Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ludmila Frantíková

Učebnice „Mathematikwerk für Gymnasien“

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 3, 153--158

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138042`

UČEBNICE „MATHEMATIKWERK FÜR GYMNASIEN"

LUDMILA FRANTÍKOVÁ, Prešov

Učebnice této série jsou dílem širokého autorského kolektivu a byly vydány nakladatelstvím Schwann v Düsseldorfu. K dispozici jsem měla svazky 4 až 7 a svazek *Analysis I*. Svazky 4, 5, 6, 7 jsou střídavě věnovány algebře a geometrii a jsou určeny pro žáky 14—19leté; to odpovídá naší 9. třídě ZDŠ a třídám gymnasia. Učebnice *Analysis I* je určena pro studenty 19—20leté, tedy pravděpodobně pro jakýsi druh nástavby po osmi třídách gymnasia.

Učebnice nejsou závazné pro všechny školy v NSR, protože střední školy v tomto státě nemají jednotné osnovy (vedle škol státních, jejichž učební plány jsou různé v jednotlivých spolkových zemích, existuje řada škol soukromých a církevních). Určitě je však tato série učebnic jednou z nejnovějších nejen datem vydání, ale i svou koncepcí.

OBSAH UČEBNIC

Nemohu podrobně rozebírat všech pět svazků, proto nebudu komentovat partie, které se v podstatě shodují s koncepcí našich učebních plánů a učebnic. Upozorním jen na ty úseky, jejichž pojetí je odlišné od našeho nebo které jsou zajímavé svým zpracováním. Nejprve však uvedu názvy kapitol citovaných učebnic, aby se čtenář lépe orientoval v hodnocení jejich náplně.

Čtvrtý svazek má podtitul *Algebra I*, má rozsah 229 stran rozdělených do devíti kapitol: 1. Opakování a rozšíření teorie množin. 2. Základní pojmy teorie rovnic a nerovnic. 3. Uspořádané těleso racionálních čísel. 4. O důkazech. 5. Algebraické výrazy a jejich úpravy. 6. Řešení rovnic a nerovnic. 7. Dělení. Operace, rovnice a nerovnice s lomenými algebraickými výrazy. 8. Rovnice a nerovnice s parametry. Slovní úlohy. 9. Relace a funkce.

Pátý svazek má podtitul *Geometrie I*, rozsah 225 stran je rozdělen do sedmi kapitol: 1. Opakování a prohloubení základních geometrických pojmů. 2. Posunutí. 3. Otočení. Středová souměrnost. 4. Osová souměrnost. 5. Skládání shodných zobrazení.

6. Použití vět o shodnosti k důkazům a konstrukcím. Pojednání o čtyřúhelnících na základě vět o shodnosti. 7. Plošný obsah a elace.*)

Šestý svazek – *Algebra II* má 210 stran rozdělených do šesti kapitol: 1. Systémy lineárních rovnic a nerovnic se dvěma neznámými. 2. Uspořádané těleso reálných čísel. 3. Relace a funkce. Inverzní funkce. 4. Druhé mocniny a odmocniny. Kvadratické funkce a relace. Kvadratická rovnice a nerovnice. 5. Mocniny s přirozenými, celočíselnými a racionálními exponenty. Exponenciální funkce. 6. Logaritmická funkce.

Sedmý svazek – *Geometrie II* – má rozsah 181 stran a pět kapitol: 1. Věty Eukleidovy a Pythagorova. Věta o průmětech. 2. Věty o svazcích přímek proťatých soustavou rovnoběžek. Rovnoběžné a středové promítání roviny na jinou rovinu. 3. Grupa podobných zobrazení. 4. Kruh. Pravidelné tětivové a tečnové mnohoúhelníky. Obvod a obsah kruhu. 5. Tělesa a jejich objem.

Analýza I má osm kapitol na 322 stranách. 1. Doplňky k logice. 2. Doplňky k teorii čísel a k teorii funkcí. 3. Číselné posloupnosti. Konvergence, limita, hromadné body. 4. Aritmetické a geometrické posloupnosti a řady. 5. Limita a spojitost funkcí. 6. Úvod do počtu diferenciálního. 7. Úvod do počtu integrálního. 8. Metoda důkazu v matematice.

