Jiří Fiala

Henri Poincaré a psychologie matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 4, 205--217

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138143

Henri Poincaré a psychologie matematiky*)

Jiří Fiala, Praha

Úvod

V roce 1908 řekl HENRI POINCARÉ ve své přednášce pro Psychologickou společnost v Paříži ([20], str. 50): „Řeknu, že jsem za jistých okolností našel důkaz nějaké věty; tato věta dostane jakýsi barbarský název, který mnozí z vás nepochopí, ale to není důležité: pro psychologa není důležitá věta, nýbrž okolnosti."

Tento citát můžeme vzít jako implicitní vymezení obsahu tohoto článku: jeho předmětem není výklad matematického díla Henri Poincarého, nýbrž shrnutí některých jeho názorů na tvořivou práci matematika a na postavení matematiky.

Pokusme se hned v začátku formulovat přesněji, co budeme rozumět psychologií matematiky a k jakým závěrům dochází Poincaré.

Matematiku nelze nikdy brát odtrženě od jejích reálných kořenů: každá matematická teorie má původ v nějaké realitě, kterou popisuje nebo komplikovaně odráží. Tento vztah lze zhruba popsat takto: vycházíme z nějaké reality a hledáme pro ni adekvátní matematické vyjádření. Adekvátní zde znamená: existuje vztah mezi vybranými částmi popisované reality a určitými částmi matematického systému, který ji popisuje. Tento vztah je dále takový, že umožňuje určitou predikci. Tedy vyjdeme-li z určitého stavu reality, přejdeme do modelu, v něm provedeme příslušné úvahy (třeba řetězení úsudků či nějaký kalkulus nebo algoritmus) a pak vrátíme-li se zpět do reality, měli bychom dospět k pravdivým vztahům.

Realita zde není omezena jen na nějakou fyzickou skutečnost. Sama může představovat jiný, vysoce komplikovaný i abstraktní systém. Tak je tomu například ve vztazích mezi jednotlivými matematickými teoriemi.

Jaké jsou cesty k nalezení popisovaného vztahu a jaké jsou způsoby odhalení matematické pravdy? Poincaré odpovídá jednoznačně: je to intuice, která zde hraje rozhodující úlohu. Intuice se ovšem — aspoň zatím — vymyká jakémukoli pokusu o postižení popisem, natož pak nějaké formalizaci. Tím se velmi komplikuje cesta k objasnění zdrojů a cest této intuice, a proto také většina matematiků rezignuje a předává své výsledky ve formě zbavené jakýchkoli náznaků intuice.

Intuicí jsme tedy vedeni při volbě modelu. Pro tutéž realitu však může existovat více modelů, které jsou jí adekvátní a které ji věrně popisují v tom smyslu, že umožňují jistou predikci. Mezi těmito modely musíme volit a skutečnost, kterého modelu se přidržíme, je dána dalšími faktory, jež mohou být i zcela subjektivní povahy. Tento výběr je zpravidla diktován jednoduchostí modelu. Bod v rovině můžeme popsat stejně

*) Článek je pro tisk upravená přednáška, kterou autor proslovil 8. 11. 1976 v rámci cyklu „Postavy světové matematiky", pořádaného pražskou pobočkou JČSMF.

dobře pravoúhlými i polárními souřadnicemi — záleží jen na nás, který způsob budeme v danou chvíli pokládat za užitečnější a jednodušší.

V předcházejících dvou odstavcích je obsažena esence té části názorů H. Poincarého, o kterých zde budeme hovořit. Vlastně by zde bylo možno celý výklad ukončit, kdyby z těchto názorů neplynuly některé závažné důsledky a kdybychom se s Poincarého názory nechtěli seznámit hlouběji.

Poincaré nebyl ani filozofem, ani psychologem. Jeho názory byly získány hlubokou introspekcí a porovnáváním s tvůrčími postupy jiných velkých matematiků, především jeho současníků. Poincaré se ve svých pracích (a nejenom z této oblasti) vyjadřuje často dosti elipticky a nepřesně; v řadách článků, které se vzájemně doplňují a překrývají, své názory modifikuje a poopravuje. Nikdy se nepokusil vyložit své názory jako nějaký ucelený — ať už filozofický nebo psychologický — systém a ani to nikdy udělat nechtěl. Poincarého produkce byla tak nesmírná, že ani nebylo možné, aby své myšlenky stačil zachytit v nějaké úplné a dokonalé podobě — stačí si vzpomenout, u kolika prací ponechal rozpracování jiným matematikům. A nebyli to žádní podřadní matematici, kteří se této práce chopili (připomeňme třeba BROUWERA) a ani to nebyly nicotné problémy (stačí si prolistovat poznámkový aparát k překladu slavného memoáru *Analysis Situs* v [15], díl III, abychom si uvědomili, že správné důkazy k řadě tvrzení Poincarého se podařilo nalézt až v posledních letech a že mnoho problémů je stále otevřeno). Tím komplikovanější je situace v oblasti Poincarého názorů na tvůrčí proces v matematice a na psychologii matematiky. Zde jsme nuceni dohadovat se a interpretovat jeho názory a navíc ještě odlišovat tuto oblast od ostatních jeho filozofických úvah. PIERRE BOUTROUX [23] říká o Poincarém: jako filozof to byl autodidakt, nedůvěřivý ke všem filozofickým systémům, vycházel z „tabula rasa" a z matematických zkušeností. V. I. LENIN o něm řekl [10], str. 175: Poincaré byl velký fyzik a malý filozof. Z českých filozofů se Poincarém zabýval — pokud je mi známo — pouze zastánce psychologismu KAREL VOROVKA [24].

Se jménem Poincaré je spojován konvencionalismus. V oblasti psychologie matematiky však konvence u Poincarého — bez ohledu na některé jeho upřílišněné výroky — znamená v podstatě možnost volby mezi více adekvátními modely skutečnosti. Na rozdíl od skutečného filozofického konvencionalismu, kde vědec tvoří konvencemi i fakta (LE ROY např.), u Poincarého volí a vytváří vědec pouze jazyk, kterým daná fakta vyjadřuje.

