Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Dana Matoušová

O vyjadřování intensity osvětlení

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 6, 707--715

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137296

chyby. Statistická theorie byla také aplikována v souvislosti s velkými samočinnými počitači, kde zaokrouhlování se realisovalo skutečně jako náhodné veličiny (Forsythe) [5].

V článku omezili jsme se na nejjednodušší případy aplikace statistických method při numerickém počítání. Problematika s tím souvisící je podstatně širší. Cílem tohoto článku však bylo ukázat postup a hlavní myšlenky na nejjednodušších případech.

Literatura

[1] H. A. Rademacher, *On the accumulation of errors in processes of integration*, Ann. of Comp. Lab. of Harward Univ. Nat. Bur. Stand. Los Angeles.
[2] A. A. Abramov, *O vlijanii ošibok okruglenija pri rešenii uravněnija Laplacea*, Vyčislitělnaja matem. i techn., 1 (1953), 37—40.
[3] L. A. Ljusternik, *O schodimosti pri slučajnych načalnych,dannych i nakoplenii ošibok iteracionnogo processa rešenija sistěmi algebraičeskich uravněnij*, tamtéž, 41—45.
[4] H. D. Huskey, *On the procesion of a certain procedure of numerical integration, with an appendix by Douglas R., Hartree J.*, Res. Nat. Bur. Stand 42, 57—62 (1949).
[5] G. E. Forsythe, *Note on rounding-off errors*, Nat. Bur. Stand at Los Angeles. Prepublication copy (1950).
[6] B. V. Gněděnko, *Kurs těorii verojatnostěj*.
[7] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*.

O VYJADŘOVÁNÍ INTENSITY OSVĚTLENÍ

DANA MATOUŠOVÁ

Pro lepší prostorovou představu o zobrazovaných tělesech používáme často v technických aplikacích osvětlení, a to obyčejně osvětlení rovnoběžného. Ještě lepší představu o zobrazovaném tělese docílíme, když na zobrazované těleso narýsujeme čáry, spojující body o stejné intensitě osvětlení, buď skutečné, isofoty, nebo zdánlivé, isofengy. Jak se tyto křivky sestrojují je uvedené v některých učebnicích deskriptivní geometrie. Plošky, které vzniknou po sestrojení intensitních čar mezi sousedními isofotami či isofengami, pokládají se neutrální šedí. Pokládá se vždy více a více poloh od části nejvíce osvětlené až k mezi vlastního stínu. Za mezí vlastního stínu předpokládá se osvětlení paprsky odraženými od okolních předmětů, takže množství poloh od meze vlastního stínu zase ubývá. Množství poloh se řídí podle intensitní stupnice. Existuje několik takových stupnic, na př. Tilšerova, Wienerova, lze však odvoditi tuto stupnici i exaktně.

Tento způsob vyjádření intensity polohováním má však značné nevýhody. Výsledek je závislý na volbě šedé barvy. Volíme-li základní barvu na polohování příliš světlou, má to za následek, že plošky ležící mezi dvěma isofotami poblíže meze vlastního stínu nutno polohovat 20—30 $\times$, což má za potom následek rozmývání předcházejících poloh.

Bylo by tedy výhodnější použít pro vyjádření intensity osvětlení způsobu, který by byl sice exaktní, ale neměl při tom nevýhody nahoře uvedené. Tyto požadavky splňuje způsob vyjádření intensity osvětlení šrafováním. Ze zkušenosti víme, že ploška vyšrafovaná čarami tloušťky b ve vzájemné čisté vzdálenosti a činí z určité vzdálenosti dojem šedé. Chceme-li tímto způsobem vyjádřit intensitu osvětlení, musíme tento dojem přesně definovat.

Na vyšrafovanou plošku dopadají světelné paprsky. Paprsky dopadlé na pruh šířky a se odrážejí, paprsky dopadlé na pruh černé šrafy jsou pohlceny. Množství paprsků, které se odrazily, nazývejme transparencí T vyšrafované plochy. Každá vyšrafovaná plocha vyjadřuje zcela určitou intensitu osvětlení. Podle fysikální definice rozumíme intensitou osvětlení i množství světla Q, dopadlého na jednotku plochy za jednotku času. Abychom vyjádřili závislost mezi intensitou osvětlení a jejím vyjádřením pomocí šraf, vytkneme na nějaké ploše, osvětlované svazkem paprsků, dva body. První bod ať je osvětlen tak, že jeho intensita osvětlení je maximální $i_1 = 1$. Druhý nechť má intensitu i. Z fysikální definice osvětlení plyne

$$i_1 : i = Q_1 : Q\,, \tag{1}$$

kde Q_1, resp. Q značí množství světla, dopadlého na jednotku plochy za jednotku času.