V dalším textu budou tyto svazky v odkazech označovány *Alg I*, *Geom I*, *Alg II*, *Geom II*, *An I*, značka *Alg I, 12* bude znamenat 12. kapitolu učebnice *Algebra I* apod.

Zařazení základů logiky

Matematické logice je věnováno několik kapitol. V *Alg I,2* se zavádí pojem výroku a výrokové formy, pravdivostní hodnota výroku, obor proměnné a obor pravdivosti výrokových forem, obecný a existenční výrok aj. Z logických operací se uvádějí konjunkce a disjunkce a ukazuje se, s kterými množinovými operacemi souvisejí. Tato problematika se znovu objevuje v *An I,1–3*, kde se uvádějí tabulky pravdivostních hodnot, obecný a existenční kvantifikátor, negují se obecné a existenční výroky. Terminologie i symbolika se v mnoha směrech liší od obvyklého způsobu vyjadřování, užívá se např. termínů subjunkce a bijunkce pro označení těch operací s výrokovými formami, které odpovídají implikaci a ekvivalenci. Poznatků z logiky se již v *Alg I* bohatě využívá při řešení rovnic a nerovnic.

Ve srovnání s jinými koncepcemi se formální logika v plném rozsahu zavádí poměrně pozdě. Ve švýcarských učebnicích Calamových a Suterových, ve francouzských učebnicích série „Alef nula“, ba i v našich *Komentářích* je formální logika zařazena mnohem dříve.

*) Jde o osovou afinitu, jejíž směr splývá se směrem osy. Elace patří mezi tzv. unimodulární afinity, jejichž invariantem je obsah rovinného útvaru. V německém originále se elace nazývá Scherung.

Poněkud nejasný je výklad pojmu výrok. Podle definice výroku uvedené v učebnici *Alg I,2* by nebyly výrokem věty, o jejichž pravdivostní hodnotě je možné rozhodnout až v budoucnosti. Obecný výrok je definován tak, jako by mohl být pouze pravdivý, ačkoliv dále se hovoří i o jeho negaci a nepravdivosti.

K této problematice patří i pojednání o deduktivní výstavbě matematiky. Kapitola *Alg I,12* nás seznamuje s primitivními pojmy a větami — axiómy, s tvarem matematických vět a se základními způsoby důkazů matematických vět. V kapitole *An I,2* je uveden princip důkazu matematickou indukcí, který se odvozuje z věty teorie množin, že každá neprázdná podmnožina množiny všech přirozených čísel má nejmenší prvek. V poznámce se říká, že je možné tuto větu pokládat za axióm.

Velmi pěkně je ukázáno na příkladech, k jakým chybám vede vynechání jedné části důkazu matematickou indukcí. Eulerův mnohočlen $n^2 - n + 41$, který nabývá pro $n < 41$ prvočíselných hodnot, ale pro $n = 41$ je jeho hodnota číslem složeným, varuje před unáhleným zobecněním a vynecháním kroku od $V(n)$ k $V(n + 1)$. Ale také vynecháním prvního kroku, tj. ověření pravdivosti $V(n)$ pro nejmenší uvažovanou hodnotu n, může dojít k chybě. Neuděláme-li tento krok, můžeme např. „dokázat", že pro každé $n \in N$ je číslo $2n$ liché. Je-li totiž $2n$ liché, a přejdeme-li od $V(n)$ k $V(n + 1)$, dostaneme $2(n + 1) = 2n + 2$. Přičteme-li však číslo dvě k lichému číslu, dostaneme opět liché číslo.

Kapitola *An I,8* se vrací k metodám důkazů matematických vět, zavádí pravidla dedukce, velmi soustavně a pečlivě probírá přímý důkaz i nejdůležitější druhy nepřímého důkazu a každý ilustruje příkladem.