Matematikům není jistě třeba Poincarého představovat. Jeho místo v matematice je pevné a jasné. Poincaré patřil k největším matematikům přelomu století. Jeho dílo je nesmírně rozsáhlé a stále aktuální. O významu díla svědčí například nedávné velké třísvazkové vydání vybraných spisů, vydané v řadě Klasici vědy Akademií věd SSSR [15]. Třetí díl těchto spisů obsahuje mimo jiné také velmi podrobnou bibliografii prací Poincarého (přes 500 položek), bibliografii prací o Poincarém a pak také řadu článků významných matematiků o přínosu Poincarého v jednotlivých oborech matematiky. Zde se však tímto rozsáhlým dílem nebudeme moci vůbec zabývat.

Z díla H. Poincarého, věnovaného problematice psychologie matematiky, vybíráme pouze dvě části: jeho názory na geometrii a na roli intuice v matematice. Dříve než podáme vlastní výklad, uvedeme aspoň několik údajů o samotném Henri Poincarém.

Život

Henri Poincaré pocházel ze starobylé lotrinské rodiny, která dala Francii i světu řadu vynikajících osobností. Jeho děd Jules Nicolas byl lékárníkem v Nancy a tam se mu narodili dva synové – Léon a Antoni – a jedna dcera. Léon, lékař a profesor na univerzitě v Nancy, byl otcem Henri Poincarého a dcery, která se později stala ženou a spolupracovnicí filozofa Boutroux. Druhý syn, Antoni, byl otcem Raymonda (pozdějšího francouzského předsedy vlády a prezidenta) a Luciena, který se stal známým fyzikem.

Henri Poincaré se narodil v Nancy 29. dubna 1854. Dětství prožíval především se svou sestrou; zvláště po dlouhé nemoci se stranil kamarádů. Velmi mnoho četl a už v raném dětství projevoval znamenitou paměť. Jeho výjimečné schopnosti k matematice se projevily až ve čtvrtém ročníku lycea, které studoval v Nancy. V lyceu však pokračoval v klasické větvi, zvláštní zálibu měl v historii. Při závěrečných zkouškách v roce 1871 neuspěl v písemné práci z matematiky – dostal 0 bodů. 1872–3 navštěvoval speciální matematickou třídu lycea, kde se seznámil s Paulem Appellem. PAUL APPELL napsal později o něm knihu [1], o niž se zde v tomto místě opíráme. V r. 1873 po vykonání velice úspěšných přijímacích zkoušek vstoupil Poincaré na École polytechnique. Pak pokračoval ve studiu na báňské škole École des mines a r. 1879 se stal důlním inženýrem. Jeho praxe ve Vesoul byla však krátká: po třech měsících byl povolán na univerzitu v Caen, aby tam přednášel matematickou analýzu. V témže roce získal doktorát za práci o integrování parciálních diferenciálních rovnic. To už se ale začínal zabývat teorií fuchsovských (v nynější terminologii automorfních) funkcí, která mu přinesla první velkou slávu.

R. 1881 byl Poincaré povolán na pařížskou univerzitu a o pět let později nastupuje na místo LIPMANNOVO jako vedoucí katedry matematické fyziky a počtu pravděpodobnosti.

R. 1887, v necelých 33 letech, byl zvolen členem Akademie věd. Po smrti TISSERANDOVĚ se stává r. 1896 hlavou katedry nebeské mechaniky. Poincaré přednášel především své vlastní práce – každý rok měl jinou přednášku. Jejich soupis uvedl v přehledu vlastního díla (viz např. [15], díl III). Všechny přednášky byly studenty zapsány a vydány.

Po smrti BERTHELOTOVĚ byl zvolen mezi „nesmrtelné" do francouzské Akademie, kde zaujal křeslo básníka SULLY-PRUDHOMME. V té době byl už členem asi 40 akademií a vědeckých společností, nositelem řady čestných doktorátů, medailí, poct...

Poincaré zemřel 17. července 1912 po celkem lehké operaci. Pohřben je na montparnasském hřbitově u zdi u východu do ulice Émile Richard.

Když v roce 1893 XAVIER LEON zakládá *Révue de Métaphysique et de Moral,* je H. Poincaré přizván k účasti a stává se pravidelným přispěvatelem. H. Poincaré byl také jedním z prvních členů Société française de philosophie, kde vedl diskuse s významnými filozofy matematiky té doby, na příklad s COUTURATEM, LE ROY, LALANDEM a také BERTRANDEM RUSSELEM.

Své články, věnované různým otázkám vědy, zvláště matematiky a fyziky, psychologii tvorby apod. shrnul po úpravách do tří knih: *Věda a hypotéza* [18], *Hodnota vědy* [19], *Věda a metoda* [20]. Po jeho smrti vyšly *Poslední myšlenky* [21], shrnující ostatní články.

Prostor před Poincarém

Na počátku minulého století byla všeobecně přijímána Kantova filozofie, podle níž je prostor formou sensibility. Zkušenost je možná jen díky intuitivním formám daným apriori. Kantova slavná otázka, zda existuje poznání, které by bylo současně syntetické i apriorní, i jeho kladná odpověď, že totiž tímto poznáním je geometrie, brzdila další rozvoj chápání prostoru. Podle Kanta jsou z jedné strany geometrické formy jasné intuicí a jsou tedy apriorní, z druhé strany vypovídají o světě a jsou tedy syntetické. Podle Kanta je tedy geometrie věda, „welche die Eigenschaften des Raumes synthetisch und doch a priori bestimmt." Vlastnosti prostoru — jeho třírozměrnost, euklidovská struktura — jsou nám tedy dány přímo intuicí.

