Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ladislav Mišík
Derivácia a spojitosť

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 16 (1971), No. 6, 301--310

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137648`

DERIVÁCIA A SPOJITOSŤ*)

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

Tento článok sa zaoberá troma problémami: 1. súvisom bodov nespojitosti s diferenciálnymi vlastnostiami funkcie, 2. otázkou bodov nespojitosti funkcie a 3. niektorými špeciálnymi funkciami.

Kvôli stručnejšiemu a ľahšiemu vyjadrovaniu zavedieme nasledujúce označenia:
$f : I \to (-\infty, \infty)$ reálna funkcia definovaná na intervale I;
C_f množina bodov spojitosti funkcie f;
D_f množina bodov nespojitosti funkcie f;
Δ_f^* množina bodov, v ktorých existuje konečná alebo nekonečná derivácia funkcie f;
Δ_f množina bodov, v ktorých existuje konečná derivácia funkcie f;
$\Delta_f^{(\infty)}$ množina bodov, v ktorých existuje derivácia funkcie f a je rovná ∞;
$\Delta_f^{(-\infty)}$ množina bodov, v ktorých existuje derivácia funkcie f a je rovná $-\infty$;
$H_a(f)$ množina bodov, v ktorých funkcia f nadobúda hodnotu a;
$|A|$ bude znamenať vonkajšiu Lebesgueovu mieru množiny A;
card A bude znamenať kardinálne číslo množiny A.

Pretože budeme potrebovať aj Diniho derivované čísla, pripomenieme si ich definíciu. Čísla

$$\underline{f}'^{-}(x) = \liminf_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

$$\bar{f}'^{-}(x) = \limsup_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

$$\underline{f}'^{+}(x) = \liminf_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

$$\bar{f}'^{+}(x) = \limsup_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

sa nazývajú Diniho derivovanými číslami funkcie f v bode x.

Celkom v krátkosti pripomenieme si aj definíciu vonkajšej Lebesgueovej miery na priamke a lebesgueovsky merateľných množín na priamke. *Vonkajšia miera $|A|$ množiny A reálnych čísel je infimum množiny čísel $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n|$, kde $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, J_n sú otvorené intervaly pre $n = 1, 2, 3, \dots$ a $|J_n|$ je dĺžka intervalu J_n. Množina A sa volá lebesgueovsky merateľná, ak pre každú množinu B reálnych čísel platí*: $|B| = |B \cap A| + |B - A|$. Ak A je lebesgueovsky merateľná, číslo $|A|$ sa volá Lebesgueovou mierou množiny A.

*) Prednesené na II. konferencii slovenských matematikov v Jasnej 1970.

Keďže v článku sa budú vyskytovať otázky veľkostí množín z hľadiska ich mohutnosti, z hľadiska topológie a z hľadiska Lebesgueovej miery, je dobré si uvedomiť, aké paradoxné situácie tu môžu nastávať. Každá podmnožina intervalu I môže mať mohutnosť najviac mohutnosti kontinua, a preto z hľadiska mohutností „malými" množinami sú množiny, ktoré sú najviac spočetné. Zrejme z tohto hľadiska „najmenšou" je prázdna množina.

Aj z hľadiska topologického je prázdna množina „najmenšia". Po nej z hľadiska topologického považujeme za „najmenšie" také podmnožiny intervalu I, ktorých uzávery neobsahujú žiadny otvorený interval. Takéto množiny nazývame *nikde hustými množinami v intervale I*. Od nich za „väčšie" považujeme spočetné zjednotenia takýchto nikde hustých podmnožín v intervale I a nazývame ich *množinami prvej kategórie v intervale I v zmysle Bairea* alebo krátko *množinami prvej kategórie v intervale I*. Podmnožina intervalu I, ktorá nie je prvej kategórie v intervale I, sa nazýva *množinou druhej kategórie v intervale I*. Je známe, že každý otvorený alebo uzavretý interval v intervale I je množina druhej kategórie v intervale I. Vyplýva to z Baireovej vety o kategóriach ([19], str. 320). Množiny druhej kategórie v intervale I môžu byť také, že ich komplement vzhľadom na interval I je druhej kategórie alebo prvej kategórie v intervale I. Tie množiny druhej kategórie v intervale I, ktorých komplement vzhľadom na interval I je prvej kategórie, tzv. *reziduálne množiny v I*, považujeme z topologického hľadiska za „väčšie" než tie množiny druhej kategórie v intervale I, ktorých komplement vzhľadom na I je druhej kategórie v intervale I.

Z hľadiska Lebesgueovej miery je zas „najmenšou" množinou množina prázdna. Prirodzene veľkosť merateľných množín z hľadiska Lebesgueovej miery posudzujeme podľa veľkostí ich miery. Po prázdnej množine sú „najmenšími" merateľnými množinami z hľadiska Lebesgueovej miery tie merateľné množiny, ktorých Lebesgueova miera je 0. Z hľadiska Lebesgueovej miery „najväčšími" merateľnými množinami sú merateľné množiny, ktorých miera je rovná „plnej" miere, t. j. miera ich komplementu vzhľadom na interval I má mieru 0.