Množiny, binární relace, operace a algebraické struktury

Pojem množina je žákům znám již z nižších ročníků, v kapitole *Alg I,1* se opakuje a současně se zavádějí základní množinové pojmy a operace. Kartézský součin se definuje jen pro dvě množiny. Speciální číselné množiny mají své stabilní označení: **Na** množina všech přirozených čísel, **Ga** množina všech celých čísel, $\mathbf{Ra}^{\neq 0}$ množina všech nenulových racionálních čísel, $\mathbf{Ra}^{>0}$ množina všech kladných racionálních čísel a podobně. Množiny bodů se pomocí označení neodlišují od množin přímek, jako je tomu například v učebnicích Calamových. Pojmu množina se důsledně používá ve všech učebnicích, o nichž hovoříme; v *An I* se neurčitý integrál funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ definuje jako jistá množina M všech funkcí $F(x)$, které jsou diferencovatelné v intervalu $\langle a, b\rangle$, zapisuje se $M = \{F; F'(x) = f(x)\}$.

Binární relace se soustavně zavádějí poměrně velmi pozdě, ačkoliv se např. o uspořádání mluví už v předcházejících kapitolách, a to v *Alg I,9*, kde binární relace tvoří základ pro pojem funkce. Binární relace se definuje jako množina uspořádaných dvojic a teprve později se ukáže, že je to podmnožina kartézského součinu dvou množin. V *Geom I* se uvádí shodnost geometrických útvarů jako relace ekvivalence, v *Alg II,10* se znovu uvádějí relace, které jsou funkcemi, stejně jako v *An I,5*. Zde se navíc definuje relace R* inverzní k relaci R, která vznikne z relace R záměnou členů ve všech uspořádaných dvojicích, přičemž je nutné provést i záměnu obou základních množin. Tuto definici pokládám za mnohem srozumitelnější než definici v našich komentářích.

Ani operace a jejich vlastnosti se neprobírají obecně a souvisle, ale na několika místech při různých příležitostech. Například aritmetické operace, modulová aritmetika, sčítání vektorů, skládání shodných, resp. podobných zobrazení. Operací se rozumí jen binární operace, ale nedefinuje se na základě ternární relace. Používá se pojmu neutrální prvek, inverzní prvek, ale nezavádí se pojem absorbující prvek vzhledem k dané operaci. V *Alg I,4* se jako příklad nepřímého důkazu uvádí důkaz unicity neutrálního prvku. V podstatě se zavádí z operací jen to, co je nutné k definicím algebraických struktur.

Algebraické struktury se poprvé objevují v *Alg I,3,* kde se nejprve uvádí několik množin s tzv. vnitřní operací, např. množina zbytkových tříd s modulovou aritmetikou, množina všech vektorů v rovině a jejich sčítání. Dále se vyslovují axiómy grupy, pologrupy, okruhů a tělesa; jen zběžně se uvádí několik příkladů těchto struktur. Hlavním obsahem celé kapitoly jsou racionální čísla. Zavádějí se pomocí izomorfismu s aditivní grupou kolineárních vektorů v rovině, definuje se neutrální prvek a inverzní prvky vzhledem ke sčítání, dále se definují operace s racionálními čísly a jejich vlastnosti. Celá kapitola končí vyvozením věty, že množina všech racionálních čísel je uspořádané těleso. Axiómy grupy jsou znovu uvedeny v *Alg I,4,* kde s větami z nich odvozenými slouží jako ukázka výstavby deduktivní teorie. Podobně se postupuje v *Alg II* v případě uspořádaného tělesa reálných čísel. V *Geom I,5* jsou uvedeny příklady množin shodných zobrazení, které tvoří, resp. netvoří, grupu vzhledem ke skládání zobrazení. V *Geom II,5* se totéž probírá pro množiny podobných zobrazení.

