

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Herbert J. Bernstein; Anthony V. Phillips
Fibrované variety a kvantová teorie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 28 (1983), No. 3, 121--147

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137906>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1983

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Fibrované variety a kvantová teorie

Herbert J. Bernstein a Anthony V. Phillips

Odvětví matematiky, které rozšiřuje pojem křivosti na topologické analogie Möbiova pásu, může pomoci při výkladu současných teorií interakcí elementárních částic.

Těsný vztah mezi matematikou a fyzikou se může laikovi zdát překvapivý, ale pro člověka důvěrně seznámeného s některým z obou oborů jde o přirozený jev. Fyzikální problémy stimulovaly matematické myšlení již od doby, kdy Egypťané zavedli geometrii jako prostředek přesného zeměměřičství. Newtonův vynález integrálního počtu byl vlastně jeho reakcí na problémy při formulaci zákonů obecné gravitace. Nekonečné trigonometrické řady byly zavedeny při studiu proudění tepla. Abstraktní schémata budovaná současnými matematikou jsou stále založena, byť i jen vzdáleně, na reálných situacích ve fyzikově vesmíru.

Matematika neopomněla tento dluh splatit. Matematická teorie, vymyšlená při řešení matematických problémů, se často ukazuje být právě tím, co fyzikové potřebují při analýzách fyzikálních jevů. Tenzorový počet, výsledek téměř sta let práce takových matematiků jako Karl Fridrich Gauss, Bernhard Riemann a Tullio Levi-Civita, byl nezbytný pro Einsteinovu formulaci obecné teorie relativity. V současné době z obdobného matematického výzkumu těží fyzikové, kteří studují síly a kvantově mechanická pole zprostředkovávající interakce elementárních částic.

Pole, která jsou k tomuto účelu nejslibnější, se nazývají kalibrační pole. Jejich užitečnost tkví především v tom, že umožňují vyjádřit vztahy mezi silami, které se zdají být při povrchním pohledu zcela odlišné. Kalibrační pole hrají důležitou roli v dnešních snahách vybudovat jednotnou teorii tří ze čtyř základních sil v přírodě: silných, slabých a elektromagnetických. V případě čtvrté základní síly, gravitace, neexistuje dosud její kvantová formulace, ale obecná teorie relativity naznačuje, že nakonec i gravitaci bude snad možné popsat kalibrační teorií. Myšlenka kalibračního pole byla zavedena Hermannem Wylem ve 20. letech tohoto století, ale dnešní směr jejího vývoje začíná až v r. 1954, kdy C. N. Yang a R. L. Mills (kteří tehdy pracovali v brookhavenské národní laboratoři) aplikovali pojem kalibračního pole na jaderné síly. Po téměř 20 letech dal-

HERBERT J. BERNSTEIN AND ANTHONY V. PHILLIPS: *Fiber Bundles and Quantum Theory*. Scientific American, Vol. 245, Number 1 (July 1981)

Reprinted with permission. Copyright © 1981 by Scientific American, Inc. All rights reserved.

ššího zdokonalování byli fyzikové schopni vyjádřit pojem kalibračního pole takovým způsobem, že v něm bylo možné rozpoznat příklad mnohem abstraktnějších struktur, matematikům známých jako konexe na fibrovaných varietách. Objev této ekvivalence umožnil aplikovat zralé a nesmírně mocné matematické pojmy na popis fyzikální reality.

Co je to kalibrační pole? Co jsou to fibrované variety a jak vstupují do fyziky? Co to znamená, že na fibrované varietě existuje konexe a jaký je vztah mezi konexí a kalibračním polem? Pokusíme se na tyto otázky odpovědět analýzou dvou fyzikálních experimentů. Jeden experiment ukazuje, co se stane, když je neutron působením magnetického pole otočen o 360° , a ve druhém jde o vliv magnetického pole na dva elektronové svazky v případě, že pole je pouze v prostoru mezi nimi. Každý z experimentů demonstruje jiným způsobem, jak se fibrované variety do kvantové teorie dostávají. V experimentu s rotací neutronu je důležitá globální struktura fibrované variety, zatímco v experimentu s elektronovými svazky hraje ústřední roli konexe, lokální struktura, kterou lze na fibrované varietě zavést. Tato konexe je elementárním, ale základním příkladem kalibračního pole.

Studium fibrovaných variet je součástí matematického odvětví zvaného topologie, ale fibry jsou také předmětem zájmu diferenciální geometrie, a to v důsledku jejich vztahů ke geometrickému pojmu křivosti. Myšlenka konexe na fibrované varietě vznikla při snahách zobecnit pojem křivosti dvourozměrného prostoru, jako je např. povrch Země, na křivost prostoru tří nebo více rozměrů. Jiný způsob, jak vyjádřit matematický rozdíl mezi zmíněnými dvěma experimenty, které v dalším popíšeme, vychází z toho, že experiment s rotací neutronu se týká topologie fibrované variety, zatímco experiment s elektronovými svazky její geometrie.

Experiment s rotací neutronu o 360° byl navržen jedním z nás (Bernsteinem) v r. 1967. Podobný myšlenkový experiment byl téměř současně popsán také Yakirem Aharonovem a Leonardem Susskindem z univerzity Yeshiva. Tyto experimenty ilustrují efekty stojící v příkrém protikladu s intuicí a jejichž matematickým ekvivalentem je jednostrannost Möbiova pásu. Základním pojmem v nich je spin, vnitřní moment hybnosti subatomových částic. Podle kvantové mechaniky se neutron nebo jiná částice se spinem při rotaci spinu o 360° nevrátí do svého počátečního stavu. Je zapotřebí dvou plných rotací, tj. rotace o 720° , aby se částice vrátila do počátečního stavu.

K pochopení tohoto experimentu je potřeba vědět něco o kvantové teorii spinu. Fyzikové rozšířili pojem vnitřního momentu hybnosti káči nebo gyroskopu do světa elementárních částic. Ve všech případech je spin vektorovou veličinou, což znamená, že má velikost a směr. Podle konvence směřuje vektor spinu podél osy spinu ve směru určeném pravidlem pravé ruky. Jestliže prsty pravé ruky jsou sevřeny tak, jakoby chtěly osu spinu uchopit a prsty směřují ve směru rotace, je směr vektoru spinu dán směrem, který ukazuje palec.

Na rozdíl od spinu káči nebo gyroskopu je spin elementárních částic kvantován: jeho velikost může nabývat pouze určitých diskrétních hodnot, které jsou násobky nejmenší možné hodnoty spinu. Velikost spinu jakékoliv částice se nikdy nemění, neboť jde o vnitřní vlastnost, která určuje totožnost částice. Elektron, proton a neutron (a řada dalších částic) jsou nositeli nejmenší dovolené nenulové hodnoty spinu. Tato minimální hodnota je rovna $\hbar/2$, kde \hbar je Planckova konstanta rovná zhruba 10^{-27} ergsec.

Omezení velikosti spinu v kvantové teorii odráží ještě jedno pozoruhodné experimentální zjištění. Jako ostatní vektory má i spin své složky podél os v libovolném souřadném systému. Experimentátor musí vždy vybrat určitou osu, podél níž chce složku spinu měřit. Bez ohledu na to, jaký směr zvolí jako referenční osu, jediné hodnoty, které vždy naměří, jsou $+\hbar/2$ a $-\hbar/2$. Žádné intermediální hodnoty nepozoruje. I přes tuto neintuitivní vlastnost spinu částic, zůstává představa vektoru spinu užitečná pro popis neutronu. Je možné polarizovat neutrony tak, že spiny všech směřují ve stejném směru. Experimentátor může tento směr určit nastavením osy svého měřicího přístroje tak, aby byla maximalizována pravděpodobnost detekce hodnoty $+\hbar/2$. Jsou-li všechny neutrony ve stejném stavu, dají všechny tento výsledek. Dohodneme se, že referenční osu, podél níž jsou neutrony polarizovány, označíme z a dva možné stavy spinu nazveme spin nahoru ($+\hbar/2$) a spin dolů ($-\hbar/2$).

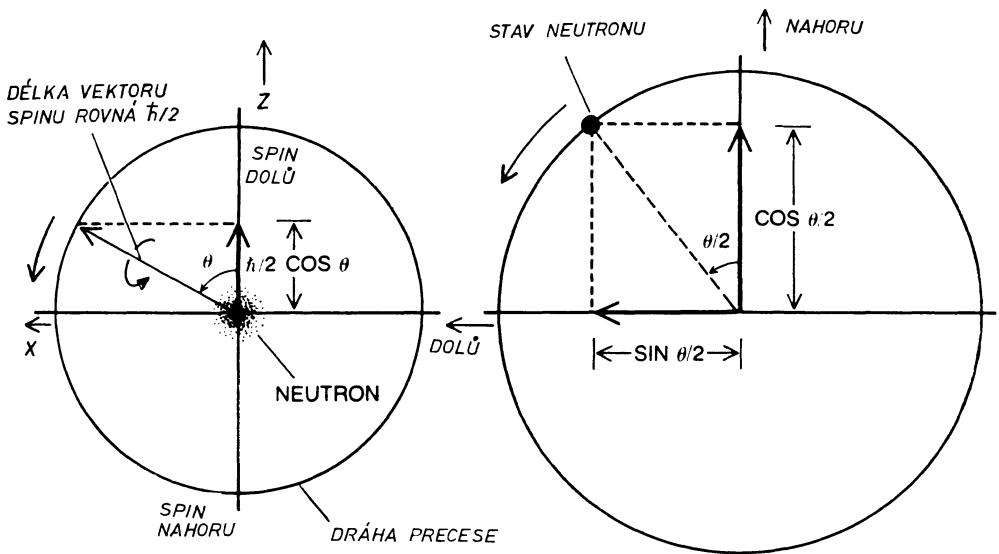
*

Představme si, že vektory spinu všech neutronů jsou otočeny vzhledem k pevné referenční ose. Složka spinu podél osy z se nemůže měnit spojitě, protože měření dává vždy jen dvě diskrétní hodnoty $+\hbar/2$ a $-\hbar/2$. Co se začne měnit, jsou pravděpodobnosti nalezení neutronu se spinem nahoru a se spinem dolů. V počátečním stavu byla pravděpodobnost nalezení neutronu se spinem nahoru 1 a pravděpodobnost spinu dolů 0. Po otočení vektoru spinu o 90° od osy z , klasický (tj. nekvantově mechanický) model předpovídá, že složka spinu podél osy z bude nulová. Vektor spinu bude orientován tak, že nesměřuje ani nahoru ani dolů podél osy z . Pro neutrony ovšem projekce spinu rovná nule není možná. Podle kvantově mechanického modelu změny rotace spinu o 90° původní stav neutronu na takový, v němž pravděpodobnosti nalezení neutronu se spinem nahoru a dolu jsou obě rovny $1/2$.

Tento výsledek smiřuje kvantování spinu s jeho klasickým popisem. Měříme-li složky spinu jednotlivých neutronů, jejichž vektory spinů jsou kolmé na osu z , podél osy z , dostaneme v polovině případů spin $+\hbar/2$ a v polovině $-\hbar/2$. Součet, a tedy také střední hodnota všech změřených složek je 0, v soulase s klasickým výsledkem. Podobným způsobem převede rotace o 180° neutron do stavu se spinem dolů. Tzn., že pravděpodobnost nalezení spinu nahoru je 0 a spinu dolů je 1. Po dokončení celé rotace je pravděpodobnost spinu nahoru (tj. pravděpodobnost, že složka spinu podél osy z je $+\hbar/2$) opět 1 a pravděpodobnost spinu dolů 0. Fyzikové považují různost spinových stavů a potřebu pojmu pravděpodobnosti za základní postuláty kvantové teorie. Pravděpodobnosti se počítají z vlnových funkcí, které představují matematický popis stavů každé částice. Pro každý bod prostoru existuje číslo, zvané amplituda pravděpodobnosti daného stavu neutronu. Název amplituda souvisí s vlnami, pomocí nichž kvantová mechanika částice popisuje. Skutečnost, že amplituda pravděpodobnosti může být kladná anebo záporná, odráží schopnost vln skládat se konstruktivně nebo destruktivně. Pravděpodobnost nalezení částice v daném stavu je určena čtvercem odpovídající amplitudy pravděpodobnosti. Čtverec amplitudy zajišťuje, že pravděpodobnost sama je vždy kladné číslo.

Poněvadž neutron existuje ve dvou různých spinových stavech, je úplný popis neutronu v daném prostorovém bodě dán dvěma čísly: amplitudami pravděpodobnosti pro spin nahoru a spin dolů. Jeden způsob, jak tyto dvě amplitudy znázornit, je vynést je na dvě vzájemně kolmé osy označené „nahoru“ a „dolů“ v abstraktním prostoru neutronových stavů (viz obr. 1). Stav neutronu lze znázornit bodem na tomto obrázku. Je-li počáteční stav neutronu se spinem nahoru, znamená to, že amplituda pravděpodobnosti spinu nahoru je 1 a amplituda pravděpodobnosti spinu dolů 0. Této kombinaci hodnot odpovídá bod vzdálený o jednotku od počátku ve směru osy „nahoru“.