Teda môžeme urobiť tieto prehľadné schémy:

Usporiadanie podmnožín intervalu I podľa „veľkosti" vzhľadom na mohutnosť: $\emptyset$, t. j. prázdna množina; najviac spočetné, mohutnosti kontinua.

Usporiadanie podmnožín intervalu I podľa „veľkosti" vzhľadom na topológiu: $\emptyset$, nikde husté v I, prvej kategórie v I, druhej kategórie v I, reziduálne v I.

Usporiadanie podmnožín intervalu I podľa „veľkosti" vzhľadom na Lebesgueovu mieru:

$\emptyset$, miery 0, kladnej miery a komplement vzhľadom na I tiež kladnej miery, „plnej" miery.

Paradoxné situácie čo sa týka veľkostí množín možno najlepšie popísať pomocou *dyadických diskontinuí* ([15], str. 134). Tvoria sa podobným spôsobom ako Cantorovo diskontinuum, t. j. ako prienik postupností neprázdnych uzavretých podmnožín uzavretého intervalu, pričom nasledujúca z týchto množín vznikne z predchádzajúcej tým, že z každej komponenty tejto vynecháme vhodný otvorený interval.

Toto vynechávanie vhodných otvorených intervalov môžeme tak urobiť, že Lebesgueova miera tohoto dyadického diskontinua je rovná číslu a, kde a je nezáporné číslo menšie ako Lebesgueova miera intervalu I ([15], str. 135). *Každé takéto dyadické diskontinuum je nikde hustá v intervale I a perfektná množina*, t. j. *uzavrená, v sebe hustá, a je teda mohutnosti kontinua* ([15], str. 135). Teda dyadické diskontinuum je topologicky „malá" množina — nikde hustá v intervale I — a vzhľadom na mohutnosť „veľká" množina, zatiaľčo napr. množina racionálnych čísel v intervale I je spočetná, teda vzhľadom na mohutnosť „malá", ale je topologicky „väčšia" ako dyadické diskontinuum, pretože je prvej kategórie v I. Ak v intervale $I = \langle 0, 1 \rangle$ vezmeme dyadické diskontinuá C_n také, že $|C_n| = 1 - 1/n$, je množina $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ prvej kategórie v intervale I a „plnej" miery v intervale I, je totiž $|A| = 1$. Komplement $I - A$ vzhľadom na interval I je množina reziduálna v I a Lebesgueovej miery 0. Teda A je „menšia" ako $I - A$ vzhľadom na topológiu, ale „väčšia" vzhľadom na Lebesgueovu mieru.

Ak teda máme vyšetrovať „velkosť" výnimočných množín podľa týchto troch hľadísk, musíme si byť vedomí takýchto paradoxných situácií. O základných pojmoch z teórie množín a topológie môže čitateľ získať informácie aj z knihy [1].

Pripomeňme si ešte definíciu množín typu G_δ a F_σ. Podmnožina A intervalu I je typu $G_\delta(F_\sigma)$, ak je prienikom (zjednotením) postupnosti otvorených (uzavrených) podmnožín intervalu I.

Prv než by sme pristúpili k vlastnej problematike, spomenuli by sme tri vety, ktoré majú úzky súvis s našou problematikou.

Veta 1. (W. H. Young (1903)) *Pre každú funkciu f je C_f typu G_δ a D_f typu F_σ* ([15], str. 251 a 304).

Veta 2. (V. Jarník [17]) *Ak funkcia f má v každom bode z I deriváciu (konečnú alebo nekonečnú), je f' z prvej Baireovej triedy*, t. j. *limitou postupnosti spojitých funkcií.*

Veta 3. (R. Baire (1899)) *Funkcia f je z prvej Baireovej triedy vtedy a len vtedy, keď parciálna funkcia f/P má aspoň jeden bod spojitosti v množine P pre každú perfektnú množinu P* ([2], [19], str. 326).

1.

Je dobre známe, že funkcia majúca v bode x konečnú deriváciu, je v bode x spojitá. Teda $\Delta_f \subset C_f$ alebo $D_f \subset (I - \Delta_f^*) \cup (\Delta_f^* - \Delta_f)$. Funkcia v bode nespojitosti môže mať deriváciu, napr. $f(x) = \operatorname{sign} x$ má všade deriváciu a platí pre ňu: $f'(x) = 0$ pre $x \neq 0$ a $f'(0) = \infty$. Čo možno všeobecne povedať o množine D_f? O celej množine D_f nemožno všeobecne (okrem tvrdenia W. H. Younga) nič povedať. Možno však vždy niečo povedať o jeho časti obsaženej v $\Delta_f^* - \Delta_f$. Množinu D_f možno rozložiť na dve disjunktné časti, a to $D_f^{(1)} = D_f \cap (I - \Delta_f^*)$ a $D_f^{(2)} = D_f \cap (\Delta_f^* - \Delta_f)$. O časti $D_f^{(2)}$ A. L. Brudno dokázal, že je vždy najviac spočetná.