Zlom nastal objevením neeuklidovských geometrií. Ukázalo se, že neeuklidovská geometrie je stejně dobře přijatelná jako euklidovská. Byl to první HELMHOLTZ [7], který poukázal na to, že je v jisté míře neeuklidovská geometrie přijatelná i intuicí.

Reakce kantovců byla zpočátku jednomyslná: odmítnutí neeuklidovské geometrie. Později marburgská škola (H. COHEN, P. NATORP) smířila Kantovu filozofii s novými objevy tím, že poukázala na to, že Kantova geometrie neimplikuje nutnost myslet podle principů euklidovské geometrie.

Objevy neeuklidovských geometrií přímo volaly po empirickém ověření. Prakticky všichni tvůrci neeuklidovských geometrií přešli na pozice empirismu.

Velký význam měla další Helmholtzova práce [6], ve které se vycházelo z předpokladu, že každá metrika v prostoru spočívá na existenci volně pohyblivých těles. Helmholtz předložil postuláty a podal důkaz, že tyto postuláty jsou slučitelné pouze s euklidovskou nebo neeuklidovskou geometrií. Tato Helmholtzova práce byla později velmi kritizována pro svou nedokonalost. R. 1890 SOPHUS LIE však tuto teorii znovu podpořil a výsledky v podstatě potvrdil. Lieova věta říká ve zjednodušení toto: Jestliže prostor má n dimenzí, je v něm možný volný pohyb tuhých těles a pro stanovení polohy takového tělesa v prostoru je třeba p parametrů, pak je počet geometrií vyhovujících těmto podmínkám konečný (viz např. [12]). Poincaré později tuto větu doplnil o horní mez pro p, je-li dáno n.

Poincaré zasáhl do všech těchto diskusí poprvé v r. 1887 v článku [16]. Jeho odpověď na Kantovu otázku zněla přibližně takto: Je třeba od sebe důsledně odlišit matematickou a fyzickou geometrii. Matematická geometrie je přesná, nemůže tedy záviset na nepřesných pozorováních. Matematická geometrie je v kantovských termínech apriorní a analytická. Není však syntetická. Je to teorie logické struktury. Naproti tomu fyzická geometrie představuje aplikaci čisté geometrie na svět, a je tedy syntetická. Tedy, jak říká Poincaré na jednom místě — geometrie je věda, jak uvažovat dobře o špatně nakreslených obrázcích. Kantův omyl spočíval na smíšení těchto dvou oblastí odlišného charakteru. Žádná geometrie není současně apriorní a syntetická.

Roku 1891 vyšel další významný článek Poincarého [17]. V něm se poprvé objevují termíny *convention* a *définition déguisée* (maskovaná definice). Problém zněl: Lze rozhodnout o pravosti euklidovské nebo neeuklidovské geometrie pozorováním? A odpověď Poincarého zněla: Tato otázka nemá vůbec smysl, je to totéž jako ptát se: které souřadnice jsou správné: pravoúhlé nebo polární? Axiómy nejsou soudy, jsou to konvence, jsou to maskované definice. Euklidovská i neeuklidovská geometrie jsou jen dva jazyky pro popsání téže reality – prostoru. Tyto jazyky ovšem nejsou libovolné: konstruujeme je z předem daného materiálu. Je však více modelů a my si můžeme vybrat. A je to zkušenost, která nám dává pokyny, jak si vybrat. A proč volíme právě euklidovskou geometrii? Protože vyniká jednoduchostí a jsme na ni jako na dědictví předků zvyklí.

Fyzické kontinuum

Poincaré vychází z důsledného rozlišení matematického a fyzického kontinua: matematické kontinuum představuje jazyk pro popsání fyzického kontinua – prostoru.

Psychologie rozlišuje různé druhy percepce, a tedy i různé druhy prostorů: vizuální percepci odpovídá vizuální prostor, atd. Psychologický experimentální výzkum těchto prostorů je velmi významný a zajímavý. Vezměme jako příklad vizuální prostor. V nejčistší podobě je dvojrozměrný. Není však homogenní (všechny body sítnice nehrají stejnou roli). Třetí dimenze je dána konvergencí očí a akomodací. Tento prostor je však třírozměrný jen proto, že konvergence a akomodace jsou koordinovány, jinak bychom ho museli považovat za čtyřrozměrný. Všechny tři dimenze nejsou rovnocenné, takže prostor není ani izotropní. Řada zajímavých experimentů posledních let ukazuje na to, že struktura vizuálního prostoru odpovídá spíše hyperbolické než euklidovské geometrii (viz např. základní práci [11]).

K vizuálnímu prostoru přistupuje dále prostor taktilní, který je (matematicky) ještě komplikovanější než vizuální, dále prostor motorický odpovídající svalovým vjemům. Všechny tyto prostory slouží jako základ pro vybudování našeho pojmu prostoru. Žádný izolovaný vjem nás nemůže dovést k pojmu prostoru. Musíme sledovat zákonitosti sledů vjemů. Tyto sledy se nám projevují jako změny, modifikace v množinách vjemů.

Fyzické kontinuum má tuto základní vlastnost: některé prvky tohoto kontinua jsou nerozlišitelné, jsou velmi blízko sebe. Tak např. dva vpichy těsně vedle sebe do kůže vnímáme jako jeden, dva odlišné body blízko sebe nám splývají. Při tom je velice důležité, že tento vztah nerozlišitelnosti je netranzitivní. Poincaré uvádí příklad: závaží 10 a 11 g nerozlišíme v rukou, stejně tak 11 a 12 g, ale 10 a 12 g už ano.

Fyzické kontinuum je tedy podle Poincarého definováno takto: Je to množina bodů, na které je dána netranzitivní, reflexivní a symetrická relace – nerozlišitelnost. Řetězem nazýváme řadu bodů $X_1, X_2, \ldots, X_n$, takových, že X_i je nerozlišitelný od X_{i+1} (pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$); říkáme také, že řetěz spojuje body X_1 a X_n.