Při změně orientace spinu neutronu se každá z amplitud pravděpodobnosti spojitě mění. Součet obou pravděpodobností přitom ovšem zůstává stále roven 1, protože spin nahoru a spin dolů jsou jediné možné stavy neutronu. Součet čtverců amplitud pravděpodobnosti pro spin nahoru a spin dolů musí proto být 1 a odpovídající bod, reprezentující stav neutronu, musí ležet na kružnici s poloměrem 1. Každý přípustný stav lze potom označit úhlem měřeným od osy „nahoru“ k tomuto bodu. Tento úhel se nazývá zobecněná fáze neutronového stavu.



Obr. 1. Vektor spinu neutronu může vykonávat precesi, ale tuto precesi nelze geometricky znázornit klasickým způsobem (vlevo), neboť měření spinu podél dané osy dá vždy jen hodnoty $\pm \hbar/2$ nebo $-\hbar/2$. V kvantové mechanice se precese projevuje jako změna pravděpodobností nalézt neutron se spinem $+\hbar/2$ (nahoru) a $-\hbar/2$ (dolů). Příslušné amplitudy pravděpodobnosti lze považovat za souřadnice v abstraktním prostoru, jehož osy jsou označeny „nahoru“ a „dolů“ (vpravo). Po precesi o 90° od osy z nesměruje vektor spinu ani nahoru ani dolů. Měříme-li nyní složku vektoru spinu podél osy z zjistíme, že v polovině případů směřuje spin nahoru a v polovině dolů. Střední hodnota spinu podél osy z je tedy 0, v soulase s klasickým výsledkem. Protože pravděpodobnosti jsou stejné, lze odpovídající amplitudy pravděpodobnosti vybrat tak, že i ony si jsou rovné. Odpovídající bod v prostoru spinových stavů neutronů je vzdálen o úhel 45° od osy spinu nahoru. Fyzikální precese o úhel θ vyvolá změnu zobecněné fáze o úhel $\theta/2$, kterou lze znázornit jako rotaci v prostoru spinových stavů neutronu.

Po rotaci vektoru spinu o 90° od osy z , musí být absolutní hodnoty amplitud pravděpodobnosti pro spin nahoru a spin dolů stejné, neboť obě odpovídají pravděpodobnosti $1/2$. Bod prostoru neutronových stavů leží proto uprostřed mezi osami „nahoru“ a „dolů“. Z toho plyne, že v důsledku rotace vektoru spinu neutronu o 90° se zobecněná fáze neutronu změnila o 45° .

Po rotaci o 180° směřuje vektor spinu neutronu dolů. Tzn., že amplituda pravděpodobnosti spinu dolů je 1 a amplituda pravděpodobnosti spinu nahoru 0. Odpovídající bod v prostoru neutronových stavů leží ve směru otočeném o 90° od směru osy z . Po rotaci o 360° obě amplitudy pravděpodobnosti změní znaménko. Je třeba dvou plných rotací, tj. rotace o 720° , aby obě amplitudy pravděpodobnosti nabyly svých počátečních hodnot.

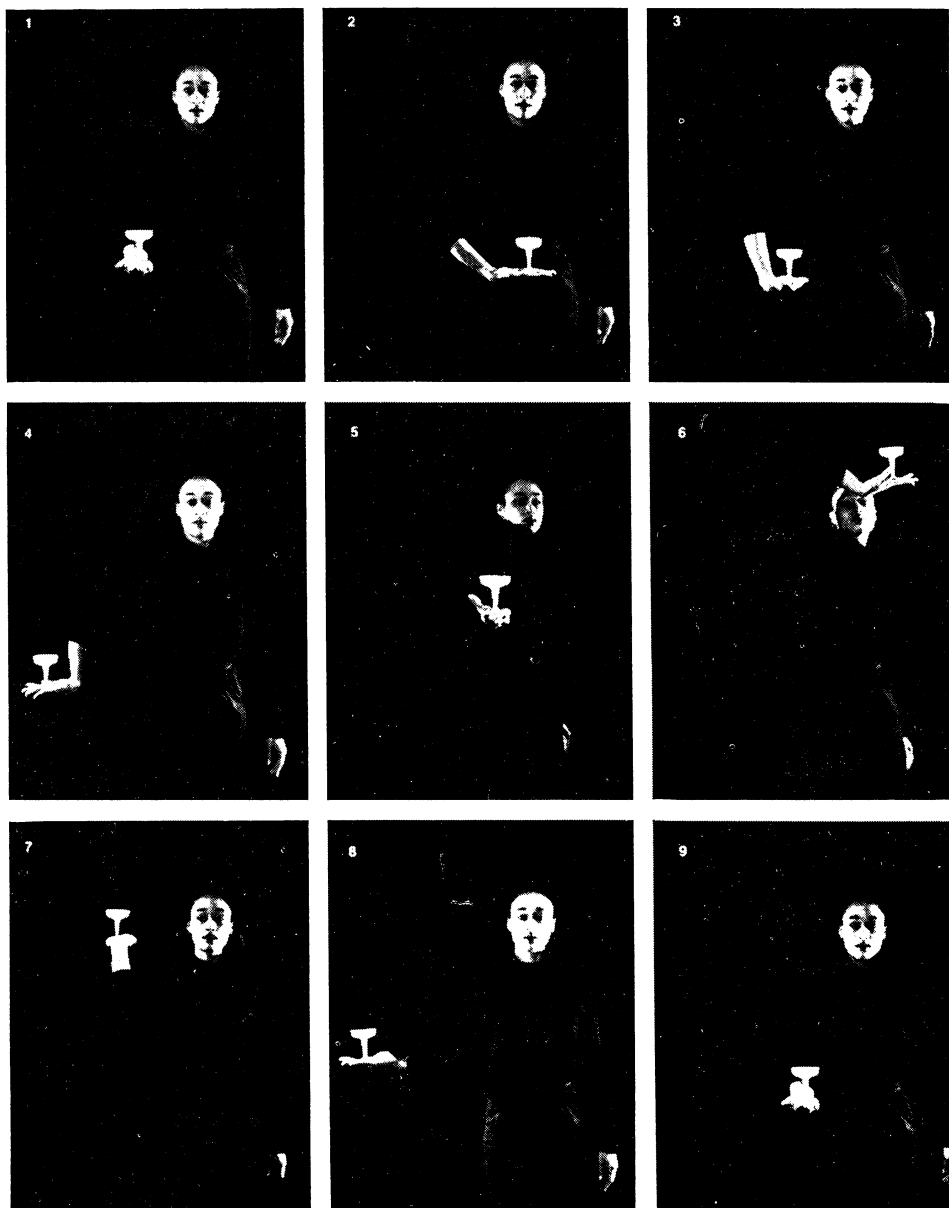
Tento rys kvantové teorie se může zdát na první pohled paradoxní. Obvyčně se objekt po úplné rotaci v prostoru navrátí do stavu, z něhož vyšel. Tělo člověka nebo gyroskop se nezmění při rotaci o 360° kolem libovolné osy. Tato skutečnost je všeobecnou zkušeností tak hluboce zakořeněnou, že ačkoliv teorie spinu neutronu je nyní již nějakých 50 let stará, do r. 1967 se i většina fyziků domnívala, že rotace o 360° nemůže mít žádné pozorovatelné důsledky. Z kvantové teorie plyne, že amplitudy pravděpodobnosti nelze měřit přímo. Změna znaménka amplitudy způsobená takovou rotací se neprojeví, když při výpočtu pravděpodobnosti amplitudu umocníme na druhou.

*

Na druhé straně i ve světě makroskopických objektů existují určité okolnosti, za nichž rotace o 360° pozorovatelné důsledky má. Mějme např. dva objekty spojené pružnou stuhou. Je zřejmé, že úplná rotace jednoho objektu nevede na systém v jeho počátečním stavu, neboť stuha se přitom zkroutí. Co již není tak očividné je to, že další plná rotace, a to ve stejném směru, může takový systém uvést do počátečního stavu: stuha může být rozkroucena, i když relativní natočení obou objektů zůstane nezměněno.*) Tento efekt lze demonstrovat také tak, že v dlani ruky držíme skleničku vína a otáčíme ji okolo její vertikální osy, aniž přitom pohybujeme tělem jako celkem. Po rotaci o 360° se sklenka vrátí do své počáteční orientace, ale ruka je zkroucena. Další rotace o 360° uvede sklenku i ruku do jejich původních poloh (viz obr. 2).

Všechny tyto jevy, makroskopické i kvantově mechanické, lze znázornit pomocí vlastností jedné fibrované variety. Fibrovaná varieta je matematická struktura, která se skládá z dvou různých množin bodů, zvaných báze B a totální prostor E , a pravidla p , tzv. projekčního zobrazení, které každému bodu $z E$ přiřadí bod $z B$. V případě rotace sklenky vína reprezentují body báze různé možné orientace ruky se sklenkou. Body

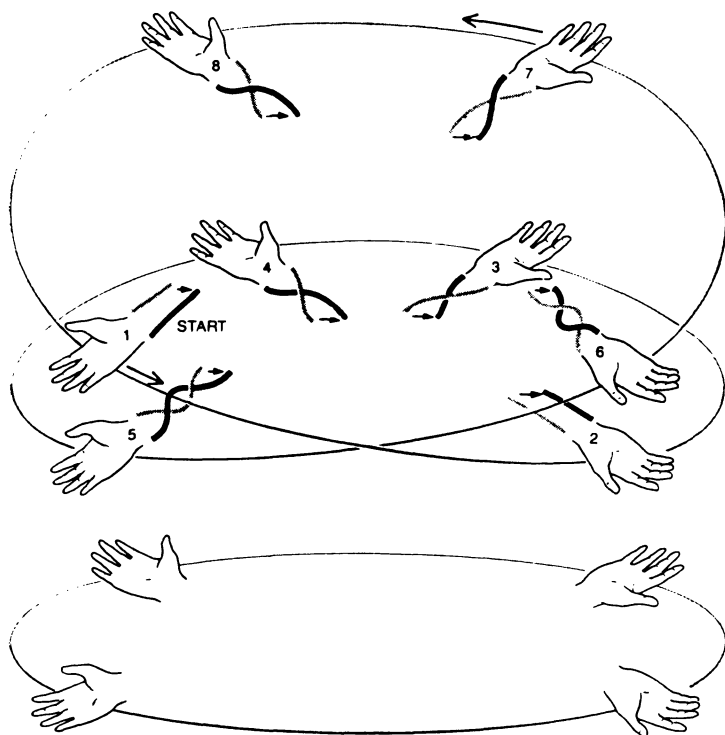
*) Možná realizace experimentu: Na vnitřní okraj kolečka s otvorem zavěsíme pomocí stuhy tužku. Otočíme-li kolečkem doprava o 360° a tužka zůstává nehybná, stuha se překroučí. Nyní tužku ve vísle poloze zvedneme a prostrčíme otvorem v kolečku, takže kolečko je zavěšeno na tužce. Po otočíme-li kolečkem znovu o 360° doprava a tužku prostrčíme otvorem zpět, dostane se celý systém do výchozí polohy. Při pozorování v kolmé projekci se ovšem kolečko otočilo o 720° a tužka zůstala nehybná. (Poznámka redakce PMFA)



Obr. 2. Fibrované variety umožňují vyjádřit přesnou matematickou analogii mezi pohyby při filipinském lidovém tanci Binasuan (tanec s vínem) a kvantově mechanickým vlivem magnetického pole na spin neutronu. Při tanci s vínem není možné ztotožnit orientaci sklenky vína při rotaci kolem její vertikální osy s relativní orientací sklenky a těla tanečnice. Jsou-li chodidla tanečnice pevně na místě, způsobí jedna rotace ruky se sklenkou vína zkroucení těla tanečnice. Další rotace ruky o 360° ve stejném směru, uvede ruku i tělo tanečnice do původního stavu. Změna zobecněné fáze neutronu v magnetickém poli má stejný vztah k orientaci rotujícího vektoru jeho spinu.

totálního prostoru představují rotaci ruky vzhledem ke zbytku těla. Projekční zobrazení definuje přiřazení mezi každou rotací a relativní orientací touto rotací určenou.