Veta 4. (A. L. Brudno [6]) *Platí*: card $D_f^{(2)} \leqq \aleph_0$.

Táto veta ihneď vyplýva z jednej inej vety W. H. Younga ([29]): *Každá funkcia má najviac spočetne mnoho bodov asymetrie.* Každý bod z $D_f^{(2)}$ je totiž bodom asymetrie v zmysle W. H. Younga, a teda card $D_f^{(2)} \leqq \aleph_0$. *Bod x je bodom asymetrie funkcie f v zmysle W. H. Younga, ak* $\{\alpha$: existuje $x_n \in I$, $x_n < x_{n+1}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ a $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\} \neq \{\alpha$: existuje $x_n \in I$, $x_n > x_{n+1}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha\}$. Totiž pre každý bod $x \in D_f \cap \Delta_f^{(\infty)}$ platí: $\limsup\limits_{t\to x^-} f(t) \leqq f(x) \leqq \liminf\limits_{t\to x^+} f(t)$ a $\liminf\limits_{t\to x^-} f(t) < \limsup\limits_{t\to x^+} f(t)$ a pre každý bod $x \in D_f \cap \Delta_f^{(-\infty)}$ platí: $\liminf\limits_{t\to x^-} f(t) \geqq f(x) \geqq \limsup\limits_{t\to x^+} f(t)$ a $\limsup\limits_{t\to x^-} f(t) > \liminf\limits_{t\to x^+} f(t)$. Teda každý bod x z $D_f^{(2)}$ je bodom asymetrie.

Z vety A. L. Brudna ihneď vyplýva táto veta:

Veta 5. (Z. Zahorski [31]) *Ak funkcia f nemá deriváciu (konečnú ani nekonečnú) v najviac spočetne mnoho bodoch, množina bodov nespojitosti funkcie f je najviac spočetná, a teda funkcia f je z prvej Baireovej triedy*, t. j. card $(I - \Delta_f^*) \leqq \aleph_0 \Rightarrow$ card $D_f \leqq \aleph_0 \Rightarrow$ *f je z prvej Baireovej triedy.*

Z poslednej vety je zrejmý dôsledok: *Ak množina bodov nespojitosti funkcie f je nespočetná, je množina bodov, v ktorých funkcia f nemá deriváciu (konečnú ani nekonečnú), nespočetná*, t. j. card $D_f > \aleph_0 \Rightarrow$ card $(I - \Delta_f^*) > \aleph_0$.

V súvislosti s týmto treba spomenúť, že B. Bojarski ([3]) a G. Piranian ([25]) dokázali, že *pre každú spočetnú množinu E typu G_δ existuje neklesajúca funkcia f, ktorá má v bodoch množiny E deriváciu ∞ a v bodoch nepatriacich do množiny E deriváciu rovnú* 0.

Z Brudnovovej vety je jasné, že charakter množiny bodov nespojitosti podstatne závisí od množiny $D_f^{(1)}$. *Tak množina D_f je nespočetná, ak $D_f^{(1)}$ je nespočetná, má Lebesgueovu mieru* 0, *ak má Lebesgueovu mieru* 0 *množina $I - \Delta_f^*$ a je prvej kategórie v intervale I, ak $I - \Delta_f^*$ je prvej kategórie v intervale I.*

Tvrdenie $\Delta_f \subset C_f$ ukazuje, že množina D_f vplýva istým spôsobom na charakter množiny Δ_f. Tak je napr. Δ_f *prvej kategórie v intervale I, ak funkcia f má všade deriváciu a množina bodov nespojitosti funkcie f je hustá v intervale I*, t. j. $\Delta_f^* = I$ a $\bar{D}_f = I$. Vtedy je totiž $D_f \subset \Delta_f^{(\infty)} \cup \Delta_f^{(-\infty)}$ (lebo $I - \Delta_f^* = \emptyset$) a teda $I = \bar{D}_f = \overline{\Delta_f^{(\infty)} \cup \Delta_f^{(-\infty)}}$. Pretože f' existuje na celom intervale I a pretože f' je z prvej Baireovej triedy, je $\Delta_f^{(\infty)} \cup \Delta_f^{(-\infty)}$ množina typu G_δ. Keďže $\Delta_f^{(\infty)} \cup \Delta_f^{(-\infty)}$ je hustá v intervale I a typu G_δ, je reziduálna v intervale I, a preto Δ_f je prvej kategórie v intervale I. Neskôr ukážeme, že funkcie s takýmito vlastnosťami skutočne existujú.