U kontinuí budeme předpokládat vždy souvislost: dva libovolné body kontinua lze vždy spojit nějakým řetězem. Zobrazení jednoho kontinua do druhého se nazývá spojitým, když zachovává relaci nerozlišitelnosti. Zřejmým způsobem lze definovat pojem izomorfismu (nebo chceme-li homeomorfismu).

Je pozoruhodné, že tento typ prostorů byl v matematice jen velmi málo studován. E. C. ZEEMAN [25] je nazývá tolerančními prostory a používá je právě v souvislosti s vizuální percepcí (bez odkazu na Poincarého).

Dimenzi kontinua definuje Poincaré takto: Řezem (coupure) je libovolná neprázdná množina. Řez C dělí kontinuum, když existují dva body kontinua A a B tak, že každý řetěz, který je spojuje, obsahuje aspoň jeden bod, který je nerozlišitelný od některého bodu patřícího do C. Kontinuum má dimenzi 1, když existuje řez, který se skládá z navzájem odlišitelných bodů a dělí toto kontinuum. Máme-li už definována kontinua dimenze n, můžeme definovat kontinua dimenze $n + 1$: jsou to taková kontinua, ve kterých lze najít řez C, který by byl kontinuem dimenze n a který by toto kontinuum dělil.

Touto definicí dimenze položil Poincaré základy k současné teorii dimenze topologických prostorů. Brouwer dal r. 1913 přesnou definici, k podstatnému rozvoji došlo až v letech 1928–1932, kdy P. S. Aleksandrov zavedl tzv. homologickou teorii dimenze.

Proč je prostor třírozměrný?

V řadě prací se Poincaré zabývá otázkou, proč má fyzické kontinuum tři dimenze. Tyto články obsahují zajímavé úvahy o genesi pojmu prostoru z hlediska psychologie.

K tomu, abychom vybudovali fyzické kontinuum, které by odpovídalo některému z vnímaných prostorů, je třeba nejprve stanovit, co je to bod. Poincaré říká: bod nedefinujeme, stejně jako dítěti nedefinujeme, co je to ovce, nýbrž řekneme prostě: pohleď, to je ovce.

Lokalizovat bod znamená, představit si pohyby, které by byly nutné pro jeho dosažení. Existuje ovšem více cest k dosažení téhož bodu a je třeba mezi nimi zavést ekvivalenci.

Základní roli zde hrají pohyby. Pohyby vnímáme jako změny. Změny lze rozdělit na interní a externí. Interní jsou ty změny, které jsou chtěné a které jsou doprovázeny muskulárními vjemy. Externí změny jsou pak ostatní změny. Některé externí změny lze korigovat interními změnami. To znamená: vnímáme určitou externí změnu, pak provedeme interní změnu a dosáhneme stavu, který byl před provedením externí změny. Ty externí změny, které mohou být korigovány nějakou interní změnou, označujeme jako změny polohy. Ostatní externí změny pak tvoří změny stavu. Jako příklad změny stavu lze uvést chemický proces, který změní barvu kapaliny ve zkumavce.

Na základě tohoto rozdělení externích změn můžeme nyní provést rozdělení interních změn. Ty interní změny, které mohou sloužit ke korigování externích změn a které probíhají beze změny relativní polohy jednotlivých částí těla, označujeme jako změny pozice; ostatní pak označujeme jako změny držení těla. Změny držení těla tedy nemohou provádět korekce externích změn nebo je mohou provádět pouze neúplně a nedokonale.

Mezi interními změnami lze nyní zavést ekvivalenci: dvě interní změny pokládáme za ekvivalentní, jestliže jsou obě schopny korigovat touž externí změnu. Dvě takové interní změny odpovídají tedy stejnému pohybu, přemístění. S tím je spojen základní požadavek, bez něhož by nebylo vůbec možno geometrii vybudovat: Když interní změna koriguje dvě externí změny a když jiná interní změna koriguje jednu z těchto externích změn, pak musí korigovat i druhou.

Interní změny jsou vnímány jako posloupnosti muskulárních vjemů. Ke každé takové řadě S existuje řada S', která je k ní inverzní v tomto smyslu: provedeme-li nejprve S a pak S' (což budeme zapisovat jako $S + S'$), vrátíme se do původní polohy.

Nyní můžeme popsat první fyzické kontinuum — grupu přemístění: prvky tohoto kontinua jsou množiny interních změn, které jsou schopny korigovat touž externí změnu. Dvě takové interní změny α a β jsou pokládány za nerozlišitelné, když jsou buď nerozlišitelné přirozeně, tj. jako vjemy blízko sebe, nebo konvencí: když α je schopno korigovat stejnou externí změnu jako nějaká třetí externí změna, nerozlišitelná přirozeně od β.

Zkušenost nás učí, že toto kontinuum má 6 dimenzí. Dalším ztotožněním interních změn dospějeme ke kontinuu o nižším počtu dimenzí. Nejprve však musíme zjistit, kdy pokládáme dva body prostoru za stejné, tj. kdy můžeme říci: objekt A zaujal v okamžiku t_1 stejnou pozici jako objekt B v okamžiku t_2.

Nejprve předpokládejme, že se mezi oběma okamžiky nepohneme — to jsme schopni posoudit na základě našich svalových vjemů. Pak budou oba body stejné, jestliže vjemy o B v okamžiku t_2 mi budou dávány stejnými nervovými cestami jako před tím vjemy o A.

Můžeme formulovat dvě podmínky pro to, aby dva body byly stejné: 1. (nutná podmínka) Body M a M' padnou do stejného místa O na sítnici, tedy geometricky: body O, M a M' leží na přímce.
2. (nutná a dostačující) V okamžiku t_1 se můj prst dotýká objektu A a aniž bych se pohnul, v okamžiku t_2 se téhož prstu dotýká předmět B.