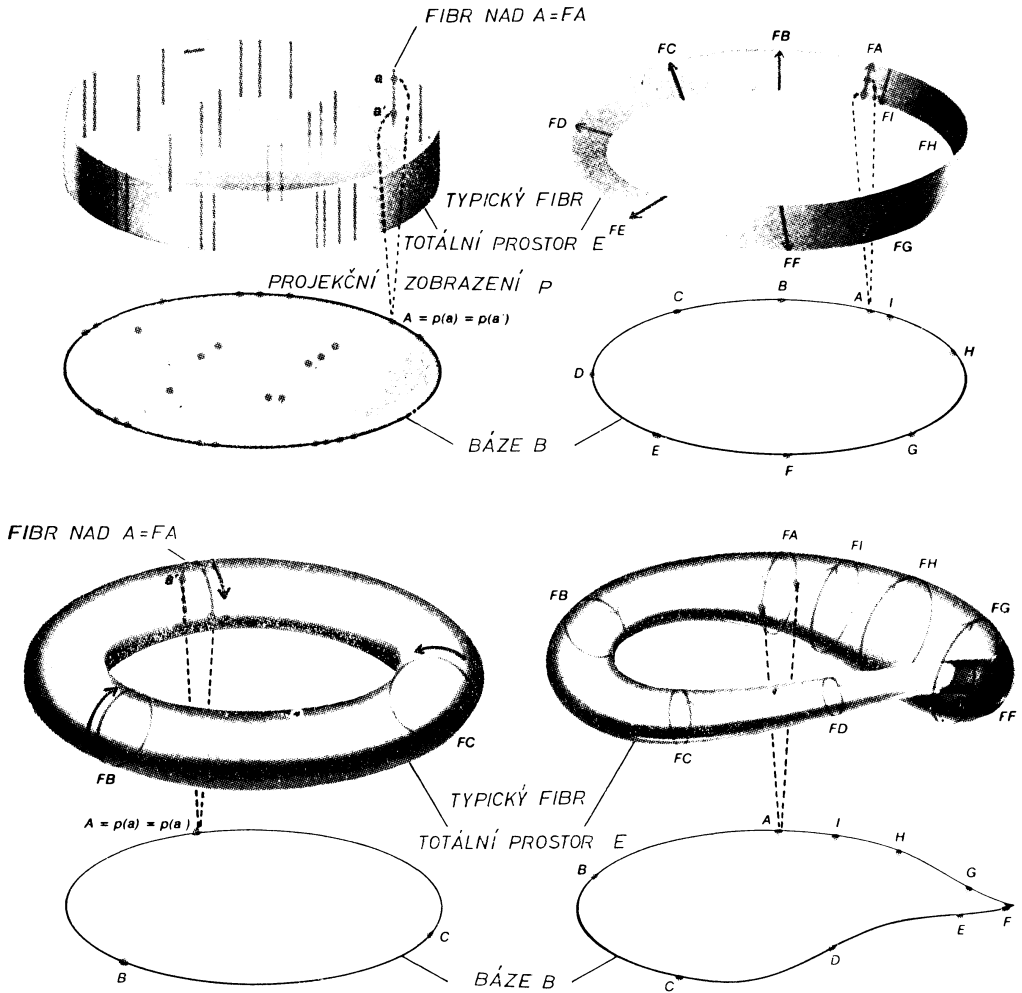
V případě rotace spinu neutronu reprezentují body báze orientaci vektoru spinu. V situaci, kterou podrobně popisujeme, rotuje vektor spinu v dané rovině, a tedy jeho orientaci lze popsat úhlem odklonu od osy z (jiné možnosti lze vyšetřovat analogicky). Body v totálním prostoru odpovídají zobecněným fázím neutronového stavu a jsou znázorněny body na jednotkové kružnici v prostoru neutronových stavů, jehož souřadnice jsou „nahoru“ a „dolů“. Každý z těchto bodů lze popsat úhlovou vzdáleností od osy „nahoru“. Projekční zobrazení zde přiřazuje každému bodu totálního prostoru bod v bázi, a to podle pravidla $p(\Phi) = 2\Phi$ (modulo 360°). Aplikace tohoto pravidla odpovídá ovinutí kružnice zobecněných fází $2 \times$ kolem kružnice orientací vektoru spinu, což znamená, že pro každou takovou orientaci jsou možné 2 fáze: Φ a $\Phi + 180^\circ$.



Obr. 3. Fibrovaná varieta dvojího prokrytí představuje množinu vzájemných rotací ruky tanečnice a zbytku jejího těla (obr. 2). Šipky označují pevnou orientaci chodidel tanečnice. Kružnice v dolní části obrázku představuje orientace ruky. Pohyb kolem této kružnice vyvolává pohyb podél jednoho ze segmentů zkroucené kružnice na horní části obrázku. Topologie horní křivky ukazuje, že rotace o 90° proti směru hodinových ručiček je ekvivalentní rotaci o 630° ve směru hodinových ručiček.

Vztah mezi body v totálním prostoru a bázi je obecně vyjádřen tvrzením, že totální prostor je „nad“ bází. Představujeme si totiž, že ty body totálního prostoru, kterým projekční zobrazení přiřadí též bod báze, leží vertikálně nad tímto bodem. Množina bodů totálního prostoru ležící nad daným bodem báze se nazývá fibr. Při definici fibru se dále vyžaduje, aby fibry nad libovolnými dvěma body báze byly topologicky ekvivalentní, tj. aby se topologická struktura fibru neměnila při přechodu od jednoho bodu báze k druhému. V některých případech tvoří fibr nad každým bodem báze přímku.

Zde je původ názvu fibrovaná varieta (anglický originál fiber bundle = svazek vláken je v české matematické terminologii překládán jako fibrovaná varieta, pozn. překl.), neboť je-li každý fibr přímkou, vypadá totální prostor jako svazek vláken. Protože fibry

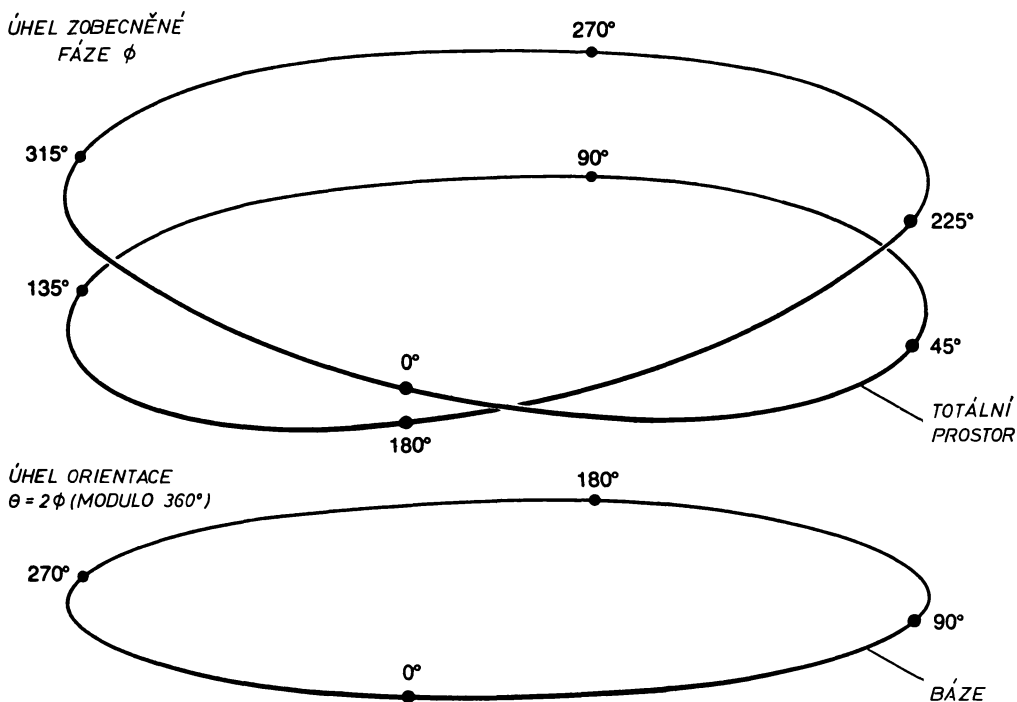


Obr. 4. Fibrovaná varieta se skládá z báze, totálního prostoru a zobrazení, které promítá každý bod totálního prostoru do bodu báze. Množina všech bodů totálního prostoru, které jsou promítnuty do jednoho bodu báze se nazývá fibr. Totální prostor proto připomíná svazek vláken. Každý fibr ve fibrované varietě musí mít stejnou topologickou strukturu, a proto lze všechny fibry reprezentovat jedním typickým fibrem. Jde-li o plně válce (vlevo nahoře) nebo Möbiův pás (vpravo nahoře), jsou fibry tvořeny přímkami nad body báze, zatímco u prstence (vlevo dole) nebo Kleinovy láhve (vpravo dole) jsou fibry odpovídající každému bodu báze kružnice. Pohyb v bázi může vyvolat změnu orientace vláken, která závisí na topologické struktuře totálního prostoru. Jeden oběh podél dráhy v bázi změní orientaci vláken u Kleinovy láhve a Möbiůva pásu, ale nikoliv u válce a prstence. V případě Kleinovy láhve se zdá, že při pohybu od vláken k vláken prochází láhev sama sebou. Tomuto jevu se nelze u třídimenzionálního obrázku vyhnout.

nad všemi body báze jsou topologicky ekvivalentní, lze je popsat jako kopie jednoho, tzv. typického fibr F . Typický fibr v případě rotace spinu neutronu je prostor skládající se z dvou různých bodů. Např. nad bodem báze označeným 0° jsou dva body totálního prostoru, které odpovídají zobecněným fázím 0° a 180° . Fibr nad 0° je tedy množina skládající se z rotace o 0° a 180° v totálním prostoru. Podobně fibr nad 90° je množina skládající se z rotací o 45° a 225° . V této varietě je báze i totální prostor topologicky ekvivalentní kružnici. Projekční zobrazení připomíná dřívější obrázek, ve kterém se hrana Möbiova pásu promítá na kružnici.

*

Jak je v modelu rotace spinu neutronu pomocí fibrované variety znázorněn vztah mezi rotací v prostoru a zobecněnými fázovými posunutími? Představme si, že neutron začíná ve stavu, v němž vektor spinu směřuje podél kladné osy z ($\Theta = 0^\circ$), a tedy amplitudy pravděpodobnosti spinu nahoru a dolů jsou 1 a 0. Tomuto stavu (viz obr. 5) odpovídá bod $\varphi = 0^\circ$ na jednotkové kružnici v abstraktním prostoru spinových stavů neutronu. Naše předcházející diskuse ukazuje, že jestliže nyní spin neutronu otočíme



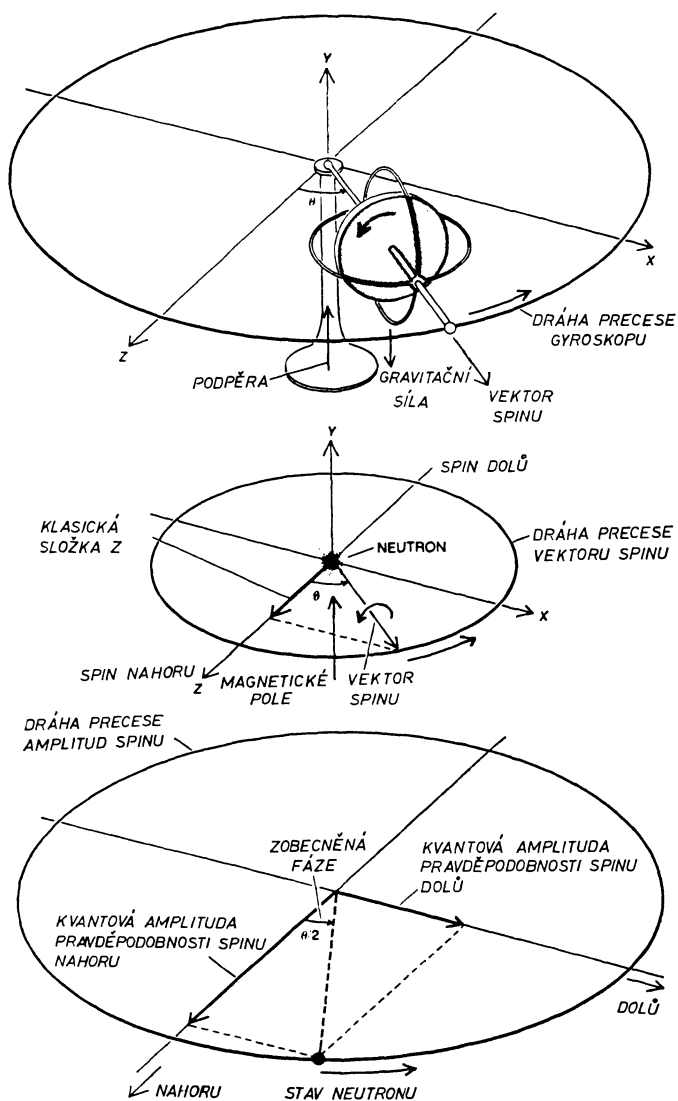
Obr. 5. Fibrovaná varieta fázových posunutí ukazuje vztah mezi úhlovou precesí spinu neutronu a posunutím jeho zobecněné fáze. Body báze reprezentují orientace vektoru spinu neutronu. Body totálního prostoru představují relativní fázová posunutí v prostoru neutronových stavů, která odpovídají dané orientaci jeho spinu. Projekční zobrazení na této varietě přiřazuje např. bodům totálního prostoru označeným 45° a 225° bod báze 90° , tzn., že obě fáze 45° i 225° odpovídají téže orientaci vektoru spinu označené 90° (zhledem k ose z). Topologie totálního prostoru však ukazuje, že fázové posunutí 225° vyžaduje precesi o 450° , tj. o jednu a čtvrt otáčky.

o 90° , tj. nabude hodnoty $\Theta = 90^\circ$, změní se zobecněná fáze na $\varphi = 45^\circ$. Jestliže vektor spinu otočíme o dalších 90° až na $\Theta = 180^\circ$, posune se bod na kružnici fází do bodu $\varphi = 90^\circ$. Vztah mezi rotacemi v prostoru a posunutými zobecněnými fází lze popsat tak, že bod na kružnici fází se pohybuje spojitě takovým způsobem, že zůstává vždy nad bodem kružnice orientací spinu v prostoru. Tento geometrický princip spolu s topologickou strukturou fibrované variety vysvětluje změnu znaménka stavu neutronu po rotaci o 360° jako efekt obrácení fáze. Jedna úplná rotace v bázi posune zobecněnou fázi do opačné hodnoty, než byla původní. (Obr. 5.)