Je zrejmé, že pre každý bod x nespojitosti funkcie f platí: buď $\liminf\limits_{t\to x^-} f(t) \neq f(x)$, alebo $\limsup\limits_{t\to x^+} f(t) \neq f(x)$, alebo $\liminf\limits_{t\to x^+} f(t) \neq f(x)$, alebo $\limsup\limits_{t\to x^+} f(t) \neq f(x)$. Z toho sa ľahko odvodí, že pre každý bod nespojitosti funkcie f platí: buď $|\underline{f}'^-(x)| = \infty$, alebo $|\bar{f}'^-(x)| = \infty$ alebo $|\underline{f}'^+(x)| = \infty$, alebo $|\bar{f}'^+(x)| = \infty$. Teda $D_f \subset \{x :$ sup

$(|\underline{f}'^-(x)|, |\bar{f}'^-(x)|, |\underline{f}'^+(x)|, \bar{f}'^+(x)|) = \infty\} = \tilde{\Delta}_f$, kde $\underline{f}'^-(x), \bar{f}'^-(x), \underline{f}'^+(x)$ a $\bar{f}'^+(x)$ sú Diniho derivované čísla. O poslednej množine $\tilde{\Delta}_f$ dokázal W. H. Young ([30] a lema I. z [6]), že je množinou typu G_δ. Je zrejmé, že $\Delta_f \subset I - \tilde{\Delta}_f$. Z tvrdenia W. H. Younga, že $\tilde{\Delta}_f$ je množina G_δ a z poslednej inklúzie je zrejmé, že Δ_f je prvej kategórie v intervale I, ak množina $\tilde{\Delta}_f$ je hustá v intervale I (táto množina je v tomto prípade reziduálna v intervale I). Z našich úvah je zrejmé, že $\bar{D}_f = I \Rightarrow \tilde{\Delta}_f$ je hustá v intervale I, a teda Δ_f je prvej kategórie v intervale I. Takto dostávame vetu M. K. FORTA JR.:

Veta 6. (M. K. Fort Jr. [12]) *Pre funkciu s hustou množinou bodov nespojitosti je množina bodov, v ktorých existuje konečná derivácia, prvej kategórie v intervale I,* t. j. $\bar{D}_f = I \Rightarrow \Delta_f$ *je prvej kategórie v I.*

Z tvrdenia W. H. Younga dá sa odvodiť aj veta S. ĆETKOVIĆA ([7]): *Ak množina bodov spojitosti funkcie f a množina bodov nespojitosti funkcie f sú husté v I, je mohutnosť množiny všetkých bodov spojitosti, v ktorých f nemá konečnú deriváciu, v každom podintervale J intervalu I mohutnosti kontinua*, t. j. $\bar{D}_f = \bar{C}_f = I \Rightarrow$ $\Rightarrow (J$ interval $\subset I \Rightarrow$ card $((C_f - \Delta_f) \cap J) = 2^{\aleph_0})$.

Kým vety, ktoré sme zatiaľ spomínali dávali ohraničenie „veľkosti" v topologickom zmysle množiny Δ_f, podarilo sa F. M. FILIPCZAKOVI odvodiť tvrdenia, ktoré dávajú ohraničenie „veľkosti" množiny Δ_f^* v topologickom zmysle.

Veta 7. (F. M. Filipczak [10] a [11]) *Ak množina bodov nespojitosti funkcie f je v každom podintervale J intervalu I mohutnosti kontinua, je množina bodov, v ktorých existuje derivácia (konečná alebo nekonečná) funkcie f, prvej kategórie Bairea v intervale I,* t. j. $(J$ interval $\subset I \Rightarrow$ card $(D_f \cap J) = 2^{\aleph_0}) \Rightarrow \Delta_f^*$ *je prvej kategórie v I.*

Existujú však aj výsledky v obrátenom smere, t. j. zo znalosti, že Δ_f^* je v topologickom zmysle veľmi silné, súdi sa na ohraničenie množiny bodov nespojitosti. Tak K. M. GARG dokázal:

Veta 8. (K. M. Garg [13]) *Ak množina bodov, v ktorých funkcia f má konečnú alebo nekonečnú deriváciu, je reziduálna v intervale I, je množina bodov nespojitosti prvej kategórie v I a existuje taký systém navzájom disjunktných intervalov $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, že $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ a na každom intervale J_n má funkcia f skoro všade konečnú deriváciu,* t. j. Δ_f^* *je reziduálna v $I \Rightarrow D_f$ je prvej kategórie v I a existuje disjunktný systém $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ intervalov, že $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$* a $|J_n - \Delta_f| = 0$ *pre každé n.*

F. M. Filipczakovi sa však podarilo v takýchto prípadoch, t. j. keď Δ_f^* je reziduálna v I, úplne charakterizovať množinu bodov nespojitosti funkcie f.

Vety existenčného rázu týkajúce sa tejto problematiky môže čitateľ nájsť v článkoch [10], [11], [13], [20] a [21].

2.