Izomorfismus grup se neprobírá jako samostatné téma, ale případ od případu; jeden byl uveden u čísel racionálních, jako další příklad dvojice izomorfních grup se v *Alg I,5* studuje multiplikativní grupa celočíselných mocnin daného reálného čísla a aditivní grupa celých čísel, dále grupa všech vektorů v rovině vzhledem ke sčítání vektorů a grupa všech posunutí v rovině vzhledem ke skládání zobrazení.

Pojem reálného čísla se vykládá poměrně náročným způsobem. V *Alg II,2* je definována posloupnost do sebe vnořených intervalů racionálních čísel jako množina intervalů, kterou lze uspořádat inkluzí, přičemž v této množině existuje interval, jehož délka je menší než libovolně zvolené kladné racionální číslo. Vyslovuje se věta, že každá taková posloupnost má nejvýš jedno vnitřní číslo, tj. číslo, které je obsaženo ve všech jejích intervalech. Dále se ukazuje, že toto vnitřní číslo nemusí být racionální. Dvě posloupnosti do sebe vnořených intervalů racionálních čísel se nazývají ekvivalentní, jestliže mají stejné vnitřní číslo. Reálná čísla se zavádějí jako třídy této ekvivalence v množině všech posloupností do sebe vnořených intervalů racionálních čísel.

Bude vhodné zmínit se o definicích, které se v učebnicích vyslovují. Nedá se říci, že by se autoři báli nových pojmů. Není sice vždy přesně zřejmé, s kterými pojmy se už žáci setkali a které jsou pro ně skutečně nové, ale v *Alg I* je zhruba 100 a v *Alg II* okolo 50 nových pojmů. V *Geom I*, kde jsou definice číslovány a vyznačeny barevným podložením, je jich 83, ve svazku *Geom II* je 40 a v *An I* je 96 definic. Definice jsou velmi přesně formulovány, takže umožňují přesnou klasifikaci pojmů. Například rovnoramenný trojúhelník je definován jako trojúhelník, který má aspoň dvě strany stejně dlouhé; není tedy pochyby, že každý trojúhelník rovnostranný je také trojúhelníkem rovnoramenným.

Mnohdy se přísně rozlišují pojmy, které spolu velmi úzce souvisejí; například *gleiche Strecken* (totožné úsečky), *kongruente Strecken* (shodné úsečky), *masgleiche Strecken* (úsečky o stejné velikosti). Obdobně se rozlišuje úhel a velikost úhlu; dále ještě úhel jako dvojice polopřímek se společným počátkem a úhel jako část roviny. Různé termíny jsou zavedeny pro kolmice – kolmice sestrojená k přímce bodem, který na ní leží, se nazývá *die Senkrechte*, zatímco kolmice procházející daným bodem, který na přímce neleží, je nazvána *das Lot*. Naproti tomu se příliš přesně nepoužívá termínů kruh – *der Kreis* – a kružnice – *die Kreislinie*.

I počet vět je ve všech svazcích vysoký. V některých svazcích jsou věty barevně podloženy – někdy i jinou barvou než definice – a číslovány. V *Geom I* je 336 vět, i když některé z nich jsou triviální, v *Geom II* je 122 a v *An I* 146 vět. Autoři se snaží věty nejen dokazovat, ale také učit žáky dokazování, jak bude patrno z rozboru cvičení.

Symbolika se zavádí postupně a důsledně se jí používá. Jen některé symboly, jako na příklad kvantifikátory, se zavádějí dost pozdě.

Věty uvedené v textu jsou dokazovány všude tam, kde jsou k tomu vybudované prostředky. Někdy je jedna věta dokazována několika způsoby, například Euklidova věta se dokazuje pomocí elace, z elace a otočení a na základě podobnosti. Věta Pythagorova je odvozena pomocí elace a odvěsnové věty Euklidovy, dále i použitím dvou shodných čtverců, do nichž jsou dvěma různými způsoby umístěny čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky (tak se Pythagorova věta dokazuje na naší ZDŠ).