Jak lze otočit vektor spinu o 360° ? Dnešní experimenty využívají magnetických vlastností elektricky neutrálních částic. Neutron nemá pouze spin, ale také magnetický moment, který činí neutron podobným tyčovému magnetu rotujícímu kolem osy sever—jih. Předpokládejme, že v počátečním stavu směřuje vektor spinu neutronu ve směru osy z a zapojme nyní magnetické pole kolmé k této ose. Torze, kterou působí vnější magnetické pole na tyčový magnet, způsobí, že rotující magnet začne vykonávat pohyb kolem směru magnetického pole. Vektor spinu neutronu vykonává precesní pohyb v rovině kolmé k magnetickému poli, podobně jako to činí rotující gyroskop v gravitačním poli. Pro otočení spinu neutronu lze tedy využít jeho magnetického momentu. Ve skutečnosti, i když magnetické pole není kolmé k původnímu směru spinu, vykonává neutron precesní pohyb s frekvencí, která je úměrná intenzitě magnetického pole a která nezávisí na původní orientaci spinu neutronu. Všechny neutrony nepolarizovaného svazku procházejícího magnetickým polem tedy vykonávají precesní pohyb se stejnou frekvencí, která se nazývá Larmorova frekvence.

Otočit spin neutronu o 360° však nestačí. Je nutné mít možnost srovnat amplitudy pravděpodobnosti pro otočený neutron s amplitudami pravděpodobnosti, které odpovídají původnímu stavu. Amplitudy pro tyto dva stavy mají stejnou velikost, ale opačné znaménko. Tento rozdíl v znaménku lze detegovat, neboť v kvantové mechanice je možné, aby částice dospěla do jednoho bodu prostoru po dvou různých drahách (v tom smyslu, že existuje nenulová pravděpodobnost detekce částice podél obou těchto drah). Jako vždy jsou v každém bodě obou drah dány pravděpodobnosti jako čtverce amplitud pravděpodobnosti. V bodě, kde obě dráhy přispívají k pravděpodobnosti detekce částice, je amplituda pravděpodobnosti rovna součtu amplitud pravděpodobnosti od jednotlivých drah. Sečtení amplitud předchází při výpočtu pravděpodobnosti umocnění. Toto pravidlo, které v sobě zahrnuje jev kvantové interference, umožňuje změřit změnu znaménka spojenou s rotací o 360° . Nedávný vývoj neutronového interferometru umožnil rozštěpit svazek neutronů tak, že částice sledují dvě dráhy a přitom tyto svazky lze později opět rekombinovat. Navíc lze otočit vektor spinu neutronu pouze v jednom svazku. Je-li relativní rotace svazku 360° , projeví se výsledná změna znaménka jako destruktivní interference.

Experimenty s cílem detegovat rotaci spinu neutronu o 360° byly provedeny několika skupinami. Helmut Rauch, Ulrich Bonse a jejich kolegové předvedli tento efekt poprvé v roce 1976 v ústavu Laue-Langevin v Grenoblu. Zhruba ve stejnou dobu vykonal podobný experiment tým amerických vědců vedený Samuelem Wernerem z univerzity Missouri. V roce 1976 pak Anthony Klein a G. I. Opat z univerzity Melbourne využili

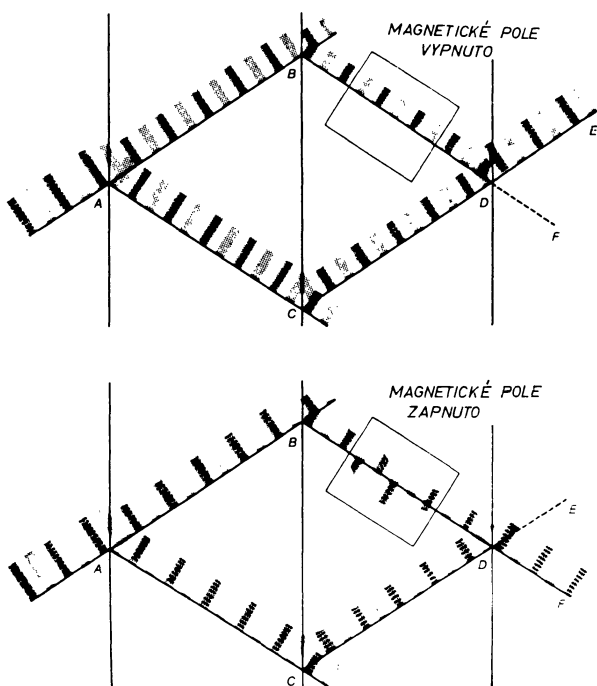
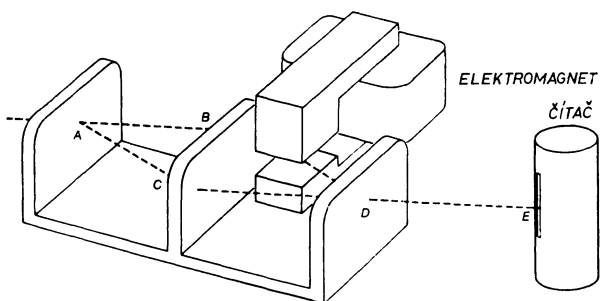


Obr. 6. Precese vektoru spinu neutronu v magnetickém poli připomíná precеси gyroskopu v gravitačním poli. Magnetická torze působící na spin neutronu způsobuje precеси, jejíž frekvence je úměrná intenzitě magnetického pole a nezávislá na orientaci spinu neutronu. Je-li počáteční směr vektoru spinu neutronu „nahoru“ a magnetické pole je k němu kolmé, bude vektor spinu po precеси o úhel 180° směřovat dolů. Při intermediálních úhlech je podle klasické fyziky složka vektoru spinu měřená podél osy z rovna projekci vektoru spinu na tuto osu. V kvantové mechanice může složka spinu podél libovolné osy nabývat pouze dvou hodnot: $+1/2$ (v jednotkách Planckovy konstanty \hbar) nebo $-1/2$. Při precеси se mění pravděpodobnosti detegovat neutron ve stavu se spinem nahoru ($+\hbar/2$) nebo dolů ($-\hbar/2$). Každá z těchto pravděpodobností je dána čtvercem amplitudy pravděpodobnosti, jež nabývat kladných i záporných hodnot. Kvantově mechanickou precেসi spinu neutronu lze graficky znázornit jako rotaci stavu neutronu v abstraktním prostoru, jehož souřadnicemi jsou amplitudy pravděpodobnosti nalézt neutron se spinem nahoru nebo dolů.

— opět v ústavu Laue-Langevin — k demonstraci efektu rotace spinu neutronu nové metody Fresnelovy difrakce.

*

Jádrem typického neutronového interferometru je perfektní válcový krystal křemíku, rozříznutý tak, že z neporušené báze vystupují tři vyleštěná „ucha“ (viz obr. 7). Svazek neutronů se při nárazu na první ucho rozdělí na procházející a lomený svazek. Na druhém uchu se opět každý ze svazků rozdělí a na třetím uchu oba částečné svazky rekombinují.



Obr. 7. Neutronový interferometr vyříznutý z jednoho perfektního krystalu křemíku má 3 proječní „ucha“. Každé ucho rozděluje svazek neutronů na dva částečné svazky: procházející a lomený. V tomto experimentu prochází jeden ze svazků magnetickým polem, které otáčí vektor spinu neutronu, a tím způsobuje změnu zobecněné fáze neutronového stavu. Rekombinované svazky spolu interferují v závislosti na jejich relativním fázovém rozdílu. Je-li magnetické pole nulové, žádný fázový rozdíl nevzniká a svazky interferují konstruktivně. Jestliže magnetické pole otočí vektor spinu neutronu jednoho svazku o 360° , vznikne fázový rozdíl 180° a svazky interferují v čítači E destruktivně. Maxima neutronových vln odpovídají pruhům černým a minima šedým. Amplitudy pravděpodobnosti spinových stavů jsou znázorněny relativními délkami pruhů. Protože neutron na obrázku je v počátečním stavu se spinem nahoru, je amplituda pravděpodobnosti spinu dolů nenulová jen v oblasti magnetického pole. Záporné amplitudy pravděpodobnosti jsou znázorněny tím, že maxima se změní na minima a obrátí. Rozptýlení neutronů na jednotlivých uších nevyvolává v procházejícím svazku žádné fázové posunutí, zatímco u lomeného svazku vede k fázovému posunutí o 90° (tj. vynechání jednoho pruhu).

Rekombinace je konstruktivní nebo destruktivní v závislosti na jejich zobecněných fázích. Rekombinovaný svazek se pak opět dělí na dva částečné svazky a čítače nebo detektory umístěné za třetím uchem zaznamenávají počet neutronů v každém z nich.

Pravděpodobnost, že neutron vletí do detektoru, který stojí v cestě rekombinovanému

svazku, se mění se změnou zobecněné fáze rotovaného svazku. Měří se počet neutronů dopadajících do detektoru za 1 sekundu. Jsou-li oba částečné svazky, v případě, že k rotaci spinu nedochází, přesně ve fázi, je počet detegovaných neutronů vysoký. Je to důsledek konstruktivní interference, tj. skutečnosti, že obě amplitudy mají stejnou fázi a čtverec jejich součtu nabývá své maximální hodnoty. Obecně, kdykoliv je rozdíl fází 0° nebo násobek 360° dochází ke konstruktivní interferenci. Po jedné rotaci vektoru spinu neutronu o 360° nabývá rozdíl fází hodnoty 180° a amplitudy mají proto opačná znaménka. V ideálním případě by byl jejich součet rovný 0. V praxi dosahuje počet detegovaných neutronů svého minima, které je pak projevem destruktivní interference.

Rotace spinu neutronu se provádí pomocí elektromagnetů umístěných v prostoru mezi druhým a třetím uchem. Jeden z částečných svazků prochází polem tohoto magnetu, zatímco druhý nikoliv. Magnetické pole tedy rotuje spin neutronů z jednoho svazku. Úhel otočení je přitom úměrný intenzitě magnetického pole. V důsledku toho roste zobecněná fáze svazku procházejícího magnetickým polem spojitě od 0 až do svého maxima v závislosti na tom, jak experimentátor mění proud procházející elektromagnetem. Jak se fázové posunutí zvětšuje, klesá počet detegovaných částic a interference se mění od konstruktivní k destruktivní. Po dosažení minima se počet neutronů opět zvyšuje až zpět na svou maximální hodnotu, která odpovídá rotaci zobecněné fáze o 360° . Výsledný cykl změn počtu detegovaných neutronů se opakuje, pokud proud magnetem roste. Protože úhel rotace spinu neutronu nezávisí na jeho počáteční orientaci, nevyžaduje experiment polarizovaný svazek neutronů.

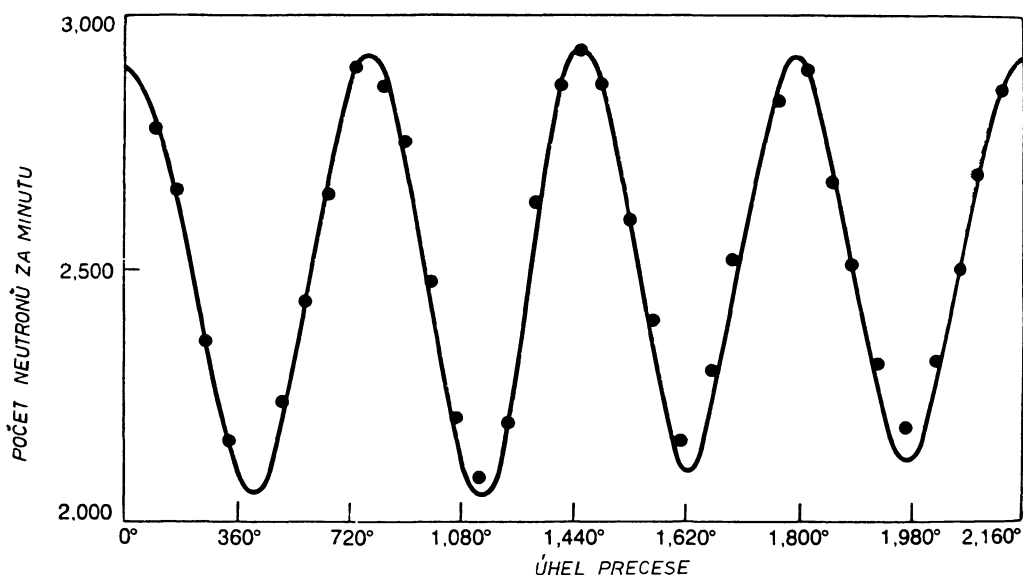
*

Úhel, o nějž se otočí vektor spinu neutronu v magnetickém poli, je rovný Larmorově precesní frekvenci násobené časem, který neutron v tomto poli stráví. Lze ho tedy vypočítat ze změřené rychlosti svazku, intenzity pole a vzdálenosti, kterou svazek v poli proběhne. V experimentu Raucha, Bonseho a jejich kolegů urazily neutrony v magnetickém poli dráhu 1,5 cm rychlostí 2 170 m/s, takže každý neutron strávil v poli o něco méně než 7 mikrosekund. Při maximálním proudu elektromagnetem byla intenzita magnetického pole 433 gaussů, což odpovídá Larmorově prevenci 433 miliónů stupňů za sekundu. Za zmíněných 7 mikrosekund vykoná spin každého neutronu zhruba 8 plných otáček. Jestliže by každá rotace o 360° uvedla neutron do jeho počátečního stavu, očekávali bychom 8 cyklů maximálních a minimálních počtů detegovaných neutronů. Skutečný výsledek je podstatně jiný. Jak se intenzita magnetického pole zvětšuje od nuly ke své maximální hodnotě, prochází počet detegovaných neutronů pouze 4 cykly.

