Raymond M. Smullyan
Matematické hádanky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 24 (1979), No. 4, 212--217

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137806`

má nyní téměř 2 000 zaměstnanců na plný úvazek a kolem 6 500 na částečný úvazek.

Studium matematiky zapisuje jen část studentů. Pro 14 kursů s matematickým obsahem bylo v r. 1976 vysíláno 227 televizních a 186 rozhlasových pořadů. Matematická fakulta na Open Univerzity zajišťuje především úplný jednoroční základní kurs a pro studenty jiných zaměření úvodní kursy s polovičním rozsahem a částečně obměňovaným obsahem. Tento obsah se příliš neliší od matematiky v 1. ročnících našich vysokých škol technických, proto ho nebudu rozvádět v heslech.

Kursy 2. stupně jsou zaměřeny diferencovaně k matematice čisté, aplikované, k statistice, k počítačům a ke školské matematice. Kursy 3. stupně se tematicky neliší od kursů 2. stupně, prohlubují však látku nebo naopak probírají hraniční obory.

Open University uděluje hodnosti *bachelor of arts* (BA) na základě šesti složených dílčích zkoušek. Každá zkouška je tříhodinová a vztahuje se k jednomu celoročnímu kursu; student musí mít v tomto kursu uspokojivé výsledky z průběžných hodnocení, o kterých jsme hovořili. Studenti obvykle sledují aspoň dva kursy současně, takže toto pregraduální studium dokončují během tří let dosažením titulu BA. V roce 1976 získalo tento titul 5 500 absolventů.

Další studium směřující k dosažení titulů *magistra* nebo *doktora filozofie* (M. Phil. a Ph. D.) je spojeno s výzkumnými úkoly a s předložením disertační práce. Tituly získané na Open University mají mít stejnou platnost jako z jiných univerzit, ale soukromí zaměstnavatelé mohou zřejmě uplatňovat svůj názor na tuto otázku.

Kromě již popsaného typu studia existují na Open University i korespondenční kursy, které nesměřují k získání vědecké hodnosti. Tuto formu volilo v r. 1975 kolem 5 000 osob, které potřebují vysvědčení jako součást svých kvalifikačních předpokladů, například při změně zaměstnání. Zájem o toto studium prudce vzrůstá.

Informace, které jsem vybral z prospektů získaných na kongresu v Helsinkách, nemusí vzbuzovat závistivý pocit „tohle u nás nemáme". Je zřejmé, že jde o dosti nákladné (a přesto jen částečné) napravování nedostatků školského systému, který neumožňuje souvislé studium schopným mladým lidem z méně majetných vrstev. Na druhé straně může však být styl práce Open University, ve kterém se kombinují různé moderní vyučovací metody a prostředky, zdrojem poučení pro naše postgraduální kursy. Zobecněním zkušeností by bylo možno významně obohatit i disciplínu nazývanou „pedagogika vzdělávání dospělých".

Matematické hádanky*)

R. M. Smullyan, New York

Raymond M. Smullyan z City University v New Yorku nám předal k otištění následující hlavolamy. První dva pocházejí z jeho knihy „What Is The Name Of This Book?", která vyšla v květnu 1978 v Prentice-Hall, Inc. O zbývajících hádankách sám profesor Smullyan uvádí: „Jsou z rukopisu připra-

---

*) R. M. SMULLYAN: *Puzzles*. The (new) Mathematical Intelligencer, Vol. 1, No. 2, 1978.

Přeložila a upravila BLANKA KUSSOVÁ.

vované knihy" To Mock a Mocking Bird", ve které chci vyjít od rekreačních hříček a vést čtenáře do studia některých oblastí matematiky a logiky. Kniha tedy začíná jako sbírka hlavolamů, postupně však do ní začleňuji různé partie matematiky, jako např. nekonečné množiny, matematickou indukci, některé nové výsledky v teorii podvojné indukce, Königovo lemma, věty o pevném bodu, Booleovy algebry, logiku 1. řádu (s důkazy vět o úplnosti a kompaktnosti), některé věty o formálních systémech s ukázkou alespoň jedné nerozhodnutelné věty; a jestliže to rozsah dovolí, bude kniha obsahovat i kapitolu věnovanou axiómu výběru včetně důkazu některého principu maximality."*