Při formulaci jsme si však pomohli geometrií; jediné, co nám dává zkušenost, je, že první podmínka může být splněna, aniž by byla splněna druhá. To vyjadřujeme takto: vidění — na rozdíl od taktilního vnímání — se provádí na dálku.

Zatím jsme tedy hovořili o identitě bodů za předpokladu, že jsme se nepohnuli. Kdy budou nyní body zaujaté objektem A v okamžiku t_1 a objektem B v okamžiku t_2 totožné? Jistě tehdy, když pohyb, který jsme vykonali mezi těmito časovými okamžiky, se skládá ze dvou řad muskulárních vjemů S a S', které jsou inverzní. Toto řešení je však ještě neuspokojivé: pro porovnání bodů máme jediný prostředek: řady muskulárních vjemů. Tyto řady však tvoří kontinuum o velikém počtu dimenzí. I když nerozlišujeme řady Σ a $\Sigma + S + S'$ (S' je inverzní k S), bude dimenzí ještě mnoho. Řešení spočívá v rozpoznání této zkušenosti: existují řady muskulárních vjemů σ, při kterých se prst nepohne. Musíme tedy dát do jedné třídy řady Σ a $\Sigma + \sigma$. Teprve teď má toto kontinuum tři dimenze.

Celý problém jsme takto ještě ovšem nevyřešili: vytvořili jsme sice třírozměrné kontinuum, je to však taktilní prostor pouze jednoho prstu. Každý prst tedy vytváří svůj vlastní taktilní prostor. Jak to, že jsou tyto prostory stejné?

Uvažujme dva prsty, p_1 a p_2. Budeme psát $S \equiv S' \pmod{p_1}$, když řady muskulárních vjemů S a S' vedou ke stejnému taktilnímu vjemu prstu p_1. Předpokládejme teď, že existují dvě posloupnosti svalových vjemů s a s_1, pro které platí: Nechť p_2 má taktilní vjem ze styku s objektem. Provedeme s, tento vjem zmizí, ale místo něj bude mít vjem objektu prst p_1 (pokud se ovšem prst nepohne). Geometricky řečeno: pohyby odpovídající s uvedou prst p_1 na místo původně obsazené prstem p_2. Existují-li tyto posloupnosti pak

$$S \equiv S' \,(\mathrm{mod}\, p_1) \Rightarrow s + S + s_1 \equiv s + S' + s_1 \,(\mathrm{mod}\, p_2)\,,$$

— což dává izomorfismus obou kontinuí, a tedy i stejnou dimenzi. Je však také možno uvažovat případ, že tyto posloupnosti neexistují. Když například neexistuje s, pak bychom museli říci, že prst p_2 vnímá objekt na vzdálenost. Prostor by pak ovšem měl více dimenzí.

Podobně je tomu s viděním; bod sítnice hraje stejnou roli jako prst. Obecně lze takto popsat izomorfismy prostorů odpovídajících rozličným vjemovým kontinuím.

Z povrchního pohledu by se mohlo zdát, že jsme teď na pozici empirismu. Experimentální fakta se však zde ověřují sice často, ale ne vždy (stačí, aby se objekt pohnul apod.). Musíme odhlédnout od těchto výjimek. Zkušenost nám tedy ukazuje pouze — uzavírá Poincaré — že je výhodné přisoudit prostoru tři dimenze: pak je totiž počet těchto výjimek nejmenší.

Právě popsaná konstrukce fyzického kontinua, rozvedená v pracích Poincarého do podstatně větší hloubky, než jsme zde mohli udělat my, by mohla velmi posloužit genetické psychologii. Zde se nabízí hned otázka: jaký je vztah těchto prací Poincarého k pozdějším pracím Jeana Piageta o genesi pojmu prostoru a geometrie u dítěte [13], [14]? Z objemných Piagetových knih lze jen s velikými obtížemi rozluštit skutečnou podstatu jeho úvah. Ani přepracovaná a zkrácená vydání — jakkoli nesmírně užitečná (např. [8], [9]) — v nejzásadnějších věcech nepomohou. Zdá se však, že Piagetova cesta je dost obdobná Poincarého (i když chybí přímé odkazy na Poincarého). Na rozdíl od Poincarého, který ve svých úvahách je schopen se zcela oprostit od pojmu prostoru a geometrie, které má teprve vytvořit, a tedy je schopen i ve formulacích se pečlivě obejít bez geometrické terminologie, je tomu v Piagetových pracích naopak. V podstatě se při všech experimentech používá geometrická terminologie a tato verbalizace — podle mého názoru — silně ovlivňuje výsledky jeho pokusů. Při řadě pokusů je zřejmé, že jsou vlastně testovány (skryté) vědomosti a ne přímo představy prostoru. Zde by právě vzor daný Poincarém mohl velmi pomoci.

Poincaré a teorie relativity

Jak už bylo řečeno výše, Poincaré zastával názor, že žádná měření nemohou rozhodnout, která z geometrií — euklidovská nebo neeuklidovská — je pravá a že dokonce ani nemá smysl se takto ptát. V této části se pokusíme naznačit, jaké důvody vedly Poincarého k této formulaci a jaký je jeho vztah k teorii relativity.

Helmholtz předložil následující problém: představme si dvourozměrný svět, ve kterém žijí dvourozměrní obyvatelé. My budeme vědět, že žijí na kulové ploše. Mohou se sami přesvědčit vnitřními měřeními, zda žijí na rovině, nebo na kulové ploše? Helmholtz odpovídá ano: mohou například proměřovat úhly trojúhelníků nebo mohou zjišťovat poměr poloměru kružnice k její délce a tak mohou určit křivost v každém bodě.