Výsledek pokusu s rotací spinu neutronu ukazuje, že fibrované variety v kvantové mechanice existují a lze je pozorovat. Fibrovaná varieta spojená s rotací spinu neutronu je ovšem mimořádně jednoduchá, protože její báze i totální prostor jsou jednorozměrné. (Připomeňme, že jak báze, tak totální prostor jsou kružnice, přičemž totální prostor je dvakrát překroucen jako hrana Möbiova pásu.) Vztah mezi rotací a fázovým posunutím je dán pravidlem, že bod v totálním prostoru leží vždy nad bodem báze. Protože totální prostor má pouze 1 stupeň volnosti, specifikuje toto pravidlo jednoznačně fázové posunutí pro každou rotaci.

V obecnější fibrované varietě není situace tak jednoduchá. Je-li např. fibr tvořen celou přímkou, vyvolává pohyb v bázi přechod mezi fibry, ale nespecifikuje, který bod fibru má být přeřazen. Jednoznačnému určení dráhy v totálním prostoru takové fibrované variety je zapotřebí dodatečné struktury. Procedura, která určuje dráhu v totálním prostoru ležícím přímo nad dráhou v bázi za předpokladu, že je dán počáteční bod dráhy v totálním prostoru, se nazývá zdvih dráhy.

Studium fibrovaných variet vyrostlo ze snah zjednodušit analýzu pojmu křivosti na varietách, abstraktních topologických prostorech s libovolným počtem rozměrů. Myšlenka fibrované variety byla implicitně obsažena již v práci francouzského matematika Elie Josefa Cartana, ale její první explicitní formulace pochází od Hasslera Whitneye (nyní v Institute for Advanced Studies) z roku 1935. Pojem zdvihu dráhy byl rozvinut jako systematická metoda porovnávání křivosti v různých bodech variety a kolem



Obr. 8. Několik interferenčních cyklů lze vyvolat i slabým magnetickým polem. Úhel celkové precese rotovaného svazku lze vypočítat z intenzity magnetického pole. Na grafu intenzity rekombinovaného svazku v závislosti na úhlu θ připomíná experimentální křivka graf funkce $\cos \theta/2$. Pozadí způsobuje, že v minimech není počet detegovných neutronů přesně 0. Osm úplných rotací svazku dává pouze čtyři maxima intenzity.

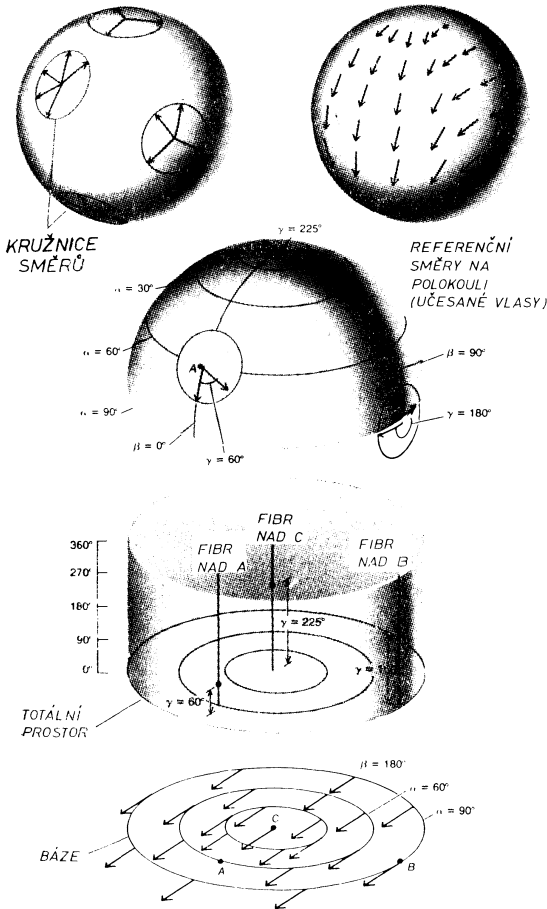
r. 1950 byl francouzskými matematiky Charlesem Ehresmannem a Henri Cartanem rozšířen na fibrované variety.

Představme si nejjednodušší zakřivenou varietu: dvourozměrný povrch koule. Pozorovatel stojící na povrchu má k dispozici celou kružnici směrů, podél nichž se po povrchu koule může dívat (předpokládáme, že pozorovatel se dívá pouze po povrchu a nikoliv nahoru nebo dolů). Takový kruh směrů existuje pro každý bod povrchu. Jejich množina tvoří přirozeným způsobem fibrovanou varietu zvanou varietu směrů na povrchu koule.

Báze této variety je povrch sám. Fibr nad bodem báze představuje množinu všech směrů na povrchu koule, podél nichž se lze z tohoto bodu po povrchu dívat. Každý fibr je tedy kružnice.

*

Není možné nakreslit věrný obraz celého totálního prostoru variety směrů na povrchu koule. Jeden z důvodů, proč takový obraz nakreslit nelze, spočívá v tom, že je topologicky nemožné přiřadit spojitým způsobem referenční směr všem bodům na povrchu



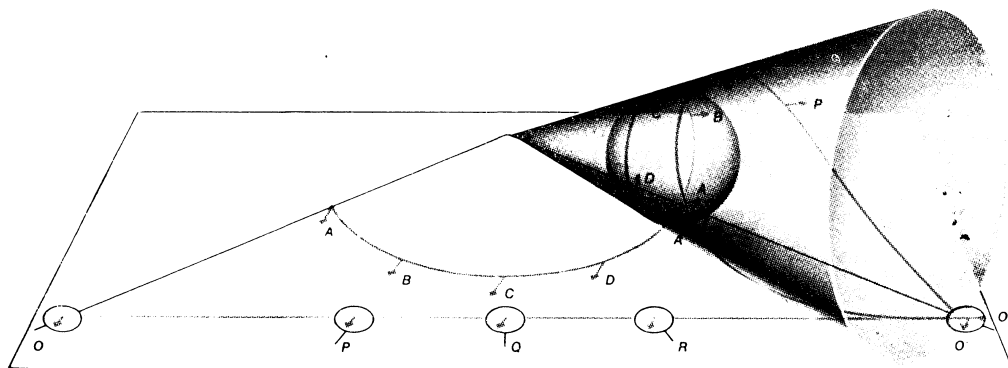
Obr. 9. Varieta směrů na povrchu koule je důležitým příkladem fibrované variety. V každém bodě na kouli existuje kružnice směrů, podél nichž se lze dívat po povrchu. Abychom mohli těmto směrům přiřadit úhly, je třeba nejdříve v každém bodě definovat referenční směr. Kdyby bylo možné přiřadit referenční směr všem bodům spojitě, bylo by na kouli možné „učesat vlasy“. To však není možné, neboť na kouli musí vždy existovat místo kde vlasy připomínají „olíznutí krávou“. Vlasy lze na kouli učesat v libovolné oblasti, která není celým povrchem. Tak např. na rovině mapě severní polokoule specifikuje popis „vlevo dolů“ v každém bodě určitý směr a tak definuje spojitou množinu referenčních směrů na polokouli. O fibrované varietě směrů na polokouli si lze udělat obrázek, vezmeme-li za bázi její rovinnou mapu. Každý směr v určitém bodě polokoule je znázorněn bodem na vertikální úsečce nad odpovídajícím bodem báze. Výška nad bodem báze je určena úhlem, který příslušný směr svírá s referenčním směrem. Výšky 0° a 360° odpovídají stejnému směru. Totální prostor variety je válec a spodní a horní bod každého fibru jsou totožné. I když šipky, které definují referenční směry v rovině mapě, jsou rovnoběžné, nepředstavují jejich protějšky na polokouli paralelní přenos.

koule. Tato skutečnost je vyjádřena rčením „vlasy na kouli nelze učesat“. Nejméně v jednom bodě na kouli vlasy nutně připomínají stav po „olíznutí krávou“. Na druhé straně lze učesat část povrchu koule, v krajním případě celý povrch koule s vynecháním jednoho bodu. Na takové části povrchu již každému bodu referenční směr přiřadit lze, a tedy lze také nakreslit topologicky věrný obrázek totálního prostoru variety směrů. Např. na rovině mapě severní polokoule je možné znázornit spojitou množinu směrů

mířících např. vlevo dolů. Tuto množinu směrů pak lze přenést zpět na severní polokouli a tak „učesat její vlasy“.

Učesání vlasů na polokouli přiřazuje každému jejímu bodu referenční směr. Totální prostor variety směrů na polokouli lze znázornit vertikálními fibry. Odpovídá-li dolní bod každého fibru příslušnému referenčnímu směru, pak úhel, který s ním svírá libovolný jiný směr, lze znázornit výškou odpovídajícího bodu na fibru (obr. 9). Bod v polovině fibru představuje směr svírající s referenčním směrem úhel 180° , zatímco horní bod odpovídá směru 360° . Vzhledem k tomu, že úhel 360° splývá s referenčním směrem, představuje dolní a horní bod každého fibru jeden a tentýž bod totálního prostoru.

Jak definovat zdvih dráhy na varietě směrů na kouli? Dráha v bázi variety směrů je dráha na povrchu koule. Zdvihnout tuto dráhu do totálního prostoru znamená v každém bodě dráhy vybrat jeden směr. Představte si hodinky s jednou ručičkou, jejichž těžiště se pohybuje po dráze na kouli a ručička se přitom volně otáčí kolem číselníku. Při zdvihnutí dráhy je třeba určit polohu ručičky v každém bodě dráhy, je-li dána její výchozí poloha. Uvažujeme-li pouze topologii koule, což znamená, že její povrch lze natahovat a deformovat (ale ne roztrhnout) jako by byl z gumy, neexistuje žádné preferované pravidlo, jak dráhu zdvihnout. Základní důvod spočívá v tom, že neexistuje žádný topologický vztah mezi směry v jednom a v druhém bodě na povrchu koule. Uvažujeme-li ovšem také geometrii koule, existuje přirozený způsob, jak pohyb ručičky definovat. Tento princip se nazývá paralelní přenos. Paralelní přenos lze nejlépe pochopit, představíme-li si kouli, která se valí po rovině. Představme si, že v rovině jsou mokřým inkoustem nakresleny přímky a křivky a že šipky nakreslené podél čar jsou



Obr. 10. Paralelní přenos šipky podél libovolné křivky v rovině se děje tak, že šipky ve všech bodech křivky jsou navzájem rovnoběžné. Abychom rozšířili myšlenku paralelního přenosu podél křivky na obecné ploše, lze si představit křivkou γ lochu valící se po rovině tak, že bod dotyku zůstává stále na zadané křivce (a nedochází ke klouzání nebo rotaci kolem vertikály) a že se na tuto křivkou plochu postupně otiskují navzájem rovnoběžné šipky v rovině. Jestliže se po rovině valí koule, a to podle jedné své rovnoběžky, je výhodné si představit kužel tečný ke kouli podél této rovnoběžky. Necháme-li valit po rovině tento kužel, bude se s ním valit koule podél zvolené rovnoběžky. Křivka, která se na plochu otiskne při jejím valivém pohybu podél přímky v rovině, je geodetika. Geodetika, která se otiskne na kužel s dostatečně malým vrcholovým úhlem, může kužel opsat a sama sebe protnout pod úhlem, jenž se nazývá úhlový defekt a je mírou křivosti povrchu ohraničeného křivkou.

navzájem rovnoběžné (a směřují např. doleva dolů, viz obr. 10). Při jakémkoliv valivém pohybu koule po rovině se na její povrch otiskne některá rovinná křivka a šipky otištěné na kouli spolu s touto křivkou pak znázorňují paralelní přenos směrů podél příslušné křivky na povrchu koule.

*

Paralelní přenos definuje zdvih každé dráhy na kouli do fibrované variety směrů. Je-li na kouli zadána křivka a šipka určující počáteční směr, lze umístit kouli na rovinu tak, aby počáteční bod byl místem dotyku. Představme si, že v každém bodě roviny je inkoustem vyznačen směr, který je rovnoběžný s počátečním směrem. Jestliže se koule valí po rovině tak, že křivka na kouli se otiskuje do roviny, otiskují se zpět na kouli směry šipek v rovině. Tím je ve varietě směrů definována dráha, jež začíná předepsaným počátečním směrem a leží nad danou křivkou báze.