(Redakční předmluva časopisu The (new) Mathematical Intelligencer)

1. Rytíři, podvodníci a normální smrtelníci

Jistý ostrov je obýván *rytíři*, kteří vždy mluví pravdu, *podvodníky*, kteří neustále lžou a *normálními smrtelníky*, kteří někdy lžou, a někdy mluví pravdu. Předpokládejme, že vy sám, čtenáři, jste obyvatelem tohoto ostrova a že jste se zamiloval do královské dcery a chcete se s ní oženit. Král však dovolí, aby se jeho dcera provdala pouze za „normálního". („Rytíři", myslí si král, „jsou přílišní svatouškové, a podvodníci zase jsou proradní".) Dokážete-li tedy krále přesvědčit, že jste normálním smrtelníkem, můžete se s jeho dcerou oženit, jinak ne.

*) *Mocking bird* je anglický název pro drozda mnohohlasého, avšak často se tak označují i jiní ptáci, kteří mají schopnost napodobovat hlasy ostatních ptáků. Název knihy představuje anglickou slovní hříčku, jíž by bylo možno přeložit např. takto: „Posměch pro ptáčka posměváčka."

I. Předpokládejme nejprve, že vy, čtenáři, jste opravdu „normální" a že je vám dovoleno pronést před královským trůnem tolik výroků, kolik chcete. Za těchto okolností máte velmi snadnou úlohu, protože k tomu, aby král zjistil, že nejste ani rytíř ani podvodník, zcela stačí, vyslovíte-li jedno tvrzení, které je zřejmě pravdivé, a druhé evidentně nepravdivé.

Předpokládejme však dále, že vám král navíc přikáže formulovat důkaz vaší normálnosti tak, aby přitom byla splněna některá z těchto dalších podmínek:

(a) V přítomnosti krále nesmíte vyslovit žádný nepravdivý výrok (přistihne-li vás při lži, budete na místě popraven). Lze i nyní přesvědčit krále, že jste normálním smrtelníkem? Jestliže ano, jaký je nejmenší počet pravdivých výroků, které k tomu potřebujete?

(b) Je vám naopak dovoleno (patrně z nějakého okamžitého královského rozmaru) pronášet pouze nepravdivá tvrzení. Dokážete i v tomto případě ujistit krále, že jste „normální"? Je-li to možné, pomocí kolika výroků?

(c) Jste žádán, abyste podal nejen důkaz toho, že jste „normální", ale i toho, že jste inteligentní. Král ruší proto své původní rozhodnutí o neomezeném počtu výroků, jimiž ho smíte přesvědčovat, a ukládá vám vyslovení pouze jediného výroku, který musí splňovat tyto dvě podmínky:

P_1: Král z něho může usoudit, že nejste ani rytíř ani podvodník.

P_2: Král nemůže rozhodnout, zda pronesený výrok je pravdivý či nepravdivý.

Jste schopen i nyní ujistit krále, že jste vhodným ženichem?

II. Nakonec předpokládejme, že vy, čtenáři, nejste normálním smrtelníkem. Avšak, naštěstí pro vás, král právě změnil své původní rozhodnutí a vyhlásil, že svou dceru provdá jen za toho, kdo není „normální“. Přitom uchazečům o ruku královské dcery se opět povoluje provést libovolný počet výroků a rovněž se neklade žádné omezení na jejich pravdivostní hodnotu. Jaký je nyní nejmenší počet výroků potřebných k ujistění krále, že nejste normální smrtelník?

2. Ostrov lhářů a pravdomluvných

Jiný ostrov je obydlen výlučně *pravdomluvnými*, tj. osobami, které vždy mluví pravdu, a *lháři*, kteří za všech okolností lžou. Na tomto ostrově se důsledně dodržuje starodávné tabu, které všem domorodcům – navzdory tomu, že perfektně rozumějí anglickému jazyku – zakazuje užívat při rozhovoru jakýchkoliv anglických slov. Cizincům je však známo, že kdykoliv položí domorodému obyvateli otázku, na níž lze odpovědět "yes" anebo "no", řekne "Bal" anebo "Do"; přitom se však neví, které z těchto slov znamená "yes" a které "no". Proslýchá se, že na ostrově je ukryt zlatý poklad. Všichni domorodci vědí, zda tato pověst je pravdivá.