Často prvé predstavy študenta pri pojme derivácie sú spojené s predstavou jej spojitosti. V prípade konečnej alebo nekonečnej derivácie už derivácia funkcie $f(x) = \operatorname{sign} x$ predstavuje nespojitú funkciu, totiž $f'(x) = 0$ pre $x \neq 0$ a $f'(0) = \infty$. V prípade konečnej derivácie taký jednoduchý príklad v jednom bode nespojitej derivácie nejakej funkcie poskytuje derivácia funkcie $\varphi(x) = x^2 \sin 1/x$ pre $x \neq 0$ a $\varphi(0) = 0$. Jej derivácia je funkcia $\varphi'(x) = 2x \sin 1/x - \cos 1/x$ pre $x \neq 0$ a $\varphi'(0) = 0$. Keďže $\varphi'(1/2n\pi) = -1$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $\varphi'(0) = 0$, nie je derivácia φ' v bode 0 spojitá.

Ale už v roku 1875 zostrojil G. DARBOUX ([8]) deriváciu funkcie, ktorá je nespojitá v každom racionálnom čísle. Jeho konštrukcia využíva nasledovné známe tvrdenie: Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na intervale I rovnomerne konverguje a ak funkcie $f_n(x)$ sú deriváciami na I nejakých funkcií pre každé n, potom aj súčet $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je derivácia nejakej funkcie. Za funkciu $f_n(x)$ G. Darboux bral v svojom príklade funkciu a_n/n $(\varphi(\sin(n\pi x))'$, t. j. funkciu, ktorej hodnota v čísle x v prípade $|nx| \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$ je $\pi a_n \cos(n\pi x)\,(2n\pi x \sin(1/\sin(n\pi x)) - \cos(1/\sin(n\pi x)))$ a pre ostatné čísla x je 0. Konštanty a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sa pritom tak volia, aby nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bol absolútne konvergentný. Keďže pre čísla x splňajúce nerovnosť $|x| \leqq 1$ je $|\varphi'(x)| < 3$, je rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na $(-\infty, \infty)$ rovnomerne konvergentný, a teda jeho súčet je derivácia na $(-\infty, \infty)$ nejakej funkcie.

Keďže $f_n(x)$ je všade spojitá okrem bodov tvaru m/n, kde m je celé číslo, sú funkcie $f_n(x)$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ spojité v každom iracionálnom čísle, a pretože rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na $(-\infty, \infty)$ rovnomerne konverguje, je súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ funkcia spojitá v každom iracionálnom čísle. To, že súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je v racionálnych číslach nespojitá funkcia G. Darboux nedokazoval, to len tvrdil. Dôkaz tohoto tvrdenia možno nájsť v článku [14]. Tu I. HALPERIN poznamenáva, že funkciu tohoto typu možno dostať aj pomocou jednoduchšej funkcie. Funkcia f definovaná na $(-\infty, \infty)$ nasledovne: $f(x) = \cos 1/x$ pre $x \neq 0$ a $f(0) = 0$ je deriváciou funkcie g definovanej nasledovne: $g(x) = \int_0^x 2t \sin 1/t \,\mathrm{d}t - x^2 \sin 1/x$ pre $x \neq 0$ a $g(0) = 0$. Voľme prostú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f(x - a_n)$ je na $(-\infty, \infty)$ rovnomerne konvergentný, a teda jeho súčet je deriváciou nejakej funkcie. Množinou bodov nespojitosti tejto derivácie je práve množina $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ čísel.

Z predchádzajúceho príkladu vidieť, že *pre každú najviac spočetnú množinu A reálnych čísel existuje funkcia f, ktorej derivácia existuje všade a ktorej množina*

$D_{f'}$ *bodov nespojitosti derivácie je práve množina A. Vzniká otázka, či môže byť množina bodov nespojitosti derivácie existujúcej na nejakom intervale nejakej funkcie nespočetná.* Ukazuje sa, že áno. Prvý takýto príklad udal už v roku 1881 G. VOLTERRA ([28]). Tento príklad má však ďalšiu vlastnosť. *Je to ohraničená derivácia, ktorej Riemannov integrál neexistuje.* Volterrov príklad je zhruba nasledovný:

Nech $I = \langle 0, 1 \rangle$, $0 < \varepsilon < 1$ a P je nikde hustá perfektná množina v I, ktorej komplement má Lebesgueovu mieru menšiu ako ε. Nech pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ $I_n = (a_n, b_n)$ sú všetky komponenty komplementu P, t. j. $I - P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{I_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, I_n sú otvorené intervaly pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $I_n \cap I_m = \emptyset$ pre $n \neq m$.

Definujme funkciu $f : I \to (-\infty, \infty)$ nasledovne: Pre $x \in P$ kladieme $f(x) = 0$. Označme $d_n = \max\{d : d \in \langle 0, \frac{1}{2}(b_n - a_n)), \varphi'(d) = 0\}$, kde $\varphi(x) = x^2 \sin 1/x$. Klaďme $f(x) = \varphi(x - a_n)$ pre $x \in (a_n, a_n + d_n)$, $f(x) = \varphi(d_n)$ pre $x \in \langle a_n + d_n, b_n - d_n \rangle$ a $f(x) = \varphi(b_n - x)$ pre $x \in (b_n - d_n, b_n)$. Je zrejmé, že $f'(x)$ existuje na každom intervale (a_n, b_n) a $f'(x) = \varphi'(x)$ pre $x \in (a_n, a_n + d_n)$, $f'(x) = 0$ pre $x \in \langle a_n + d_n, b_n - d_n \rangle$ a $f'(x) = -\varphi'(b_n - x)$ pre $x \in (b_n - d_n, b_n)$.