Křivka, která na valící se kouli (nebo jakékoliv jiném zakřiveném povrchu) vznikne otištěním přímky v rovině, se nazývá geodetika*) Geodetikou na kouli je hlavní kružnice. Nejkratší spojnice dvou bodů na kouli (a na jakémkoliv zakřiveném povrchu, pozn. redakce) je právě geodetika. Šipky, které všechny ukazují v rovině stejným směrem si zčásti „zapamatují“ tuto vlastnost, jsou-li otištěny podél geodetiky. V každém bodě geodetiky je úhel sevřený šipkou a tečnou ke geodetice stejný.

Pro křivku skládající se ze segmentů geodetik lze paralelní přenos popsat bez odkazu na valící se kouli. V tomto případě lze paralelní přenos šipek uskutečnit jednoduše tak, že podél každého segmentu geodetiky svírají šipky a tečny ke geodetice konstantní úhel. Z perspektivy pozorovatele nad povrchem koule se ovšem paralelní přenos může zdát jakýmkoliv, jen ne paralelním, neboť z jeho hlediska mohou šipky třeba i rotovat. Je-li na kouli otištěna libovolná křivka, může se z pohledu pozorovatele nad povrchem koule pohyb šipek zdát ještě chaotičtější.

Paralelní přenos poskytuje způsob, jak kvantitativně a explicitně vyjádřit intuitivně chápaný rozdíl mezi zakřiveným a plochým povrchem. Na povrchu roviny souhlasí směr šipky přenesené podél uzavřené dráhy s počátečním směrem. Paralelní přenos podél uzavřené křivky na zakřiveném povrchu k takovému souhlasu vést nemusí. Jestliže nastane změna ve směru šipky přenesené jedenkrát kolem uzavřené křivky proti jejímu počátečnímu směru, nazývá se úhel mezi nimi úhlový defekt dráhy. Ze způsobu, jak je paralelní přenos definován, plyne, že úhlový defekt dráhy nezávisí na počátečním směru šipky. Matematikové obvykle vyjadřují úhly nikoliv ve stupních, ale v radiánech. (Přepočítání ze stupňů na radiány se provede tak, že násobíme velikost úhlu ve stupních konstantou $2\pi/360$; jeden radián je tedy přibližně 57° .) Úhlový rozdíl vyjádřený v radiánech se nazývá totální křivost oblasti uzavřené danou dráhou. Průměrnou křivost oblasti definujeme jako její totální křivost dělenou plochou oblasti. Znaménko střední křivosti je podle konvence určeno tím, že šipka je podél dráhy přenášena proti směru pohybu hodinových ručiček, tzn., že křivkou ohraničená oblast je nalevo od ní. Křivost povrchu

*) V geometrii se zpravidla nenazývá geodetikou sama otištěná křivka, ale rovnoměrný pohyb bodu po takové křivce (pozn. redakce).

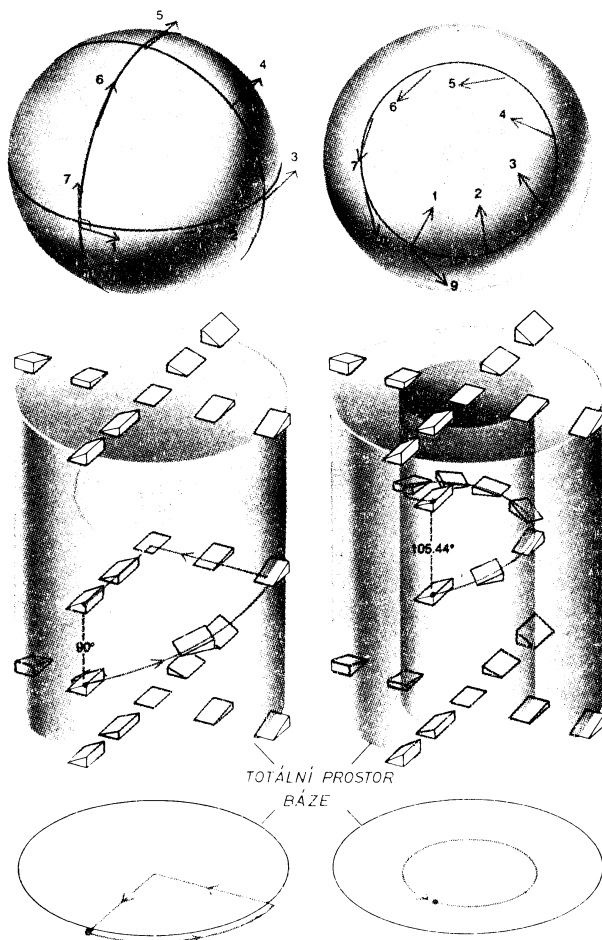
v daném bodě lze definovat jako limitu středních křivostí odpovídající postupně se zmenšujícím oblastem, které tento bod obsahují.

*

Paralelní přenos umožňuje definovat zdvih dráhy z povrchu koule do totálního prostoru všech směrů. V totálním prostoru je úhlový defekt dráhy při paralelním přenosu dán úhlovou vzdáleností na fibru odpovídajícímu počátečnímu a zároveň koncovému bodu dráhy (viz obr. 11). Totální křivost oblasti ohraničené dráhou je tedy dána vzdáleností měřenou na jednom z fibrů zdvižené dráhy. Ukazuje se, že nahrazení paralelního přenosu libovolným pravidlem zdvižení dráhy umožňuje zobecnit pojem křivosti i na ty variety, na nichž operace paralelního přenosu nemá smysl. Takováto pravidla pro zdvih dráhy jsou pak formulována bez odkazu na geodetiku nebo úhly.

Místo využití geometrie báze, jako je tomu u paralelního přenosu, je možné zdvihnout dráhu také naložením struktury na totální prostor. Jeden způsob, jak to udělat, záleží v přiřazení množiny rovnoběžných nakloněných rovin každému fibru. Sklon rovin určuje rychlost, s níž zdvižená dráha klesá nebo roste při přechodu od jednoho fibru k druhému. Roviny nesmějí být nikdy rovnoběžné s fibrů. Jejich sklon se musí měnit při přechodu od jednoho bodu k druhému spojitě a musí být stejný pro všechny body daného fibru. Poslední podmínka dává, podobně jako paralelní přenos, záruku, že úhlový rozdíl, a tedy tím také křivost, nezávisí na počátečním směru přenášené šipky. Výše popsaná množina rovin v totálním prostoru se nazývá konexe na fibrované varietě. V bodě fibru, kterým prochází zdvižená dráha, musí být tato dráha tečná k nakloněné rovině příslušné tomuto bodu. Tímto způsobem definují nakloněné roviny sklon zdvižené dráhy v bodech totálního prostoru. Obr. 11 znázorňuje konexi, která zdvihá dráhu na kouli stejným způsobem, jako to dělá paralelní přenos. Křivost konexe lze definovat podobným způsobem, jaký se používá při měření křivosti povrchu. Cílem je přiřadit každému bodu báze číslo, které představuje křivost v tomto bodě (pro vícerozměrné prostory není křivost specifikována jedním číslem, ale sadou čísel, které tvoří složky matematického objektu zvaného tenzor). Číslo, které měří křivost konexe v daném bodě, dostaneme tak, že najdeme analog úhlového rozdílu pro postupně se zmenšující dráhy okolo tohoto bodu. Konexe má nulovou křivost nad určitou oblastí báze, jestliže zdvih každé dostatečně malé uzavřené křivky z této oblasti je uzavřená křivka totálního prostoru. Konexe se v tomto případě nazývá plochá v analogii s paralelním přenosem v geometrii rovin. Jestliže má konexe nenulovou křivost, je zdvih malé a uzavřené dráhy v bázi neuzavřená křivka totálního prostoru.

Pohyb podél zdvižené dráhy v oblasti, kde je konexe plochá, se podobá pohybu po stráni. Podél uzavřené dráhy se lze dostat do různých nadmořských výšek. Ať je však dráha jakkoliv klikatá, vrátíme-li se do bodu, jehož zeměpisné souřadnice odpovídají počátečnímu bodu, vrátíme se i do stejné nadmořské výšky. Pohyb v zakřivené oblasti konexe připomíná pohyb v jeskyni. Některé cesty tunely jeskyně mohou vést do bodu se stejnými zeměpisnými souřadnicemi, jako měl výchozí bod, ale nadmořská výška může být zcela jiná. Konexe nad oblastí báze je plochá jen tehdy, jsou-li roviny směrů definující konexi tečné k jisté množině navzájem paralelních ploch. Každá



Obr. 11. Zdvihnout dráhu ve fibrované varietě, znamená nalézt v totálnímu prostoru dráhu, jež začíná v daném bodě a leží přímo nad dráhou v bázi. V případě fibrované variety směrů na povrchu koule definuje paralelní přenos směrů na povrchu jednoznačně zdvih každé dráhy. Totální prostor variety směrů nad severní polokoulí lze znázornit válcem. Každý směr je reprezentován bodem, jehož výška odpovídá úhlu, který tento směr svírá s referenčním směrem zde vybraným tak, aby v rovinné mapě severní polokoule směřoval vlevo dolů. Jde-li o dráhu podél sférického trojúhelníka; tvořeného geodetikami, směřuje referenční směr v počátečním bodě jižně podél poledníku. Úhel mezi přenášeným směrem (šipka) a tečnou ke geodetice zůstává konstantní. Při pohybu podél první strany trojúhelníka dochází ke změně úhlu sevřeného geodetikou a referenčním směrem a úhel mezi přenášeným a referenčním směrem tedy rovnoměrně roste. Podél druhé a třetí strany trojúhelníka svírají přenášený a referenční směr konstantní úhel 180° . Po návratu do počátečního bodu se směr šipky změnil o 90° , úhlový rozdíl uzavřené dráhy podél trojúhelníka. Změny přenášeného směru jsou znázorněny zdvihem dráhy ve varietě směrů na polokouli. Pro dráhu podél rovnoběžky 45° svírá přenášený směr na počátku s referenčním směrem úhel 180° a tento úhel při přenosu rovnoměrně roste. Konexe umožňuje definovat zdvih dráhy bez odkazu na paralelní přenos tím, že každému bodu totálního prostoru přiřadí sadu rovin. Zdvížená dráha musí být k těmto rovinám tečná. Sklony rovin jsou pro všechny body daného fibru stejné, ale mohou se spojitě měnit při přechodu od jednoho fibru k druhému. Roviny nejsou nikdy vertikální. Množina takových rovin se nazývá konexe na fibrované varietě.

plocha je přitom modelem jedné a téže „stráně“. Povrchy vyplňující část totálního prostoru, který je nad oblastí báze, musí do sebe zapadat jako lžičky a mít stejnou dimenzi, jako má báze.

*

Nyní je již možné ukázat, jak fibrované variety mohou znázorňovat důležité rysy kalibračních polí. Popisnější název pro kalibrační pole by byl pole fázových posunutí. V současných kalibračních teoriích jaderných sil působí fázové posunutí na kvantově mechanické vlnové funkce, čímž mění identitu částic jimi popsanych. Tak např. k tomu, abychom změnili amplitudu pravděpodobnosti protonového pole na amplitudu pravděpodobnosti neutronového pole a obráceně, tj. spojitě měnili pravděpodobnost, že určitá částice je neutron nebo proton, stačí posunout zobecněnou fázi.

Kvantová teorie magnetismu poskytuje ještě jednodušší příklad uvedené vlastnosti kalibračních polí. Dotyčné kalibrační pole se nazývá magnetický vektorový potenciál a určuje, jak elektrony interagují s magnetickým polem. Nejjednodušší způsob, jak demonstrovat působení magnetického vektorového potenciálu experimentálně, je využití interference elektronových vln. Elektron ve svazku lze znázornit vlnou, jejíž délka je nepřímou úměrná hybnosti elektronu (a tedy frekvence úměrná energii). V každém bodě prostoru a v každém okamžiku má taková vlnová funkce určitou výšku, stejně jako vlna na povrchu vodní hladiny má v každém okamžiku a bodě výšku nad průměrnou hladinou nebo pod ní. Výška vlny v daném bodě se periodicky mění od maxima k minimu a zpět. Graf výšek připomíná graf funkce $\cos t$ ($t = \text{čas}$). Protože kosinus je funkce, jejímž argumentem je úhel, lze okamžitou výšku vlny definovat zadáním maximální výšky a úhlu, který odpovídá okamžité hodnotě křivky funkce kosinus. Křivka nabývá své maximální výšky např. pro úhel 0° a minimální pro úhel 180° , přičemž pro 90° a 270° je výška nulová.