Jak lze pomocí jediné "yes – no" otázky (která ovšem bude zodpověděna "Bal" či "Do") zjistit, zda je opravdu na ostrově zlato ukryto?

3. Jeden gödelovský hlavolam

Existuje jiný podivuhodný ostrov – říkejme mu ostrov G – obývaný výlučně rytíři (kteří vždy mluví pravdu) a podvodníky (kteří neustále lžou). Žádní „normální“ na ostrově nežijí. Ti rytíři, kteří již prokázali, že opravdu rytíři jsou, se nazývají *právoplatnými rytíři*; a stejně tak ti podvodníci, kteří již své kvality dostatečně prokázali, dostali nový název – *nenapravitelní podvodníci*. Přitom zůstává – alespoň pro tuto chvíli – otevřenou otázkou, zda všichni rytíři jsou právoplatní a každý podvodník nenapravitelný.

Obyvatelé tohoto ostrova neměli žádná jména, takže dorozumívání zde bylo vždy poněkud problematické. Až jednoho dne „bůh Gödel“ sestoupil z nebes a přisoudil každému obyvateli ostrova číslo (celé kladné), které je od té doby známé jako Gödelovo číslo té které osoby. Pro každé Gödelovo číslo n nechť O_n je ten obyvatel ostrova, jemuž bylo číslo n Gödelem přiděleno.

Kronikář ostrova vede knihu nazývanou *knihou množin*. Její strany jsou průběžně očíslovány a na každé straně je popsána nějaká množina celých kladných čísel. Ty množiny, které jsou v knize uvedeny, nazveme *registrované množiny*. Řekneme, že číslo n je *indexovým číslem*, jestliže n je číslem některé strany této knihy; dále označíme symbolem S_n tu množinu, která je zapsána na straně n. V případě, že číslo n je prvkem množiny S_n, nazveme n *pozoruhodným číslem*. Nechť n je libovolné indexové číslo; řekneme, že číslo m je *asociováno* s číslem n, právě když m je Gödelovým číslem nějaké osoby, která tvrdí, že číslo n je pozoruhodným číslem (toto tvrzení může ovšem být i nepravdivé, je-li osoba O_m podvodník).

Máme dáno následujících pět podmínek:

P_1: Množina Gödelových čísel všech právoplatných rytířů je registrovaná množina.

P_2: Množina Gödelových čísel všech nenapravitelných podvodníků je registrovaná množina.

P_3: Doplněk každé registrované množiny je registrovaná množina.

P_4: Ke každému indexovému číslu existuje alespoň jedno číslo s ním asociované.

P_5: Nechť A je libovolná registrovaná množina, pak množina všech čísel x, k nimž existuje v A alespoň jedno číslo s x asociované, je opět registrovaná množina.

Úkolem čtenáře je:

(a) (Podle Gödela) Dokažte, že alespoň jeden z rytířů ostrova není právoplatným rytířem a aspoň jeden z podvodníků není nenapravitelným podvodníkem.

(b) (Podle Tarského) Zjistěte, zda množina Gödelových čísel všech rytířů ostrova je registrovaná množina.

4. Posměch pro ptáčka posměváčka

Mějme dánu posloupnost B_1, $B_2, \ldots,$ $B_n \ldots$ ptáků, v níž se žádný prvek neopakuje. Nechť dále platí: Kdykoliv na některého ptáka B z této posloupnosti zavoláte nějaké číslo (celé kladné), odpoví vám též nějakým číslem. Jestliže B odpoví týmž číslem, které jste na něho zavolal, řekneme, že pták B si ono číslo *oblíbil*. Oblíbí-li si pták B_n svůj vlastní index — tj. číslo n, nazveme ho *egocentrickým* ptákem.

Dohodneme se, že budeme užívat tohoto funkčního zápisu: pro libovolného ptáka B z naší posloupnosti a pro libovolné číslo n nechť $B(n)$ označuje odpověď B na číslo n. Pak lze například psát: pták B si oblíbil číslo n právě když $B(n) = n$, pták B_n je egocentrický právě tehdy, když $B_n(n) = n$ apod.