Nech $x \in P$. Ak je $x < a_n < u < b_n$ platí: $|[f(u) - f(x)]/(u - x)| < |\varphi(u - a_n)/(u - a_n)| \leqq u - a_n < d_n < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ pre $a_n < u < a_n + d_n$, $|[f(u) - f(x)]/(u - x)| = |\varphi(d_n)/(u - x)| \leqq d_n^2/(u - x) < d_n \leqq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ pre $a_n + d_n \leqq u \leqq b_n - d_n$ a $|[f(u) - f(x)]/(u - x)| = |\varphi(b_n - u)/(u - x)| \leqq d_n^2/(u - x) < d_n \leqq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ pre $b_n - d_n < u < b_n$. Ak je $a_n < u < b_n < x$, platí tiež $|[f(u) - f(x)]/(u - x)| < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$. Z toho sa ľahko odvodí, že $f'(x) = 0$ pre každé $x \in P$.

Keďže pre každé $x \in I$ je $|\varphi'(x)| < 3$, je aj $|f'(x)| < 3$. Teda f' je ohraničená funkcia na $\langle 0, 1 \rangle$ a Lebesgueova miera jej množiny $D_{f'}$ bodov nespojitosti má mieru väčšiu ako $1 - \varepsilon$. Preto *f' nie je riemannovsky integrovateľná.*

H. LEBESGUE ukázal, že množina bodov nespojitosti derivácie môže mať „plnú" mieru, t. j. $|D_{f'}| = |I|$. Konštrukcia takej derivácie je nasledovná: Nech P_n je dokonalá nikde hustá v intervale $I = \langle 0, 1 \rangle$ množina a taká, že $|I - P_n| < 1/n$ a nech f_n je funkcia Volterrovho typu. Položme $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{P_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ a $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n'(x)$, kde a_n sú také reálne čísla, pre ktoré rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konverguje. Potom h ako súčet rovnomerne konvergentného radu je derivácia nejakej funkcie. Ak $x_0 \in P$, označme $n_0 = \inf\{n : x_0 \in P_n\}$. Potom $h(x) - h(x_0) = \sum_{n=1}^{n_0 - 1} a_n(f_n'(x) - f_n'(x_0)) + a_{n_0}(f_{n_0}'(x) - f_{n_0}'(x_0)) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n(f_n'(x) - f_n'(x_0))$. Zrejme platí: $\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{n_0 - 1} a_n . (f_n'(x) - f_n'(x_0)) = 0$. Ďalej je $|\lim_{x \to x_0} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n(f_n'(x) - f_n'(x_0))| \leqq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 6|a_n|$ a oscilácia funkcie $a_{n_0}(f_{n_0}'(x) - f_{n_0}'(x_0))$ v čísle x_0 je $2|a_{n_0}|$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má tú vlastnosť, že $|a_n| > 6 \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|$ pre každé n (napr. je tomu tak, ak volíme $a_n = 13^{-n}$), sú bodmi nespojitosti funkcie h všetky body z P. Keďže $|P| = 1$, je Lebesgueova miera množiny D_h bodov nespojitosti funkcie h (uvedomme si, že funkcia h je derivácia nejakej funkcie!) rovná 1 čiže množina D_h má „plnú" mieru.

Po týchto príkladoch, na ktorých sme si ilustrovali, aké môžu byť, čo sa týka mohutnosti a miery, množiny bodov nespojitosti derivácie, pristúpme k otázke, čo možno vo všeobecnosti povedať o množine bodov nespojitosti derivácie z hľadiska topologického. Z toho, že derivácia je z prvej Baireovej triedy, vyplýva, že množina bodov nespojitosti derivácie je množina prvej kategórie v intervale I. Množina bodov nespojitosti akejkoľvek funkcie je množina typu F_σ (veta 1.). Preto množina bodov nespojitosti derivácie je množina typu F_σ a prvej kategórie v intervale I. Ale obrátene, ak je daná množina E typu F_σ a prvej kategórie v I, vždy existuje derivácia f' funkcie f, ktorej množina $D_{f'}$ bodov nespojitosti, je práve množina E. Množinu E môžeme totiž písať ako spočetné zjednotenie nikde hustých v intervale I uzavretých množín E_n. Pre každú množinu E_n zostrojíme funkciu Volterrovho typu a metódou Lebesgueovou dostaneme deriváciu, ktorej množina bodov nespojitosti je práve množina E. Tým dostávame výsledok, ktorý ako vetu formulovali A. M. Bruckner a J. Leonard ([5]).