Abychom si objasnili Poincarého postoj k tomuto problému, představme si dva fyziky

$F1$ a $F2$ z tohoto světa (tento příklad je od R. CARNAPA [3], podobný příklad však uvádí i Poincaré [20]). $F1$ tvrdí, že žijí na kulové ploše, $F2$ v rovině. Oba provádějí proměřování délek ve shodě s předpokládanou geometrií. $F1$ tvrdí: jsme na kulové ploše a tělesa nepodléhají zkracování a prodlužování. $F2$ tvrdí: ne, jsme v rovině a tělesa se zkracují a prodlužují podle těchto zákonů ... Oba vykládají svět různými formálními prostředky, a to tak, že jejich predikce přesně souhlasí se skutečností. Který má pravdu? Poincaré odpovídá: tuto otázku není vůbec možno položit. Jsou to dvě metody popisu téhož světa. Protože je tedy možných více metod popisu (více jazyků), je třeba si vybrat. Tento výběr je konvencí – avšak, jak je krásně vidět z příkladu – nikoli libovolnou; smíme volit jen mezi adekvátními popisy.

Poincaré vyslovil domněnku, že i když fyzikové přijdou měřeními k odlišnostem ve struktuře prostoru, stejně dají přednost euklidovské geometrii a raději budou modifikovat fyzikální zákony. Hlavním důvodem zde bude jednoduchost euklidovské geometrie a zvyk. Avšak r. 1915, tři roky po Poincarého smrti, vystoupil ALBERT EINSTEIN s obecnou teorií relativity, která zvolila jinou cestu. Tuto skutečnost však nelze chápat jako spor Poincaré versus Einstein (jak je nazvána jedna kapitola knihy [3] Rudolfa Carnapa), ani nelze souhlasit s názorem (L. DE BROGLIE), že to byla Poincarého filozofie, která mu nedovolila učinit objev obecné teorie relativity před Einsteinem. Omyl Poincarého záležel pouze v tom, že neodhadl, že přece jen bude jednodušší vzdát se euklidovské geometrie – že pak celek, i za cenu lokální komplikovanosti, vyjde jednodušší.

Ukažme si ještě na jednom příkladě (opět R. Carnap [3]), jak lze jedna a tatáž fakta popsat adekvátně různými jazyky. Podle teorie relativity má prostor strukturu, která se v gravitačním poli odchyluje od euklidovské. Vezměme jako dříve dva fyziky – $F1$ a $F2$. $F1$ zastává neeuklidovskou geometrii. Pro něj délka tyče závisí pak pouze na teplotě podle vztahu

$$l = l_0(1 + \beta(T - T_0)) .$$

Fyzik $F2$ trvá na euklidovské geometrii. Musí pak ovšem modifikovat zákony pro délku tyče. Jeho zákon pak zní:

$$l = l_0(1 + \beta(T - T_0))\left(1 - C\frac{m}{r}\cos^2\varphi\right)$$

kde C je univerzální konstanta, m je masa, r je vzdálenost od tělesa (řekněme Slunce) a φ je úhel, který svírá tyč se směrem k tělesu. Mezi oběma popisy musíme vybrat a fyzika dala přednost změně geometrie. Jedno z obecných kritérií pro výběr formuloval HANS REICHENBACH [22]. Reichenbach rozlišuje tzv. diferenciální a univerzální síly (Carnap navrhuje raději říkat efekty). Diferenciální efekt je různý pro různé věci (např. oprava délky tyče na teplotu), univerzální je společný všem věcem (gravitační působení). Reichenbachovo kritérium pak zní: fyzikové vždy přeformulují teorii tak, aby z ní vymizely univerzální efekty.

V této souvislosti je ovšem zajímavé vyjádření Alberta Einsteina k postoji Poincarého. V článku *Geometrie a zkušenost* (česky v [4]) shrnuje Poincarého názory takto: „O chování skutečných věcí nevypovídá nic geometrie G, nýbrž jen geometrie spolu se souhrnem fyzikálních zákonů F. Symbolicky můžeme tedy říci, že kontrole zkušenosti podléhá jen součet $G + F$, G může být voleno libovolně, rovněž části F; všechny tyto zákony jsou konvence. Abychom se vyhnuli rozporu, je nutno volit zbytek F tak, aby G a celé F dohromady přesně vystihovaly skutečnost. Sub specie aeterni podle mého mínění má Poincaré s tímto pojetím pravdu."

Role intuice v matematice

Roli intuice věnoval Poincaré velmi mnoho pozornosti. Nejjasněji formuloval své myšlenky v článku *Intuice a logika v matematice,* který se později stal první kapitolou knihy *Hodnota vědy.* Poincaré zde uvádí dva protichůdné přístupy: analytický a geometrický (logický a intuitivní). Tyto postoje nejsou dány ani výchovou, ani vyučováním: člověk se prostě narodí geometrem nebo analytikem, tvrdí Poincaré. Při povrchním pohledu na klasiky se nám budou všichni jevit jako intuitivní. Při hloubějším zkoumání se nám však nakonec oddělí. Intuice nemůže dát přesnost a jistotu. Poincaré uvádí příklady: podle intuice by se zdálo, že každá křivka má tečnu, teprve analytici prozkoumali tyto otázky detailně a zkonstruovali funkce bez derivací (Weierstrass). Podobně je to třeba s Dirichletovým principem – zde se existence minima přijímala intuitivně.

U analytiků se zdá, jako kdyby u nich nebyla žádná stopa intuice. Je to však iluze. Pro tvoření v jakékoli vědě je třeba ještě něco jiného než čistá logika – a to cosi další je právě intuice. Není však jen intuice smyslová či geometrická, je více druhů intuice – zobecnění indukcí, intuice čísla apod.

Logik rozloží důkaz na elementární kroky. Je pochopením každého z nich pochopen důkaz? Jistě ne, protože může uniknout celkový smysl. Je mnoho cest, jak řetězit úsudky: jde však o to, vybrat správnou cestu, vedoucí k cíli – a výběr této cesty nám napovídá právě intuice. Logika je nástrojem důkazu, jen ona dává jistotu. Intuice je nástrojem objevu.