Nechť jsou dány tyto dvě podmínky:

P_1: Jeden z ptáků naší posloupnosti — označme ho P — se nazývá *ptáček posměváček*, protože na každé číslo n reaguje stejně jako pták B_n — tedy $P(n) = B_n(n)$.

P_2: Množina všech „ptačích funkcí“ je uzavřená vůči operaci skládání. To znamená, že pro libovolné dva ptáky A, B existuje pták C tak, že pro každé n je $A(B(n)) = C(n)$.

Dokažte, že každý pták si oblíbil alespoň jedno číslo a že alespoň jeden z ptáků je egocentrický.

5. Jiříkova kouzelná zahrádka

Malý chlapec Jiřík B. má zahrádku kouzelných květin. Květiny jsou pouze *modré* a *červené*; jejich kouzlo záleží v tom, že mohou ze dne na den měnit svou barvu — ovšem jen tak, že vždy po celý den je každá květina buď modrá, anebo červená.

Nechť přitom platí tyto tři podmínky:

P_1: Žádné dvě (různé) květiny nemají stále touž barvu — jinak řečeno, pro libovolné dvě různé květiny platí, že existuje alespoň jeden den, kdy je jedna z nich červená a druhá modrá.

P_2: Ke každým dvěma květinám A, B existuje květina C tak, že C je modrá právě ve všech těch dnech, kdy obě květiny A, B jsou červené.

P_3: Počet květin v zahradě je větší než 200 a nepřevyšuje číslo 300.

Kolik květin (udejte přesný počet!) má Jiřík ve své kouzelné zahrádce?

Poznámka redakce: Řešení uveřejníme v příštím čísle.

Stanovisko k minikalkulátorům

Miloš Řešátko, Praha

Minikalkulátory u nás pronikly v plné míře zatím pouze na vysoké školy. Jejich obecnému rozšíření na střední a základní školy brání jak vysoká cena, tak nedostatek těchto přístrojů na běžném trhu. V zemích, kde se dají koupit různé druhy minikalkulátorů v každém obchodním domě a kde jejich cena je přibližně taková jako je cena knihy a nižší, než byla cena logaritmického pravítka, vnikly však minikalkulátory nejen do středních, ale také do základních škol.

Učitelé nebyli zdaleka na tento vpád výpočetní techniky připraveni. V dlouhých diskusích se objevovala stanoviska nadšeně vítající tuto techniku. Její zastánci tvrdili, že minikalkulátory mají mít žáci již od prvních tříd, neboť je osvobodí od nácviku numerických výpočtů. Domnívali se, že čas věnovaný nácviku numerických výpočtů se ušetří a využije pro rozvoj matematického myšlení žáků. Někteří jejich odpůrci zastávali opačné krajní stanovisko. Zavedení minikalkulátorů podle nich znamenalo výchovu negramotných lidí, kteří bez výpočetní techniky nejsou schopni překontrolovat správnost účtu v restauraci.

Zatímco jedni diskutovali, druzí experimentovali na různých stupních škol a v různých formách vyučování. Prokázali, že extrémní stanoviska nelze připustit [1]. S využitím těchto experimentů i na základě poznatků učitelů v praxi vydala nyní v NSR Společnost pro didaktiku matematiky stanovisko k užívání minikalkulátorů ve vyučování matematice. Obsahuje tato doporučení:

V budoucnu se jako učební pomůcka mají užívat minikalkulátory. Nahrazují logaritmická pravítka a logaritmické tabulky, které trvale ztratily význam. Využití minikalkulátorů musí být ve vyučování kontrolováno. Může začít nejdříve v 7. třídě, až když jsou upevněny dovednosti spojené se čtyřmi základními početními výkony. Minikalkulátory jsou vhodné pro všechny formy vyučování, při řešení školních i domácích úloh i při zkouškách, avšak jen když se neporuší rovnost podmínek zkoušky.