Veta 9. (A. M. Bruckner a J. Leonard ([5])) *Nutná a postačujúca podmienka, aby množina $E \subset I$ bola množinou bodov nespojitosti nejakej derivácie, je, aby E bola typu F_σ a prvej kategórie v I.*

V rámci tejto časti článku pripomenuli by sme si ešte jednu zaujímavú vec. Z. Zahorski ([32]) pri vyšetrovaní vlastností derivácií zaviedol niekoľko tried funkcií. Ako triedu $\mathcal{M}_1$ označoval triedu všetkých funkcií definovaných na intervale I z prvej Baireovej triedy s Darbouxovou vlastnosťou. Funkcia f reálnej premennej *má Darbouxovu vlastnosť, ak obraz pri funkcii f každého intervalu je súvislá množina.* Je známe, že každá derivácia funkcie s Darbouxovou vlastnosťou je funkcia z prvej Baireovej triedy s Darbouxovou vlastnosťou, teda z triedy $\mathcal{M}_1$. Ovšem trieda $\mathcal{M}_1$ je širšia trieda ako trieda všetkých derivácií s Darbouxovou vlastnosťou, existujú totiž funkcie z prvej Baireovej triedy s Darbouxovou vlastnosťou, ktoré nie sú deriváciami ([32]). G. Choquet ([16]) a I. Maximoff ([23] a [24]) dokázali, že *pre každú funkciu $f : \langle 0, 1 \rangle \to (-\infty, \infty)$ z prvej Baireovej triedy s Darbouxovou vlastnosťou existuje rastúca spojitá funkcia $h : \langle 0, 1 \rangle \to \langle 0, 1 \rangle$ tak, že $h(0) = 0$ a $h(1) = 1$ a složená funkcia $f(h(x))$ je derivácia nejakej funkcie.* Táto veta ukazuje, že z istého topologického hľadiska sú funkcie z prvej Baireovej triedy s Darbouxovou vlastnosťou „ekvivalentné" deriváciam funkcií.

3.

Ak funkcia $f : I \to (-\infty, \infty)$ má v I hustú hladinovú množinu $H_a(f)$ pre nejaké číslo a, potom zrejme $C_f \subset H_a(f)$. V roku 1887 udal J. Köpcke ([17]) *príklad funkcie f, ktorá mala všade ohraničenú deriváciu a množiny $\{x : f'(x) > 0\}$ a $\{x : f'(x) < 0\}$ sú husté v intervale I.* A. Denjoy ([9]) uviedol štyri konštrukcie takýchto derivácií, t. j. derivácií, ktorých ako množina všetkých bodov, v ktorých je derivácia kladná, tak aj množina všetkých bodov, v ktorých je derivácia záporná, je hustá v intervale I. Pre derivácie týchto typov je $H_0(f')$ množinou hraničnou hustou v intervale I. Iný príklad derivácie takéhoto typu podal D. POMPEIU ([26]). Pomocou jednej vety É. Borela dokazuje tu D. Pompeiu, že funkcia $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt[3]{(x - d_n)}$, kde $a_n > 0$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ *má všade deriváciu, ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ *je konvergentný.* Pritom $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ znamená nejakú v intervale I hustú postupnosť reálnych čísel. S. MARCUS ([22]) zlepšil toto tvrdenie D. Pompeiua v tom zmysle, že *podmienku konvergencie radu* $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ *nahradil podmienkou konvergencie radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Funkcia zavedená D. Pompeiuom $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt[3]{(x - d_n)}$ má konečnú deriváciu vo všetkých bodoch, v ktorých rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - d_n)^{-2/3}$ konverguje a všade inde $f'(x) = \infty$. Keďže funkcia f je rastúca, existuje k nej inverzná funkcia g, ktorej množina $H_0(g')$ nulových bodov derivácie g' obsahuje množinu $\{f(d_1), f(d_2), f(d_3), \ldots\}$, čiže je hustá v intervale $f(I)$. Keďže množina $H_0(g')$ je súčasne množinou typu G_δ, pretože g' je z prvej Baireovej triedy, je $H_0(g')$ *reziduálna množina.*

Štúdiu Pompeiuových funkcií venoval S. Marcus citovaný článok [22], kde sa zavádzajú rôzne typy takýchto funkcií. Funkciu f *nazýva Pompeiuovou funkciou na intervale I, ak má na intervale I ohraničenú deriváciu a ak $H_0(f')$ je hraničná hustá množina v intervale I*, t. j. $\overline{H_0(f')} = \overline{I - H_0(f')} = I$. Pomocou jednej vety G. Choqueta ([16], str. 216) sa tu napr. dokazuje *existencia Pompeiuovej funkcie, ktorej derivácia je spojitá v každom bode danej v intervale I hraničnej a hustej množiny E typu G_δ a ktorej množina nulových bodov derivácie sa zhoduje s množinou E.* S. Marcus dokázal, že *derivácia každej Pompeiuovej funkcie nie je riemannovsky integrovateľná na žiadnom intervale J intervalu I.* Keď si uvedomíme, že spojitá funkcia je riemannovsky integrovateľná na každom uzavretom intervale a derivácie patria v Baireovej klasifikácii do najbližšej triedy po triede spojitých funkcií, vidíme silu tohto tvrdenia. Ovšem ešte silnejšie tvrdenie v tomto smere odvodil A. M. Bruckner ([4]). S. Marcus nazval funkciu f *funkciou typu P_2 na intervale I, ak má všade na I konečnú deriváciu a ak $H_0(f')$ je hraničná hustá množina v intervale I.* A. M. Bruckner v citovanom článku ukázal, že *existujú funkcie typu P_2, ktorých derivácie nie sú lebesgueovsky integrovateľné na intervale I.*

Literatúra

[1] ALEXANDROV P. S., *Úvod do obecné theorie množin a funkcí*, Praha NČSAV, 1954.

