Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Miloslav Dušek

Poznámka k odrazu a lomu vln na rovinném rozhraní

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 43 (1998), No. 2, 136--138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137531

Poznámka k odrazu a lomu vln na rovinném rozhraní

Miloslav Dušek, Olomouc

V mnoha učebnicích optiky se při analýze lomu a odrazu rovinné harmonické vlny na rovinném rozhraní vychází z podmínek rovnosti frekvencí a rovnosti tečných složek (rovnoběžných s rozhraním) vlnového vektoru všech zúčastněných vln. Autoři se často odvolávají na experimentální zkušenost a fyzikální příčina zmíněných předpokladů nebývá obvykle příliš vysvětlována. Velice často se vyskytují formulace, jejichž smysl není zcela jasný. Např.: „je nezbytné, aby vlnoplochy tří vln byly ve stejné fázi nebo aby se lišily o konstantu" [1]. Výklad v Bornově a Wolfově „bibli optiky" [2] je srozumitelnější a fyzikálně uspokojivý. I ten však vychází z předpokladu, že dopadá-li na rozhraní rovinná vlna, pak i vlny lomená a odražená jsou obě rovinné, a z předpokladu, že na rozhraní musí být časové chování sekundárních polí shodné s chováním pole dopadajícího.

Zaměřme se pro jednoduchost na komplexní skalární pole splňující vlnovou rovnici. Každou „dostatečně rozumnou" vlnu můžeme rozložit na její fourierovské složky, a to jak vzhledem k časovým, tak prostorovým proměnným. To znamená, že každé radiační pole lze zapsat jako lineární superpozici rovinných vln o různých frekvencích šířících se různými směry (z nichž každá je řešením vlnové rovnice). Pokud budeme uvažovat pole „v krabici", bude počet přípustných rovinných vln (tj. modů záření) spočetný a superpozice budeme moci vyjádřit ve tvaru řad (v obecném případě bychom museli použít integrálního zápisu). Formálně můžeme celkové pole vždy rozdělit na tři složky odpovídající dopadající, „odražené" a „lomené" vlně tak, že v poloprostoru „nad" rozhraním bude pole dáno součtem dopadající a odražené vlny a v poloprostoru „pod" rozhraním bude totožné s lomenou vlnou. Za dopadající vlnu budiž zvolena rovinná vlna

$$A^{(i)} \exp \mathrm{i}(\omega^{(i)} t - \boldsymbol{k}^{(i)} \cdot \boldsymbol{r})$$

o frekvenci $\omega^{(i)}$, komplexní amplitudě $A^{(i)}$ a s vlnovým vektorem $\boldsymbol{k}^{(i)}$ (t je čas a $\boldsymbol{r}$ značí polohový vektor). Odraženou vlnu budeme označovat horním indexem (r), nebudeme ji předpokládat v žádném speciálním tvaru, a budeme ji proto psát jako obecnou superpozici rovinných vln

$$\sum A^{(r)} \exp \left[\mathrm{i}(\omega^{(r)} t - \boldsymbol{k}^{(r)} \cdot \boldsymbol{r})\right],$$

kde se sčítá přes všechny mody záření (tedy přes všechny vektory $\boldsymbol{k}^{(r)}$; amplitudy $A^{(r)}$ samozřejmě závisí na $\boldsymbol{k}^{(r)}$; $\omega^{(r)} = v|\boldsymbol{k}^{(r)}|$, kde v je rychlost šíření vln). Podobně lomenou

---

RNDr. Miloslav Dušek, Dr. (1964), Katedra optiky, Univerzita Palackého, 17. listopadu 50, 772 07 Olomouc.

vlnu označíme indexem (t) a zapíšeme ji jako následující superpozici rovinných vln

$$\sum A^{(t)} \exp\left[\mathrm{i}(\omega^{(t)}t - \boldsymbol{k}^{(t)} \cdot \boldsymbol{r})\right],$$

sčítá se opět přes všechny mody záření. Budeme ovšem předpokládat, že lomená i odražená vlna se šíří směrem od rozhraní (a nikoli naopak). Pokud tedy zvolíme takovou souřadnou soustavu, že rozhraní bude ležet v rovině x-y (kolmo k ose z v $z = 0$; kladný směr osy z budiž „nahoru"), znamená uvedený předpoklad následující omezení na znaménka složek vlnových vektorů kolmých k rozhraní:

$$k_z^{(r)} > 0, \quad k_z^{(t)} < 0 \tag{1}$$

(dopadající vlna se pochopitelně šíří směrem k rozhraní, tedy $k_z^{(i)} < 0$). Na rozhraní požadujeme spojitost pole a jeho prvních derivací[1]). Pro všechna t a všechna $\boldsymbol{r}'$ ležící v rovině rozhraní ($\boldsymbol{r}' = [x, y, 0]$) musí tedy platit (spojitost pole na rozhraní):