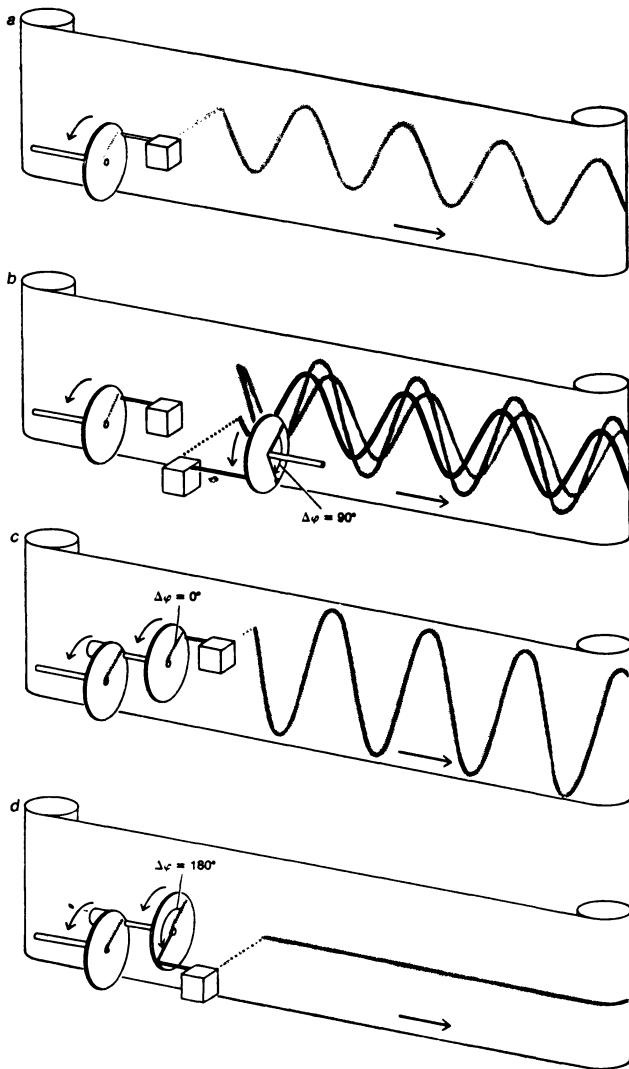
*

Úhel odpovídající okamžité výšce elektronové vlny se nazývá fázový úhel vlny. Fázový úhel neovlivňuje pravděpodobnost nalezení elektronu v daném bodě, neboť amplituda pravděpodobnosti je úměrná pouze maximální výšce elektronové vlny. (Jako obvykle je pravděpodobnost dána čtvercem amplitudy pravděpodobnosti.) Jestliže tedy posuneme fázi elektronové vlny v každém bodě libovolně, nezmění se pravděpodobnost nalezení elektronu v daném bodě. Funkce, která přiřazuje takové lokální fázové posunutí každému bodu v prostoru, se nazývá kalibrační transformace. I když celková fáze vlny elektronů jednoho svazku neovlivňuje žádné pozorovatelné veličiny, má relativní fáze, s níž dva svazky přicházejí do jednoho bodu, důležité fyzikální důsledky. Fázový rozdíl mezi dvěma interferujícími svazky může změnit maximální výšku elektronové vlny a tím i amplitudu pravděpodobnosti.

Interference se projevuje jako závislost pravděpodobnosti nalezení částice v daném bodě na poloze tohoto bodu. Kdykoliv se oba částečné svazky překrývají, vytvářejí interferenční obraz. Předpokládejme, že experiment je uspořádán symetricky a oba

svazky se ve středu detekční roviny protínají přesně ve fázi. Hodnotu fáze ve středu detekční roviny lze libovolně změnit, ale stejná změna pak nastane v každém z částečných svazků. Interference je tedy při libovolné kalibrační transformaci v tomto bodě konstruktivní.

Obr. 12. Fáze vlny, vyjádřenou obvykle ve stupních, lze detegovat pouze jako rozdíl mezi fázemi dvou vln. Pro vlny popsané funkcemi sinus a kosinus je možné jejich tvar vytvořit pomocí promítnutí bodu na rovnoměrně se otáčejícím kruhu na stínítko, které se pohybuje rovnoměrně ve směru kolmém na projekční paprsek. Libovolnou polohu na kruhu lze vzít za počáteční, tj. odpovídající 0° . Úhel rotace vzhledem k této libovolně vybrané poloze určuje fázi (a). Vztah mezi fázemi dvou vln je určen tím, že každé maximum a minimum jedné vlny je o stejný počet stupňů napřed proti odpovídajícímu maximum a minimum druhé vlny. Amplitudy vln, které interferují, se v každém okamžiku sčítají. Hodnota maxima výsledné vlny závisí na relativní fázi vln (b). Sčítání lze provést mechanicky tak, že na obvod prvního kruhu umístíme druhý, rovněž rotující kruh. Je-li interference konstruktivní (c), maxima jsou ve stejném bodě a výška maxima výsledného obrazce je rovna součtu výšek původních vln. V případě destruktivní interference (d) je fázový rozdíl 180° . Maxima jedné vlny jsou ve stejném bodě, jako minima druhé, a proto se vlny přesně vruší.



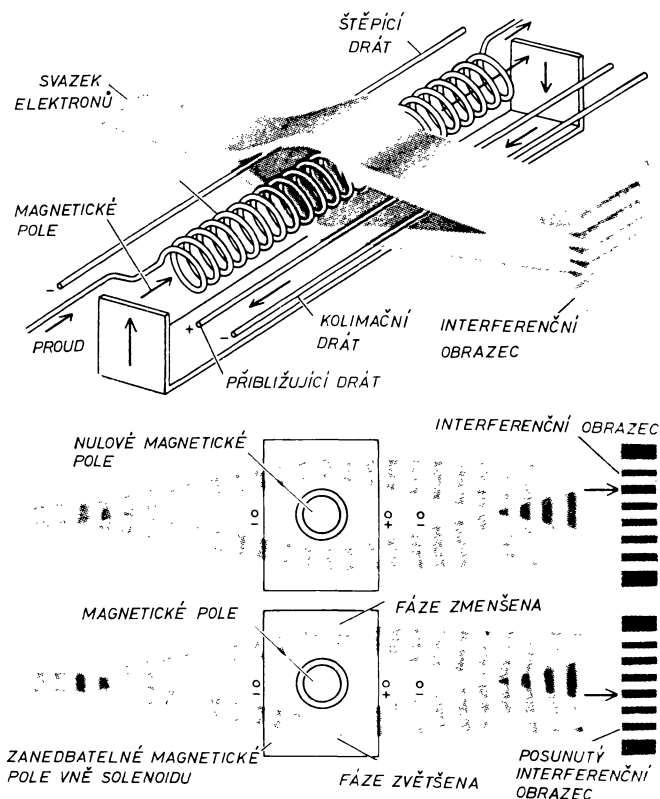
Interferenční obrazec se vytvořil v důsledku skutečnosti, že např. do bodu nalevo od středu detekční roviny přichází vlna příslušná levému svazku po kratší dráze než vlna odpovídající pravému svazku. Jak postupujeme dále od středu obrazce, zvětšuje se fázový rozdíl mezi jednotlivými svazky. Výsledná periodická změna intenzity dopadající vlny je podstatou interference. Interference se projeví jako změna četnosti detego-

vaných elektronů v místě, kde se svazky překrývají. Jestliže nějaký fyzikální efekt způsobí fázový rozdíl mezi částečnými svazky ve středu detekční roviny, způsobí stejný fázový rozdíl i ve všech bodech nalevo a napravo od něho. Interferenční kroužky budou proti původnímu interferenčnímu obrazci stejnoměrně posunuty.

*

U elektricky nabitých částic posunuje fázi v každém bodě prostoru magnetický vektorový potenciál, který také určuje intenzitu magnetického pole. Magnetické efekty lze úplně vysvětlit v pojmech fázových posunutí určených polem vektorového potenciálu.

Obr. 13. Posunutí fáze elektronové vlny lze vyvolat nejen magnetickým polem, ale také průchodem elektronu oblastí blízko magnetického pole. Efekt lze detegovat tak, že svazek elektronů rozštěpený působením záporně nabitého drátu necháme procházet kolem opačných stran solenoidu (uvnitř něhož je magnetické pole uzavřeno) a potom opět rekombinujeme a tím vyvoláme interferenci. Při zvětšení proudu procházejícího solenoidem roste i intenzita magnetického pole a interferenční obrazec se posouvá. Protože svazky elektronů zůstávají koherentní, jen pokud nejsou vzdáleny více než 60 mikronů, je experimentální zařízení nepředstavitelně malé: průměr solenoidu je menší než 1/7 tloušťky lidského vlasu. Experiment tohoto typu byl poprvé navržen Yakirem Aharonovem z univerzity Yeshiva a Davidem Bohmem z londýnské univerzity.



Důvod, proč vektorový potenciál je kalibračním polem, záleží v tom, že síla magnetického pole působící na elektricky nabitou částici mění jejich směr, ale nikoliv energii. Jestliže tedy elektron vletí do magnetického pole, zůstane frekvence jeho vln beze

změny, ale prostorový tvar vlny se změní. Fázové posunutí elektronové vlny způsobené magnetickým polem závisí proto na dráze elektronu.

V klasické teorii magnetismu byl magnetický vektorový potenciál pomocná veličina, užitečná pro výpočet intenzity magnetického pole, která mohla být nenulová i v oblasti, kde intenzita magnetického pole byla nulová. V důsledku toho se fyzikové domnívali, že magnetický vektorový potenciál sám o sobě nemá žádné pozorovatelné projevy. V kvantové mechanice magnetický vektorový potenciál pozorovatelné důsledky má. Na jeho očekávaný vliv na fázi elektronové vlny upozornil W. Ehrenberg z londýnské univerzity a R. E. Siday z edinburské univerzity již v r. 1949. Ale teprve v r. 1959 navrhli Yakir Aharonov z univerzity Yeshiva a David Bohm z londýnské univerzity experiment, v němž tento efekt mohl být přímo pozorován.

Stejně jako v experimentu s rotací fáze neutronu vyžaduje i Aharonovův-Bohmův experiment rozštěpení svazku subatomických částic na dva svazky, které potom rekombinují a vytvářejí tak interferenční obrazec. Místo neutronů se používá svazku elektronů, což ovšem přináší obtížný technický problém vzhledem k tomu, že maximální vzdálenost, při které dva rozštěpené svazky zůstávají ještě koherentní, je pouze 60 mikrometrů. Aby se dosáhlo takové malé vzdálenosti, musel být celý experiment umístěn uvnitř elektronového mikroskopu. Experiment byl poprvé proveden v r. 1960 R. G. Chambersem z univerzity v Bristolu. V r. 1961 byl pozorovaný efekt potvrzen v poněkud složitějším experimentu Gottfrieda Möllenstedta a Wenera Bayha z univerzity Tübingen.

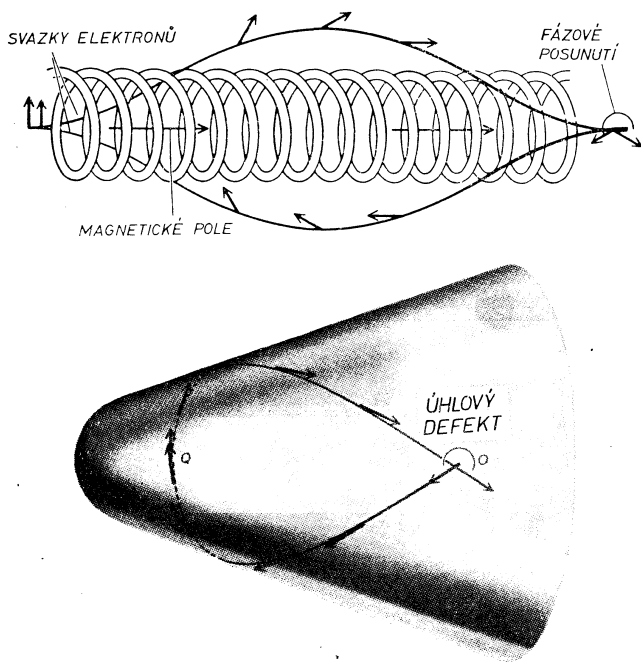
*

Svazek primárních elektronů nalétá na záporně nabitý drát, jehož působením se rozštěpí. Rozštěpené svazky procházejí kolem opačných stran solenoidu, jehož vnější průměr je 14 mikronů. (Méně než sedmina tloušťky lidského vlasu.) Elektromagnet je konstruován tak, aby jeho magnetické pole bylo nenulové pouze uvnitř solenoidu. Protože elektrony po celé dráze zůstávají vně solenoidu, procházejí zanedbatelným magnetickým polem. Každou změnu jejich stavu je proto nutno připsat působení pole magnetického vektorového potenciálu, které solenoid obklopuje. Za solenoidem je v elektronovém mikroskopu umístěn kladně nabitý drát, jehož působením se svazky opět přiblíží. Další záporně nabitý drát odchýlí oba svazky tak, aby se protnuly pod malým úhlem, a tím se zvětšila šířka interferenčních proužků. Výsledný obrazec má široké tmavé pruhy pocházející od difrakce na štěpícím drátě a jemné proužky vzniklé interferencí.

Při zvyšování proudu procházejícího solenoidem roste i magnetické pole a jemné interferenční čáry se posouvají vzhledem k širokým difrakčním pásům. Magnetický tok lze spočítat z rozměrů cívky a proudu, který jí prochází. Experiment tedy poskytuje možnost ověření vztahu mezi magnetickým polem a fázovým posunutím. Výsledky potvrzují předpověď kvantové teorie.