Avšak víme dobře, že netvoří pouze geometrové, nýbrž i analytici. Je v tom rozpor? Ne, říká Poincaré. Prostě proto, ža i analytici jsou vedeni intuicí, ovšem intuicí jiného druhu, řekněme intuicí čísla, algebraickou intuicí apod. Poincaré uvádí jako příklad Hermita, který nikdy neevokoval v rozhovorech smyslové příklady. Pracoval však uvnitř s abstraktními entitami a byl veden také zvláštní intuicí. Tedy i mezi analytiky jsou objevitelé, říká Poincaré na závěr článku, ale je jich méně než mezi duchy geometrickými.

Rozbor názorů Poincarého na roli intuice v matematice lze nalézt také v knize V. F. Asmuse [2].

Invence v matematice

Nejvíce řekl H. Poincaré o tvoření v matematice v přednášce pro pařížskou Psychologickou společnost [20], ze které jsme už citovali na začátku tohoto článku.

V čem záleží objev v matematice? Ne v tom, že sestavíme nové kombinace už známých faktů. Tvořit, to znamená nedělat neužitečné kombinace, nýbrž jen užitečné – a těch je nepatrná menšina. Tvořit – to znamená umět rozpoznávat, umět vybírat. Inventer – c'est choisir. Jak se provádí tento výběr? Poincaré uvádí svědectví o své vlastní práci, které zde ve volném překladu podáváme:

„Dva týdny jsem se pokoušel dokázat, že nemohou existovat žádné funkce analogické těm, které jsem později nazval fuchsovskými (v současné terminologii automorfními – a tohoto termínu se budeme držet – pozn. J. F.). Neměl jsem ovšem pravdu; denně jsem sedal k psacímu stolu a hodinu nebo dvě jsem zkoušel velké množství kombinací, ale nedospěl jsem k žádnému výsledku.

Jednou večer jsem si dal proti svému zvyku černou kávu a nemohl jsem usnout. Myšlenky se shlukovaly, cítil jsem, jak do sebe narážejí, dokud se dvě – abych tak řekl – do sebe nezavěsily a nevytvořily stabilní kombinaci. Ráno jsem pak dokázal existenci jedné třídy automorfních funkcí – těch, které odpovídají hypergeometrické řadě. Zbylo mi vlastně už jen sepsat výsledky a to zabralo pár hodin.

Chtěl jsem pak vyjádřit tyto funkce jako podíl dvou řad; tato myšlenka byla vědomá a promyšlená, vedla mne analogie s eliptickými funkcemi. Ptal jsem se, jaké vlastnosti by musely mít tyto řady, kdyby měly existovat a dospěl jsem bez obtíží k řadám, které jsem nazval theta-automorfními.

V tu dobu jsem opustil Caen, kde jsem tehdy bydlel, abych se zúčastnil nějaké geologické exkurze, organizované báňskou školou (Ecole des Mines). Průběh této exkurze mi dal zapomenout na mou práci. Když jsem přijeli do Coutances, nastupovali jsme do autobusu k nějakému výletu; v okamžiku, kdy jsem položil nohu na schodek, objevila se mi idea – bez jakýchkoli, zdálo by se, předcházejících úvah – idea, že ty transformace, kterých jsem používal pro definice automorfních funkcí, jsou identické s transformacemi neeuklidovské geometrie. Neprovedl jsem ověření, neměl jsem k tomu ani čas, protože sotva jsme v autobusu usedli, pokračoval jsem v načatém hovoru. Ale jistotu už jsem měl. Po návratu do Caen jsem s odpočinutou hlavou ověřil nalezený výsledek, spíš pro klid duše.

Tehdy jsem se také zabýval některými otázkami teorie čísel, přičemž jsem nedosáhl vůbec žádných slušných výsledků; vůbec jsem přitom netušil, že by to mohlo mít nějaký vztah k dřívějším výzkumům. Znechucen svými neúspěchy odjel jsem na několik dnů na mořské pobřeží a přemýšlel jsem tam o úplně jiných věcech. Jednou, když jsem se tak procházel po pobřeží, se mně stejně náhle, rychle a s jistotou objevila myšlenka, že aritmetické transformace kvadratických forem jsou totožné opět s transformacemi neeuklidovské geometrie.

Když jsem se vrátil do Caen a přemýšlel nad tímto výsledkem, vyvodil jsem z něho důsledky: příklad kvadratických forem mně ukázal, že existují automorfní grupy jiné než ty, které odpovídaly hypergeometrické řadě; viděl jsem, že na ně mohu aplikovat teorii theta-automorfních funkcí, a že tedy existují automorfní funkce, které se liší od těch, které odpovídají hypergeometrické řadě – což byly jediné, které jsem do té doby znal. Navrhl jsem si samozřejmě najít všechny tyto funkce, zahájil jsem systematický útok a likvidoval jsem jednu posádku za druhou. Zůstávala však ještě jedna: její pád by znamenal pád celé pevnosti. Avšak všechno mé úsilí vedlo jen k tomu, že jsem pochopil, v čem záleží obtížnost problému – což už ovšem něco znamenalo. Všechna tato práce byla dokonale vědomá.

Potom jsem odjel do Mont-Valérien, kde jsem měl konat vojenskou službu a tak jsem měl velmi rozmanitá zaměstnání. Jednou, když jsem se procházel po bulváru, mne náhle napadlo řešení tohoto těžkého problému, který ještě zbýval. Nepokoušel jsem se do něho hned proniknout, to jsem udělal až po návratu z vojenské služby. Měl jsem všechny složky, zbývalo už jen posbírat je a uspořádat. Proto jsem bez námahy a naráz úplně sepsal svou práci."