[2] BAIRE R., Sur les fonctions d'une variable réelle, Annali di Matematica (3) *3*, (1889), 1—122.

[3] BOJARSKI B., Sur la dérivée d'une fonction discontinue, Ann. Soc. Polon. Math. *24* (1951), 190—191.

[4] BRUCKNER A. M., On derivatives with a dense set of zeros, Revue Roum. Math. Pures et Appl. *10* (1965), 149—153.

[5] Bruckner A. M., Leonard J., Derivatives, Am. Math. Monthly *73*, No *4*, Part II (1966), 1—56.
[6] Brudno A. L., Nepreryvnosť i differencirujemosť, Mat. Sb. *13* (55) (1943), 119—134.
[7] Ćetković S., Differentiabilité des fonctions continues dans les points partout densement disposés, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie *10* (1958), 85—94.
[8] Darboux G., Mémoire sur les fonctions discontinues, Annales Scient. de l'École Norm. Sup. 2^e série *4* (1875), 57—112.
[9] Denojy I. A., Sur les fonctions dérivées sommables, Bull. de la Soc. Math. France *43* (1915), 161—248.
[10] Filipczak F. M., On the derivative of a discontinuous function, Coll. Math. *13* (1964), 73—79.
[11] Filipczak F. M., On the derivative of a discontinuous function, Bull. Acad. Polon. Sciences *12* (1964), 535—537.
[12] Fort M. K., A theorem concerning functions discontinuous on a dense set, Amer. Math. Monthly *58* (1951), 408—410.
[13] Garg K. M., On the derivability of functions discontinuous at a dense set, Revue Roum. Math. Pures et Appl. *7* (1962), 175—179.
[14] Halperin I., Discontinuous functions with the Darboux property, Canad. Math. Bull. *2* (1959), 111—118.
[15] Hausdorff F., *Mengenlehre*, Berlin, Leipzig, 1935.
[16] Choquet G., Application des propriétés descriptives de la fonction contingent à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géometrie différentielle des variétés cartésiennes, Journ. Math. Pures Appl. *9* (26) (1947), 115—226.
[17] Jarník V., O derivaci funkcí jedné proměnné, Rozpravy II tř. České akad. věd a umění *32* (1923), č. *5*.
[18] Köpcke J., Über Differentierbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Funktionen, Math. Ann. *29* (1887), 123—140.
[19] Kuratowski C., *Topologie I*, Warszawa, 1952.
[20] Marcus S., Točki razryva i točki differencirujemosti, Revue Roum. Math. Pures et Appl. *2* (1957), 471—474.
[21] Marcus S., Točki razryva i točki v kotorych proizvodnaja javlaetsja beskonečnoj, Revue Roum. Math. Pures et Appl. *7* (1962), 309—318.
[22] Marcus S., Sur les dérivées dont les zeros forment un ensemble frontière partout dense, Rendiconti del Circ. Math. di Palermo *12* (1963), 1—36.
[23] Maximoff I., On continuous transformation of some functions into an ordinary derivative, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa *12* (1943), 147—160.
[24] Maximoff I., Sur la transformation continue de quelques fonctions en dérivées exactes, Bull. Soc. Phys. Math. Kazan (3) *12* (1940), 57—81.
[25] Piranian G., The derivative of a monotonic discontinuous function, Proc. Amer. Math. Soc. *16* (1965), 243—244.
[26] Pompeiu D., Sur les fonctions dérivées, Math. Ann. *63* (1906), 326—332.
[27] Sengupta H. M., Lahiri B. K., A note on derivatives of a function, Bull. Calcutta Math. Soc. *49* (1957), 189—191.
[28] Volterra G., Sui principii del calcolo integrale, Giorn. di Battaglini *19* (1881), 333—372.
[29] Young W. H., La symétrie de structure des fonctions de variables reélles, Bull. Soc. Math. *52* (1928), 265—280.
[30] Young W. H., On the infinite derivatives of a function of a single real variable, Arkiv for Astr. och Fysik *1* (1930), 201—204.
[31] Zahorski Z., Sur la classe de Baire des dérivées approximatives d'une fonction quelconque, Ann. Soc. Polon. Math. *21* (1948), 306—323.
[32] Zahorski Z., Sur la première dérivée, Trans. Amer. Math. Soc. *69* (1950), 1—54.