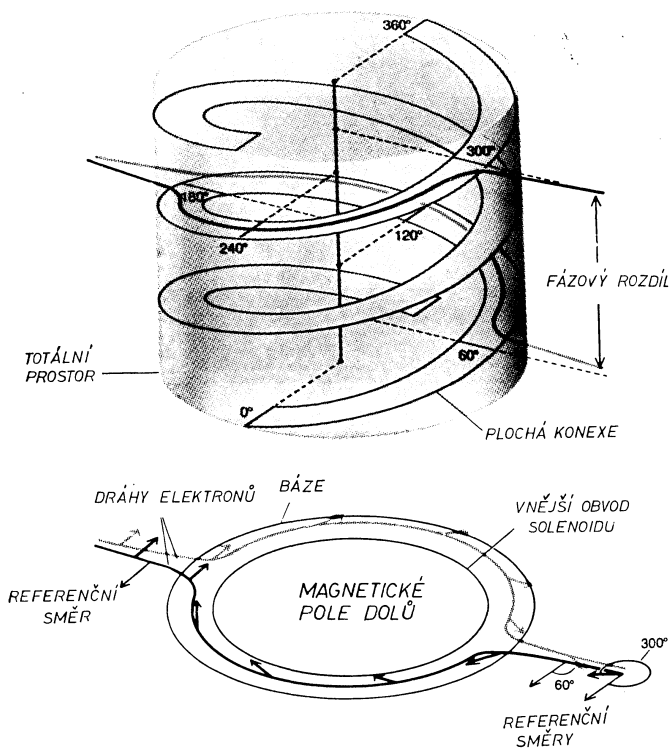
*

Model tohoto experimentu v pojmech fibrované variety osvětluje obecný vztah mezi kalibračními poli a konexemi na fibrované varietě. Model popisuje paralelní přenos po ploše, která vznikne, když uřízneme špičku kužele a nahradíme ji vrchlíkem. Takto vytvořená plocha je topologicky ekvivalentní povrchu polokoule. Má však zcela jinou geometrii. Všimněte si, že kužel rozříznutý po délce lze rozvinout do roviny, aniž ho je nutno přitom natahovat nebo stlačovat. Délky a úhly měřené na rozvinutém kuželu musí být stejné jako na kuželi samotném. Dvourozměrný pozorovatel, který by měřil křivost povrchu kuželu pomocí paralelního přenosu podél malých uzavřených křivek, by zjistil, že úhlový rozdíl je vždy nula; povrch by se mu jevil plochý. Tato část povrchu kuželu je v Aharonově-Bohmově experimentu analogická oblasti vně solenoidu, kde je magnetické pole zanedbatelné. Rozdíl mezi kuželem a rovinou se ovšem projeví, uvažujeme-li dostatečně velké dráhy. Přímka na rozvinutém kuželu, která protíná obě



Obr. 14. Fázové posunutí elektronových svazků v experimentu Aharonova a Bohma lze modelovat pomocí paralelního přenosu na povrchu kužele s vrchlíkem. Posun fáze podél dráhy každého ze svazků je reprezentován otáčením šipky. Částečné svazky jsou okamžitě po rozštěpení ve fázi. Fáze roste podél horní dráhy a zmenšuje se podél dolní. Fáze se mění, i když magnetické pole je podél obou drah nulové. Fázová posunutí jsou úměrná magnetickému poli mezi drahami. Na kuželi s vrchlíkem je geometrie kuželové části povrchu stejná jako geometrie roviny. Tuto část povrchu lze podélně rozříznout a rozvinout do roviny, aniž by přitom došlo k jeho natahování nebo stlačování. Při paralelním přenosu podél dvou různých drah kolem kužele nejsou přenesené směry v bodě, kde se dráhy opět protínají, stejné, a to přesto, že křivost povrchu podél obou drah je nulová. Dráhy na obrázku vytvářejí geodetiku, která sama sebe přetíná a šipky reprezentují směr k ní tečný. Protože po geodetice přenášíme tečný směr, je úhlový defekt křivky rovný úhlu, pod nímž se obě dráhy protínají. Úhlový defekt, vyjádřený v radiánech, je roven totální křivosti v oblasti mezi drahami. Křivost je soustředěna na vrchlíku, podobně jako je magnetické pole uzavřeno uvnitř solenoidu

hrany řezu ve stejné vzdálenosti od vrcholu, tvoří na povrchu kuželu uzavřenou smyčku, která je geodetikou. Představme si dva dvourozměrné pozorovatele, kteří se nacházejí v bodě smyčky, jenž je přímo naproti bodu, kde smyčka kříží řez a kteří se oba dívají dopředu. Jestliže se nyní pozorovatelé pohybují podél smyčky tak, že jeden jde dopředu a druhý dozadu, musí oba dospět k názoru, že se jeden od druhého vzdalují podél přímky. Když se opět setkají v bodě, kde smyčka kříží řez, nedívají se ovšem již stejným směrem. Úhel mezi těmito směry je rovný 360° minus vrcholový úhel rozvinutého kuželu. Pozorovatelé musí dojít k názoru, že povrch, na němž žijí, není vlastně plochý, neboť tento úhel dává úhlový defekt odpovídající uzavřené křivce jejich drah. Oblast vlevo od nich musí mít totální křivost rovnou úhlovému rozdílu vyjádřenému v radiánech. Osud páru dvourozměrných pozorovatelů, kteří se pohybují po kuželi



Obr. 15. Fibrovaná varieta fází nad průřezem experimentu Aharonova a Bohma je téměř stejná jako varieta směru na povrchu kuželu s vrchlíkem. Fibr nad každým bodem báze představuje všechny možné fázové úhly (od 0° do 360°) elektronu v tomto bodě. Při vhodné volbě intenzity magnetického pole je konexe definovaná na varietě fází pomocí magnetického vektorového potenciálu identická s konexí danou paralelním přenosem po povrchu kuželu s vrchlíkem. Křivost konexe odpovídá magnetickému poli solenoidu, přičemž oblast uvnitř solenoidu odpovídá kulovému vrchlíku. V této oblasti je pravidlo pro zdvih dráhy stejné, jako dává paralelní přenos na povrchu koule a lze ho popsat stejným systémem nakloněných rovin (na obrázku nejsou znázorněny). Oblast mimo solenoid odpovídá komolému kuželi, na němž je konexe plochá. Nakloněné roviny jsou tečné k množině spirálovitých ramp, které totální prostor vyplňují. Fázové posunutí v bázi je znázorněno rotací šípek.

je podobný dvojici částečných svazků procházejících v Aharonově-Bohmově experimentu okolo solenoidu. Oba pozorovatelé hledí na počátku stejným směrem. Analogicky, oba částečné svazky elektronů jsou okamžitě po rozštěpení primárního svazku ve fázi. Jestliže budou pozorovatelé měřit křivost podél svých drah, zjistí, že je nulová, neboť se pohybují po ploché části kužele s vrchlíkem. Podobně nelze ani detekovat magnetický vektorový potenciál, který způsobuje fázové posunutí jednoho svazku vůči druhému, provádíme-li měření pouze podél jedné z drah.

Klíč k analogu pro pochopení analogie uvedených dvou efektů souvisí s interpretací magnetického vektorového potenciálu jako konexe na fibrované varietě, která se nazývá varieta fázových posunutí. Její báze je trojrozměrný prostor, v němž experiment reálně probíhá. Fibr nad bodem báze je tvořen množinou všech možných fází elektronu v daném bodě a totální prostor tedy představuje všechny možné fáze elektronu ve všech bodech trojrozměrného prostoru. Poněvadž fázi lze popsat úhlem měřeným ve stupních nebo radiánech, je fibr nad každým bodem prostoru kružnice, podobně jako tomu bylo v případě variety směrů na povrchu. V tomto případě přísluší kružnice jako fibr každému bodu trojrozměrného prostoru a totální prostor je tedy čtyřrozměrný.

Trojrozměrnou bázi a čtyřrozměrný totální prostor je těžké si vizuálně představit. Lze si ovšem udělat obrázek o varietě fází nad rovinou, která protíná experimentální zařízení kolmo k ose solenoidu. Tato varieta, jejíž totální prostor je trojrozměrný, plně postačuje k popsání výsledku Aharonova-Bohmovova experimentu. Varieta je zde válcová a lze ji znázornit vertikálními fibry, podobně jako varietu směrů na polokouli nebo kuželu s vrchlíkem. Konexe na varietě je dána množinou rovin přetínajících fibry. Sklon rovin je v daném směru (nahoru nebo dolů po rampě) úměrný složce magnetického vektorového potenciálu v tomto směru v odpovídajícím bodě báze. Křivost konexe je úměrná magnetickému poli, a proto je nenulová pouze uvnitř solenoidu. Při vhodné volbě intenzity magnetického pole uvnitř solenoidu je obrázek konexe způsobené magnetickým vektorovým potenciálem nad rovinou kolmou k ose solenoidu identický s obrázkem konexe, dané paralelním přenosem na kuželi s vrchlíkem (obr. 15). Oblast báze uvnitř solenoidu odpovídá kulovému vrchlíku na kuželi. Tam je konexe identická s konexí generovanou paralelním přenosem na kouli. V oblasti báze vně solenoidu je křivost konexe nula, protože magnetické pole je tam nulové. Roviny konexe jsou tečné k množině ramp, které se spirálovitě otáčejí kolem středu. Fázový rozdíl mezi dvěma částečnými svazky elektronů je přesně roven výšce na fibru, kterou elektron získá při rotaci po rampě o 360° .

Protože báze tvoří trojrozměrný prostor, je křivost variety fází popsána tenzorem. Jeho tři složky jsou přitom úměrné odpovídajícím složkám magnetického pole. Tento popis lze rozšířit na varietu fází nad prostoročasem, jejíž báze je čtyřrozměrná. Elektrický a magnetický potenciál určují dohromady konexi, která umožňuje vysvětlit všechny elektromagnetické interakce nabitých částic. Křivost konexe je v tomto případě tenzor se šesti složkami, které odpovídají třem složkám elektrického pole a třem složkám magnetického pole.

Každé z kalibračních polí kvantové teorie lze chápat jako konexi na fibrované varietě, jejíž bázi je prostoročas. Fibr variety je tvořen množinou transformací vnitřních symetrií

částic, jejichž interakce kalibrační pole zprostředkovávají. Fibrovaná varieta byla konstruována pro kvantovou elektrodynamiku, slabé a silné interakce a také pro teorie, které se pokoušejí tyto interakce sjednotit. I když úplné schéma pro sjednocení všech fundamentálních sil ještě neexistuje, je jasné, že matematika konexí na fibrované varietě je určena hrát v teoretické fyzice důležitou roli.

*

Věříme, že užitečnost a fyzikální význam těchto matematických pojmů nejsou náhodné. Matematikové ani fyzikové nejsou izolováni od politického, kulturního a fyzického prostředí, v němž žijí, a jejich myšlenky a vjemy jsou nutně ovlivněny ostatními disciplínami. Kromě toho matematikové i fyzikové nevyhnutelně sdílejí základní předpoklady o světě každodenního života a o logice, pomocí níž tento svět promítají do abstraktní vědy. Je jim společná vášeň pro tuto racionální práci. Co se zdá nejobdivuhodnější není ani „neopodstatněná účinnost“ matematických pojmů ve fyzice ani plodnost fyzikální intuice jako zdroje nové matematiky. Spíše musíme obdivovat úspěch, který společný intelektuální přístup matematiků a fyziků přinesl při vytváření bohatého, jednotného a plodného obrazu fyzikálního světa.

Přeložil Jiří Chýla

Lidé uměli vážit po tisíce let před dobou, kdy Archimedes vypracoval zákony rovnováhy; musili tedy prakticky a intuitivně znát příslušné zásady. Archimedes vyvodil teoretické shrnutí těchto praktických znalostí a podal souhrn znalostí jako logický systém. První kniha jeho „Pojednání o rovnováze prosté“ začíná sedmi postuláty..., které formulují a přesně vymezují poznatky mlčky shromažďované po staletí. Jejich počet je snížen na minimum, na kterém lze založit vědu. Vycházejí z těchto postulátů, propracovává se potom Archimedes přes řadu pouček k základnímu zákonu, který ověřuje nejprve pro souměřitelné a pak pomocí důkazu sporem i pro nesouměřitelné veličiny, že totiž „dvě veličiny, ať souměřitelné či nesouměřitelné,

jsou v rovnováze ve vzdálenostech nepřímo úměrných těmto veličinám“. To je typický příklad toho, co máme na mysli, když říkáme, že empirické vědomosti Východu přetvořili staří Řekové v teoretickou vědu.

*

Z praxe vážení se podařilo Řekům (v osobě Archimedově) vyvodit vědu — statiku. Nepodařilo se jim však o nic více než Egypťanům vyvodit z dovedností hrnčářů a kovářů nějakou souhrnnou chemickou teorii. Úspěšné vytvoření statiky a neúspěch ve vytvoření chemické vědy nám dává odpověď na otázku o síle a slabosti toho, čeho dosáhla věda starých Řeků.