Ze všeho uvedeného vyplývá významná role podvědomé, subliminální práce; tato role je základní v matematické tvorbě. Poincaré dále říká: *Vidíme, že práce matematika není mechanická a nelze ji svěřit žádnému stroji, jakkoli by byl dokonalý. Zde není problém v tom, sestavit pomocí daných pravidel co nejvíce kombinací. Tyto kombinace by byly příliš početné, neužitečné a neuchopitelné. Skutečná práce vědce spočívá ve výběru kombinací, tak aby se vyloučily neužitečné, nebo ještě spíše v tom, aby se vůbec neužitečné nesestavovaly. A pravidla, která je třeba přitom používat, jsou tak jemná a přesná a hraničně delikátní, že je téměř nelze vyjádřit slovy: snáze se cítí, než formulují. Jak by bylo možno si za těchto okolností představit aparát, který by je automaticky realizoval?*.

Přednáška Poincarého obsahuje řadu dalších příkladů a velmi hlubokých postřehů a myšlenek. Z této přednášky vycházel Jacques Hadamard ve své překrásné knize o psychologii invence v matematice [5]. Poznamenejme, že ruský překlad této Hadamardovy knihy obsahuje jako jednu z příloh také překlad Poincarého přednášky.

Při výběru kombinací přistupuje ještě jedna složka: krása. *Jaké jsou ty matematické charakteristiky, kterým připisujeme vlastnosti krásy a které jsou schopny probudit v nás určité estetické uspokojení? Jsou to ty, jejichž složky jsou uspořádány harmonicky tak, že rozum bez úsilí je může pojmout jako celek a podrobnosti uhádnout. Užitečné kombinace jsou také ty nejkrásnější, tj. ty, které nejvíce působí na ten specifický cit matematické krásy, který je znám všem matematikům a je nedostupný všem profánním do takového stupně, že mají často sklon se mu smát.*"

Literatura

[1] Appel Paul: *Henri Poincaré*. Librairie Plon, Paris 1925.

[2] Asmus, V. F.: *Problema intuicii v filosofii i matěmatike*. Mysl', M. 1965 (2. vyd.).

[3] Carnap Rudolf: *Philosophical foundations of physics*. Basic Books N. Y. (rusky Progress M. 1971).

[4] Einstein Albert: *Jak vidím svět*. ČS Praha 1961.

[5] Hadamard Jaques: *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Blanchard Paris 1959 (rusky Sovětskoje radio M. 1970).

[6] Helmholtz H. v.: *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*. Nachrichten von der K. Gesellschaft, Göttingen *14* (1868) 193—221. Rusky v [12].

[7] Helmholtz H. v.: *Ueber die Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome*. In: Schriften zur Erkentnisstheorie, Berlin 1921.

[8] Holloway G. E. T.: *An introduction to the child's conception of geometry*. Routledge and Kegan Paul, London 1967.

[9] HOLLOWAY G. E. T.: *An introduction to the child's conception of space.* Routledge and Kegan Paul, London 1967.

[10] LENIN V. I.: *Materialismus a empiriokriticismus.* Svoboda, Praha 1975.

[11] LUNEBURG R. K.: *The metric of binocular visual space.* J. Optical Soc. of Amer. *40* (1950) 627—642.

[12] *Ob osnovanijach geometrii.* Sbornik klassičeskich rabot po geometrii Lobačevskogo i razvitiju jejo idej. Red. A. P. Norden. Gos. izd. těch.-těor. litěratury 1956.

[13] PIAGET J., INHELDER B., SZEMINSKA A.: *La géometrie spontanée chez l'enfant.* Presses Universitaires de France, 1948.

[14] PIAGET J., INHELDER B.: *La répresentation de l'espace chez l'enfant.* Presses Universitaires de France, 1947.

[15] POINCARÉ HENRI: *Izbrannyje trudy,* Klassiki nauki, red. N. N. Bogoljubov, 3 svazky, ukončeno 1974, nakl. Nauka M.

[16] POINCARÉ HENRI: *Sur les hypothèses fondamentales de la géometrie.* Bulletin de la Société Math. de France. *15* (1887) 203—216. Rusky v [12].

[17] POINCARÉ HENRI: *Les géometries non euclidiennes.* Rév. Gén. Sci. Pures et Appl. *2* (1891) 769 až 774.

[18] POINCARÉ HENRI: *La science et l'hypothèse.* Flammarion Paris 1950 (1. vyd. 1902).

[19] POINCARÉ HENRI: *La valeur de la science.* Flammarion Paris 1920 (1. vyd. 1905).

[20] POINCARÉ HENRI: *Science et méthode.* Flammarion Paris 1912 (1. vyd. 1908).

[21] POINCARÉ HENRI: *Dernières Pensées.* Flammarion Paris 1920 (1. vyd. 1913).

[22] REICHENBACH HANS: *The Philosophy of Space and Time.* N. Y. Dover 1958.

[23] VOLTERRA VITO, HADAMARD JACQUES, LANGEVIN PAUL, BOUTROUX PIERRE: *Henri Poincaré. L'Oeuvre scientifique. L'Oeuvre philosophique.* Félix Alcan, Paris 1914.

[24] VOROVKA KAREL: *Úvahy o názoru v matematice.* Praha 1917.

[25] ZEEMAN E. C. *The topology of the brain and visual perception. Topology of 3-manifolds and related topics* (ed. M. K. Fort, Jr.) Prentice-Hall 1962, str. 240—256.

Od učitele matematiky na vysoké i střední škole se vyžaduje nejen důkladná znalost vyučované vědy. Dobře vyučovat matematice může pouze člověk, který je jí sám nadšen a chápe ji jako živou, rozvíjející se vědu. Patrně mnozí žáci střední školy vědí, jak poutavou, a díky tomu snadnou a srozumitelnou, se stává matematika u takových učitelů.

Nutnost zvláštního nadání pro studium a pochopení matematiky se často zveličuje. Dojem mimořádné obtížnosti matematiky někdy vznikne jejím špatným, přílišně formálním výkladem ve vyučovací hodině. Běžné průměrné lidské nadání plně dostačuje, aby při dobrém vedení nebo z dobrých knih bylo možné si osvojit matematiku, která se vyučuje na střední škole.

A. N. KOLMOGOROV