Text učebnice je prokládán jednak motivačními a ilustračními příklady a k jednotlivým paragrafům jsou připojována cvičení. Počet těchto cvičení je velmi vysoký, v některých paragrafech, kde převládá procvičování výpočtů nebo mechanické aplikace látky, dosahuje i několika set. To se týká hlavně *Algebry I*, kde je například uvedeno přes 600 cvičení na operace s algebraickými výrazy, přes 300 cvičení na řešení rovnic. V *Algebře II* se to týká paragrafů, které obsahují systémy lineárních rovnic a nerovnic, dále paragrafů o logaritmování a použití logaritmického pravítka. Stovky cvičení následují po paragrafech o mocninách a odmocninách. Rovněž v *An I* jsou desítky příkladů na důkazy matematickou indukcí, na výpočty pomocí vzorců pro aritmetickou a geometrickou posloupnost a konečně opět velký počet příkladů na výpočet derivací a integrálů. V obou svazcích geometrie je velmi mnoho cvičení na zvýšení zručnosti v rýsování.

V učebnicích převládají cvičení, která nejsou náročná na logické myšlení; kromě nich jsou však zařazena i cvičení, která žáky nutí porovnávat jednotlivé partie učiva podle toho, co je v nich společného a čím se liší. V *Geom I* mají např. porovnat definice a vlastnosti jednotlivých shodných zobrazení. Uvádějí se tu axiomaticky „minigeometrie“ a žáci mají ukázat, že jisté modely (i s nematematickými prvky) jsou jejich správnými interpretacemi. Jiná cvičení velmi účinně zdůrazňují rozdíly mezi pojmy „aspoň jeden“, „právě jeden“ a „nejvýš jeden“.

Dobrá jsou cvičení na sestavování rovnic, které jsou ekvivalentní s danou rovnicí, a na sestavování soustav lineárních rovnic, které nemají řešení nebo mají nekonečně mnoho řešení. Cenná jsou i cvičení vyžadující vymezení oborů proměnných tak, aby inverzní relace k dané funkci byla rovněž funkcí.

Důkazových úloh je poměrně málo, obvykle se žádá, aby žák provedl důkazy obdobné s důkazy v textu. Někdy jde o důkazy vět obecnějších, jindy o důkazy speciálních případů vět, např. důkazy některých vlastností grup jsou zjednodušeny tím, že se předpokládá komutativní grupa.

V *Geom II* se ve cvičeních požadují důkazy vzorců pro objemy některých těles, například pravidelného tetraedru a oktaedru, komolého jehlanu a komolého kužele, dutého válce a kulového prstence (tělesa, které vznikne z koule vyjmutím souosého rotačního válce a příslušných kulových úsečí).

Slovním úlohám je věnován jen jeden paragraf v textu *Alg I,8*, k němuž je připojeno 51 slovních úloh ve cvičeních. Jde o úlohy těch typů, které známe z našich tradičních učebnic.

Text je ve všech svazcích vhodně doplňován historickými poznámkami. Žáci jsou stručně seznamováni s jmény matematiků, která se váží k některým partiím učiva, i s historickými problémy, jako je například výpočet čísla π.

Vnější úprava učebnic má vysokou úroveň po všech stránkách. V textu je jen nepatrný počet tiskových chyb, většinou nezávažných. Jen zanedbatelná část z velkého počtu dvoubarevných obrázků není zcela přesně natištěna.

ZÁVĚR

Nevím, kolik hodin je určeno matematice v učebním plánu tam, kde se těchto učebnic používá. Jejich značný rozsah by byl neúměrný našemu počtu hodin věnovaných matematice. Velký počet cvičení však nelze odsuzovat, učebnice plní i roli sbírek úloh. Nepředpokládám, že by každý žák vyřešil všechny příklady, ale ten, kdo počítat chce, si má z čeho vybrat. Dále je jisté, že má-li se učivo obsažené v učebnicích probrat, vyžaduje to nejen vybrané studenty, ale i vysoce kvalitní učitele.

Mohu konstatovat, že jde o učebnice, které mají ucelenou koncepci učiva, vyznačují se promyšlenou strukturací látky a snaží se o splnění požadavků kladených na moderní učebnice středoškolské matematiky.