro pěst. mat. 85 (1960).