Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Bernard König

Príspevok k definícii vektora magnetickej indukcie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 5, 283--284

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138119

PRÍSPEVOK K DEFINÍCII VEKTORA MAGNETICKEJ INDUKCIE

BERNARD KÖNIG, Bratislava

Doterajšia definícia vektora magnetickej indukcie pomocou silového účinku magnetického poľa na pohybujúci sa náboj sa opiera o zavedenie dvoch význačných smerov rychlosti pohybujúceho sa náboja, a to v smere magnetickej indukcie a smere naň kolmého, resp. o určenie maximálného silového účinku pri danej absolutnej hodnote rychlosti pohybujúceho sa náboja. Teda definujúce veličiny byli pred definíciou dané do súvislosti s definovanou veličinou (napr. rychlosť v definície má smer kolmý na smer definovanej magnetickej indukcie).

V tomto príspevku nie sú definujúce veličiny – na rozdiel od doteraz známych príslušných definícií závislé od definovanej veličiny, čím sa definícia stáva obecnejšou, bez doplňujúcich predpokladov a zahrňuje doterajšie definície ako špeciálný prípad. Pomocou takto získanej definície možno jednoznačne magnetickú indukciu určit z dvoch meraní – toto určenie možno považovať za úplnú definíciu vektora magnetickej indukcie.

Vychádzame z rovnice

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,, \tag{1}$$

kde $\mathbf{F}$ je síla pôsobiaca na náboj q pohybujúci sa rýchlosťou $\mathbf{v}$ v magnetickom poli o indukcii $\mathbf{B}$. Násobením rovnice sprava vektorove rýchlosťou $\mathbf{v}$ dostaneme

$$\mathbf{F} \times \mathbf{v} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{v} = q\mathbf{B}v^2 - q\mathbf{B} \,.\, \mathbf{v}\mathbf{v}\,;$$

z toho zavedením $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}/v$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{v}}{qv^2} + \frac{\mathbf{B} \,.\, \mathbf{v}\mathbf{v}}{v^2} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{v}^0}{qv} + \mathbf{B} \,.\, v^0\mathbf{v}^0\,. \tag{2}$$

Táto rovnica pre $\mathbf{B}$ zahrňuje doteraz známe definície i s príslušnými doplňujucími podmienkami. Z nej je napr. vidieť, že ak $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, druhý člen na pravej strane vypadne.

Pokus určiť $\mathbf{B}$ z rovnice (2) v tvare

$$\mathbf{B} \,.\, (\mathbf{I} - \mathbf{v}^0\mathbf{v}^0) = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{v}^0}{qv}\,, \tag{3}$$

resp. v tvare

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{v}^0}{qv} \,.\, (\mathbf{I} - \mathbf{v}^0\mathbf{v}^0)^{-1}\,, \tag{3a}$$

kde $\mathbf{I}$ je tenzor identity, nevedie k výsledku, lebo determinant tenzora v okruhlých zátvorkach rovnice (3) je nulový, neexistuje teda k nemu tenzor reciproký zavedený v rovnici (3a). Táto okolnosť má svoju fyzikálnu príčinu v tom, že z jednej dvojice odpovedajúcich si vektorov nemožno určiť $\boldsymbol{B}$, ako to vyplýva i z rov. (2), ktorej druhý člen na pravej strane nahradzuje doplňujúce predpoklady doterajších definícií.

Úplne možno určiť magnetickú indukciu použitím rovnice (2) pre dve rôzne odpovedajúce si dvojice vektorov $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{v}$

$$\frac{\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{v}_1^0}{qv_1} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v}_1^0 \boldsymbol{v}_1^0 = \frac{\boldsymbol{F}_2 \times \boldsymbol{v}_2^0}{qv_2} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v}_2^0 \boldsymbol{v}_2^0 = \boldsymbol{B}\,, \tag{4}$$

resp.

$$\frac{\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{v}_1^0}{qv_1} + k\boldsymbol{v}_1^0 = \frac{\boldsymbol{F}_2 \times \boldsymbol{v}_2^0}{qv_2} + l\boldsymbol{v}_2^0 = \boldsymbol{B}\,, \tag{4a}$$

kde symboly k a l v rovnici (4a) odpovedajú príslušným výrazom v rovnici (4). Za účelom určenia k i l budeme upravovať rovnicu (4a), a to násobením sprava skalárne vektormi $\boldsymbol{v}_1^0$ a $\boldsymbol{v}_2^0$, čo dáva

$$0 + k = \frac{(\boldsymbol{F}_2 \times \boldsymbol{v}_2^0) \cdot \boldsymbol{v}_1^0}{qv_2} + l\boldsymbol{v}_2^0 \cdot \boldsymbol{v}_1^0 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v}_1^0 \tag{5}$$

$$\frac{(\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{v}_1^0) \cdot \boldsymbol{v}_2^0}{qv_1} + k\boldsymbol{v}_1^0 \cdot \boldsymbol{v}_2^0 = 0 + l = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v}_2^0\,. \tag{5a}$$

Z rovníc (5) a (5a) dostaneme symetrické výrazy pre k a l

$$k = \left(\frac{[\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{v}_2^0\boldsymbol{v}_1^0]}{qv_2} + \frac{[\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{v}_1^0\boldsymbol{v}_2^0]}{qv_1}\,\boldsymbol{v}_1^0 \cdot \boldsymbol{v}_2^0\right)\frac{1}{1 - (\boldsymbol{v}_1^0 \cdot \boldsymbol{v}_2^0)^2} \tag{6}$$

$$l = \left(\frac{[\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{v}_1^0\boldsymbol{v}_2^0]}{qv_1} + \frac{[\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{v}_2^0\boldsymbol{v}_1^0]}{qv_2}\,\boldsymbol{v}_1^0 \cdot \boldsymbol{v}_2^0\right)\frac{1}{1 - (\boldsymbol{v}_1^0\boldsymbol{v}_2^0)^2}\,, \tag{6a}$$

kde výrazy v lomených zátvorkách sú príslušné smiešané súčiny. Dosadením rovníc (6) a (6a) do rovnice (4a) dostaneme dva rovnocenné výrazy — symetrické vzhľadom k indexom 1 a 2 — pre vektor magnetickej indukcie

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{v}_1^0}{qv_1} + \left(\frac{[\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{v}_2^0\boldsymbol{v}_1^0]}{qv_2} + \frac{[\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{v}_1^0\boldsymbol{v}_2^0]}{qv_1}\,\boldsymbol{v}_1^0 \cdot \boldsymbol{v}_2^0\right)\frac{\boldsymbol{v}_1^0}{1 - (\boldsymbol{v}_1^0 \cdot \boldsymbol{v}_2^0)^2}\,, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{F}_2 \times \boldsymbol{v}_2^0}{qv_2} + \left(\frac{[\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{v}_1^0\boldsymbol{v}_2^0]}{qv_1} + \frac{[\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{v}_2^0\boldsymbol{v}_1^0]}{qv_2}\,\boldsymbol{v}_1^0 \cdot \boldsymbol{v}_2^0\right)\frac{\boldsymbol{v}_2^0}{1 - (\boldsymbol{v}_1^0 \cdot \boldsymbol{v}_2^0)^2}\,. \tag{7a}$$

Tak rovnice (7) a (7a) s minimálnym počtom údajov úplne určujú vektor magnetickej indukcie v obecnom prípade, t. j. bez akýchkoľvek doplňujúcich predpokladov o vzájomnom smere $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}_1^0$, $\boldsymbol{v}_2^0$ ovšem za trivialného predpokladu že $\boldsymbol{v}_1^0 \neq \boldsymbol{v}_2^0$.