Rozšíření minikalulátorů musí být spojeno s propracováním nových metod vyučování a jejich důsledků. Nelze připustit, aby vlivem minikalkulátorů došlo ke snížení dovedností žáků v oblasti čtyř základních početních výkonů. Při dalších početních výkonech, např. umocňování, odmocňování, je využití minikalkulátorů účelné již od začátku výkladu. Minikalkulátory umožňují, aby žáci v matematice experimentovali a řadu matematických pojmů budovali na konkrétním numerickém základě. Úlohy z praxe mohou být zadávány věrohodněji, protože se již nemusí pracovat s příliš zaokrouhlenými čísly. Nebezpečí závislosti žáka na výpočetní technice se zmenšuje zvýšeným důrazem na pamětné počítání, odhady, i tím, že se zdůrazňují hranice možností minikalkulátorů.

Je třeba zajistit, aby studenti učitelství matematiky i učitelé matematiky znali činnost počítačů. Vytvoří se tím základ pro osvojení metod práce s nimi a zejména pro kritické využití výpočetní techniky ve vyučování. Především na učitelích záleží, zda se minikalkulátory i ve vyučování uplatní pozitivně.

Důležitou úlohu sehraje dlouhodobý výzkum, který se musí zabývat jak způsoby, tak důsledky využití minikalkulátorů při vyučování. Teprve po získání dostatečných zkušeností lze připustit změny v učebních osnovách [2].

To jsou tedy hlavní myšlenky stanoviska. Vyplývá z nich umírněný přístup k problému, který budeme v dohledné době řešit také u nás, ovšem v poněkud jiných podmínkách.

Literatura

[1] *Taschenrechner im Unterricht.* Der mathematische un naturwissenschaftliche Unterricht, roč. 1978, č. 3.

[2] *Stellungnahme zum Einsatz von Taschenrechnern im Mathematikunterricht.* Der mathematische und narutwissenschaftliche Unterricht, roč. 1978, č. 5.

Speciální teorie relativity ve fyzice na střední škole

(K 100. výročí narození A. Einsteina)

Josef Fuka, Olomouc

V březnu 1979 oslavil celý kulturní svět sté výročí narození geniálního fyzika A. Einsteina, vynikajícího vědce a člověka. Když v r. 1905 publikoval Einstein pojednání *K elektrodynamice pohybujících se těles*, kde vyložil základní myšlenky své speciální teorie relativity (STR), vzbudily tyto jeho revoluční ideje, jeho nové nazírání na fyzikální pojmy, zákony a jevy, velké rozpaky, ba u mnohých fyziků značný odpor a nedůvěru. Někteří fyzikové dokonce výslovně s jeho názory nesouhlasili. Nakonec, jak víme, STR našla plné oprávnění, neboť přispěla nejen k rozvoji fyzikální teorie, ale našla záhy i uplatnění v praxi.

V průběhu doby se ukázal vědecký a praktický význam STR a zejména její výchovně vzdělávací hodnota. Nelze se proto divit, že se v různých zemích světa a také u nás objevily snahy zařadit základní poznatky STR mezi povinné učivo na středních školách. Avšak tak jako původně teorie sama, tak také její zavedení do středoškolského kursu fyziky vyvolávalo a vyvolává odpor, ba nesouhlas některých didaktiků fyziky. U nás je STR nejmladším dítkem našich osnov fyziky pro gymnázia a lze říci, že zatím je to více méně „l'enfant terrible" výuky fyziky na našich středních školách. Je ovšem nutné přiznat, že zavedení STR do vyučování fyzice na střední škole přineslo s sebou mnohé didaktické problémy.

Chtěl bych se v další části tohoto příspěvku zmínit o úsilí didaktiků fyziky u nás i v zahraničí zavést do středoškolského kursu fyziky, jako povinné učivo, základní poznatky Einsteinovy speciální teorie relativity, dále se stručně zmínit o důvodech pro její zavedení do osnov fyziky na střední škole a konečně zcela krátce pojednat o postupném vývoji soustavy STR u nás.

1. Úvod

Problematika vyučování fyzice je středem zájmu učitelů fyziky a především vědeckých pracovníků v didaktice fyziky i ve fyzice samé. Jde především o to, aby školská fyzika odpovídala současnému stavu vědy a aby plnila jako vyučovací předmět všechny úkoly a cíle, které jsou jí ukládány zejména z hlediska odborného a všeobecně vzdělávacího, výchovného a ideově politického. Ukazuje se však v celosvětovém měřítku, že s výukou fyziky