$$\begin{aligned} A^{(i)} \exp\left[\mathrm{i}(\omega^{(i)}t - \boldsymbol{k}^{(i)} \cdot \boldsymbol{r}')\right] + \sum A^{(r)} \exp\left[\mathrm{i}(\omega^{(r)}t - \boldsymbol{k}^{(r)} \cdot \boldsymbol{r}')\right] = \\ = \sum A^{(t)} \exp\left[\mathrm{i}(\omega^{(t)}t - \boldsymbol{k}^{(t)} \cdot \boldsymbol{r}')\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Časový průběh pole v libovolném místě rozhraní lze ovšem vyjádřit jako superpozici harmonických kmitů a rovnici (2) zapsat ve tvaru $\sum\limits_{\omega} \mathcal{A}_\omega(\boldsymbol{r}) \exp(\mathrm{i}\omega t) = 0$. Z jednoznačnosti Fourierova rozvoje plyne, že pokud $\sum\limits_{\omega} \mathcal{A}_\omega(\boldsymbol{r}) \exp(\mathrm{i}\omega t) = 0$ pro všechna t, pak $\mathcal{A}_\omega(\boldsymbol{r}) = 0$ pro všechna ω. Samozřejmě i prostorová závislost pole na rozhraní může být vyjádřena ve tvaru Fourierova rozvoje, takže na základě analogických úvah nakonec dojdeme k závěru, že amplitudy stojící ve vztahu (2) u „stejných" exponenciál musí dávat dohromady nulu. Tedy pro ty mody, pro které $\omega = \omega^{(i)}$ a $k_x = k_x^{(i)}$, $k_y = k_y^{(i)}$, musí platit (komplexní amplitudy $A^{(r)}$ a $A^{(t)}$ chápeme jako funkce ω, k_x a k_y):

$$A^{(i)} + A^{(r)} = A^{(t)}, \tag{3}$$

zatímco pro všechny ostatní

$$A^{(r)} = A^{(t)}. \tag{4}$$

Další podmínkou, jak bylo řečeno, je spojitost derivací pole na rozhraní. Novou informaci nám dá ovšem pouze derivace ve směru normály k rozhraní, tedy derivace

[1]) Kdybychom např. uvažovali kmitání struny vytvořené ze dvou různých materiálů, pak by tyto podmínky reprezentovaly předpoklad, že struna zůstane i na rozhraní obou materiálů spojitá a hladká. V případě elektromagnetického pole jsou tyto podmínky důsledkem podmínek pro pole na rozhraní, o čemž se stručně zmíníme dále.

podle z. Odtud dostaneme

$$\begin{aligned} &k_z^{(i)} A^{(i)} \exp\left[\mathrm{i}(\omega^{(i)}t - \boldsymbol{k}^{(i)} \cdot \boldsymbol{r}')\right] + \sum k_z^{(r)} A^{(r)} \exp\left[\mathrm{i}(\omega^{(r)}t - \boldsymbol{k}^{(r)} \cdot \boldsymbol{r}')\right] = \\ &\qquad = \sum k_z^{(t)} A^{(t)} \exp\left[\mathrm{i}(\omega^{(t)}t - \boldsymbol{k}^{(t)} \cdot \boldsymbol{r}')\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Postupem zcela stejným jako v předchozím odstavci zjistíme, že pro mody s $\omega = \omega^{(i)}$ a $k_x = k_x^{(i)}$, $k_y = k_y^{(i)}$ musí platit

$$k_z^{(i)} A^{(i)} + k_z^{(r)} A^{(r)} = k_z^{(t)} A^{(t)} \tag{6}$$

a pro všechny ostatní

$$k_z^{(r)} A^{(r)} = k_z^{(t)} A^{(t)}. \tag{7}$$

Vztah (6) představuje další rovnici nutnou pro určení amplitud lomené a odražené vlny. Rovnost (7) bude — vzhledem k rovnici (4) — splněna, když $A^{(r)} = A^{(t)} = 0$ nebo když $k_z^{(r)} = k_z^{(t)}$. Tato druhá podmínka je ovšem v rozporu s omezením (1). Proto **nenulové amplitudy mohou mít pouze mody (rovinné vlny) o frekvenci $\omega^{(i)}$, s vlnovými vektory, jejichž složky rovnoběžné s rozhraním jsou rovny $k_x^{(i)}$ a $k_y^{(i)}$.**

U reálného skalárního pole je situace analogická. Případ příčného vektorového elektromagnetického vlnění je formálně trochu složitější. Zobecnění od popsaného skalárního pole je však přímočaré. Podmínky spojitosti skalárního pole a jeho derivací jsou nahrazeny podmínkami spojitosti na rozhraní pro složky vektoru elektrického pole a vektoru magnetického pole rovnoběžné s rovinou rozhraní (proudová hustota na rozhraní se předpokládá nulová), tj. E_x, E_y, H_x a H_y. I zde dostaneme pouze tři rovinné vlny (obecně ovšem různě polarizované) o stejných frekvencích a rovných průmětech vlnového vektoru do roviny rozhraní.

Autor děkuje docentu Jaroslavu Pantoflíčkovi za podnět k sepsání této poznámky.

Literatura

[1] SALEH, B. E. A., TEICH, M. C.: *Základy fotoniky.* Matfyzpress, Praha 1994, svazek 1, s. 59.

[2] BORN, M., WOLF, E.: *Principles of Optics.* Pergamon Press, Oxford, 6. vyd. 1993, s. 37.