Touto závislostí je vázána intensita osvětlení v prostoru. Má-li být dojem prostoru a obrazu stejný, musí tato závislost platit také v obrazu.

Množství světla Q_1 je dáno v obrazu transparencí plošky T_1, vyjadřující intensitu osvětlení i_1. Množství světla Q je pak dáno transparencí T, příslušnou intensitě i. Po dosazení do výrazu (1) vyjde

$$i = i_1 \cdot \frac{T}{T_1}\,. \tag{2}$$

Protože intensitu $i_1 = 1$ vyjadřuje plocha úplně bílá, jejíž $T_1 = 1$, můžeme dosadit do výrazu (2) $i_1 = 1$ a $T_1 = 1$. Tak vyjde

$$i = T. \tag{3}$$

Lze tedy vyslovit větu: *Určitou intensitu* i *vyjadřuje plocha, jejíž transparence se rovná vyjadřované intensitě.*

Transparenci plošky, vyšrafované čarami tloušťky b o světlé vzdálenosti a vyjadřuje pak množství odraženého světla, které je přímo úměrné vzdálenosti šraf a nepřímo úměrné celkové vzdálenosti šraf. Lze tedy psát

$$T = \frac{a}{a+b}\,. \tag{4}$$

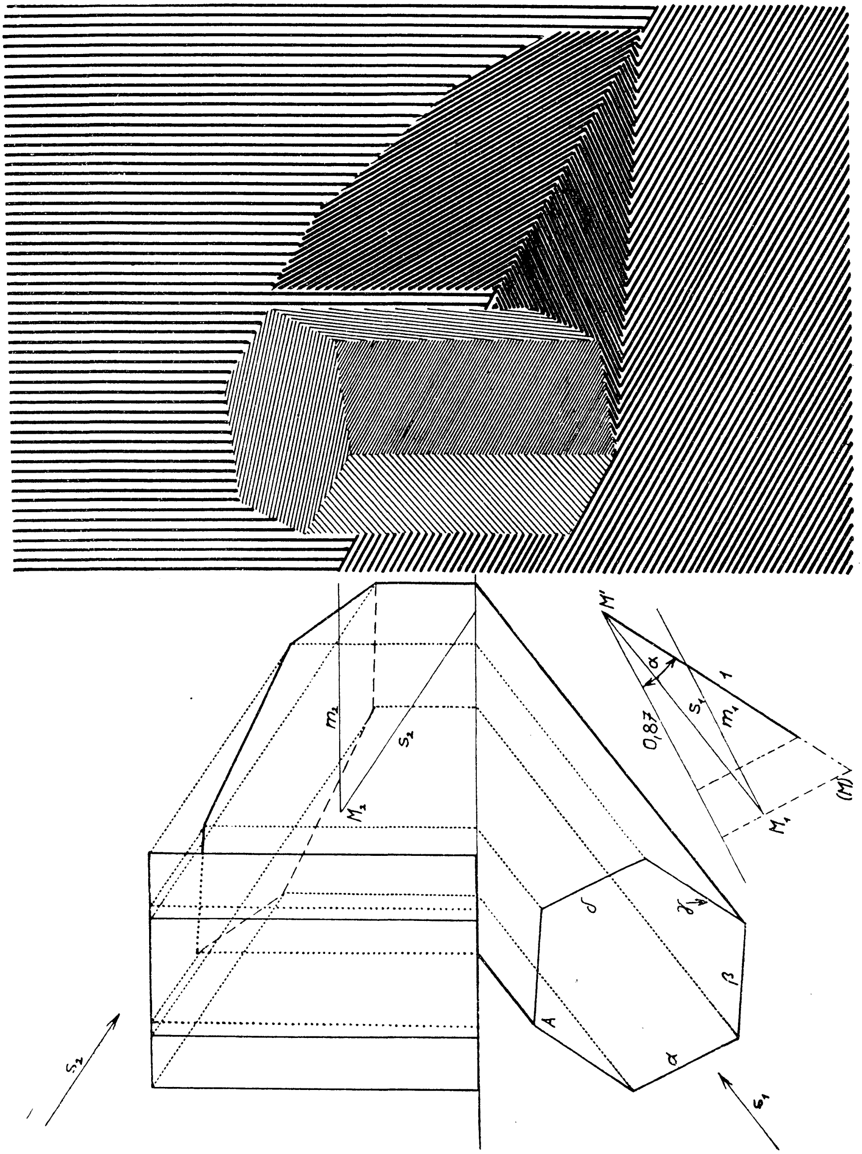
Pro bod maximálně osvětlený vychází při $b = 0$ $T = \frac{a}{a} = 1$ a pro bod na mezi vlastního stínu vychází při $a = 0$ $T = 0$. Spojením výrazů (3) a (4) vychází pro vyjádření intensity osvětlení tato závislost:

$$i = \frac{a}{a+b}\,. \tag{5}$$

Při praktickém vyjadřování intensity osvětlení šrafováním je výhodné užít šrafy tloušťky konstantní. Za tohoto předpokladu vychází pro a hodnota

$$a = b \cdot \frac{i}{1-i}\,. \tag{6}$$

Tímto způsobem lze vyjádřit intensitu osvětlení v kterémkoli bodě osvětlovaného tělesa. V té části tělesa, která leží ve vlastním stínu, předpokládá se osvětlení paprsky odraženými, jejichž intensita je značně menší než intensita paprsků dopadajících přímo na těleso. Proto intensita osvětlení bodů, ležících za mezí vlastního stínu, předpokládá se asi v hodnotě 1/3—1/2 intensity, která by příslušela uvažovanému bodu, kdyby byl osvětlen



a) b)

Obr. 1

přímo. Body ležící ve stínu vrženém jsou osvětleny pouze paprsky odraženými. Jejich intensitu osvětlení předpokládáme ještě menší než u bodů ležících ve stínu vlastním.

Při rovnoběžném osvětlení rovných ploch, příp. mnohostěnů, vycházíme ze skutečnosti, že intensita osvětlení rovná se cosinu úhlu dopadu světelných paprsků s jednotlivými stěnami.

Na *obr. 1* je provedeno rovnoběžné osvětlení přímého šestibokého hranolu, stojícího na půdorysně. Osvětlení provedeno na *obr. 1a* v promítání na dvě průmětny a přeneseno na *obr. 1b* do isometrie, kde bylo provedeno vyšrafování.

Pro rovinu α volena tloušťka šrafy $b = 0{,}2$ mm. Pak ze vzorce (6) vychází pro rovinu α světlá vzdálenost šraf

$$a_\alpha = 0{,}2 \cdot \frac{0{,}87}{1 - 0{,}87} = 1{,}34,$$

kde 0,87 je hodnota cosinu úhlu normály roviny α a směru rovnoběžného osvětlení s, která byla stanovena jak patrno z *obr. 1a* graficky tak, že libovolným bodem M vedena rovnoběžka se světelným paprskem s a rovnoběžka m s normálou k rovině α. Ve sklopení roviny $\sigma \equiv (s, m)$ určen pak graficky cosinus hodnotou 0,87. Obdobně pro rovinu β, kde cosinus úhlu světelného paprsku s normálou k rovnině β má hodnotu 0,6. Světlá vzdálenost šraf pro rovinu β činí $a_\beta = 0{,}30$ pro $b = 0{,}2$ mm; pro rovinu γ vychází $a_\gamma = 0{,}08$ mm [$b = 0{,}2$ mm], pro rovinu δ činí $a_\delta = 0{,}15$ [$b = 0{,}2$ mm]. Pro rovinu π je světlá vzdálenost šraf $a_\pi = 0{,}46$ [$b = 0{,}5$ mm], pro druhou průmětnu ν je $a_\nu = 0{,}9$ [$b = 0{,}5$ mm]. Stín na $\pi : a_{\pi'} = 0{,}05$ [$b = 0{,}5$ mm], stín na $\nu : a_{\nu'} = 0{,}07$ [$b = 0{,}5$ mm]. Vzdálenost šraf od osy šrafy k ose šrafy sousední je vždy $a + b$ a činí pro jednotlivé roviny:

$$\begin{aligned}
\alpha &: a + b = 1{,}54,\\
\beta &: a + b = 0{,}50,\\
\gamma &: a + b = 0{,}28,\\
\delta &: a + b = 0{,}35,\\
\pi &: a + b = 0{,}96,\\
\nu &: a + b = 1{,}40,\\
\text{stín na } \pi &: a + b = 0{,}55,\\
\text{stín na } \nu &: a + b = 0{,}57.
\end{aligned}$$

V obraze isometrickém jsou viditelné roviny β, γ, δ.

Naznačeným způsobem lze vyjádřit intensitu osvětlení stěn jakéhokoli tělesa, omezeného rovinami, v jakémkoli promítání.

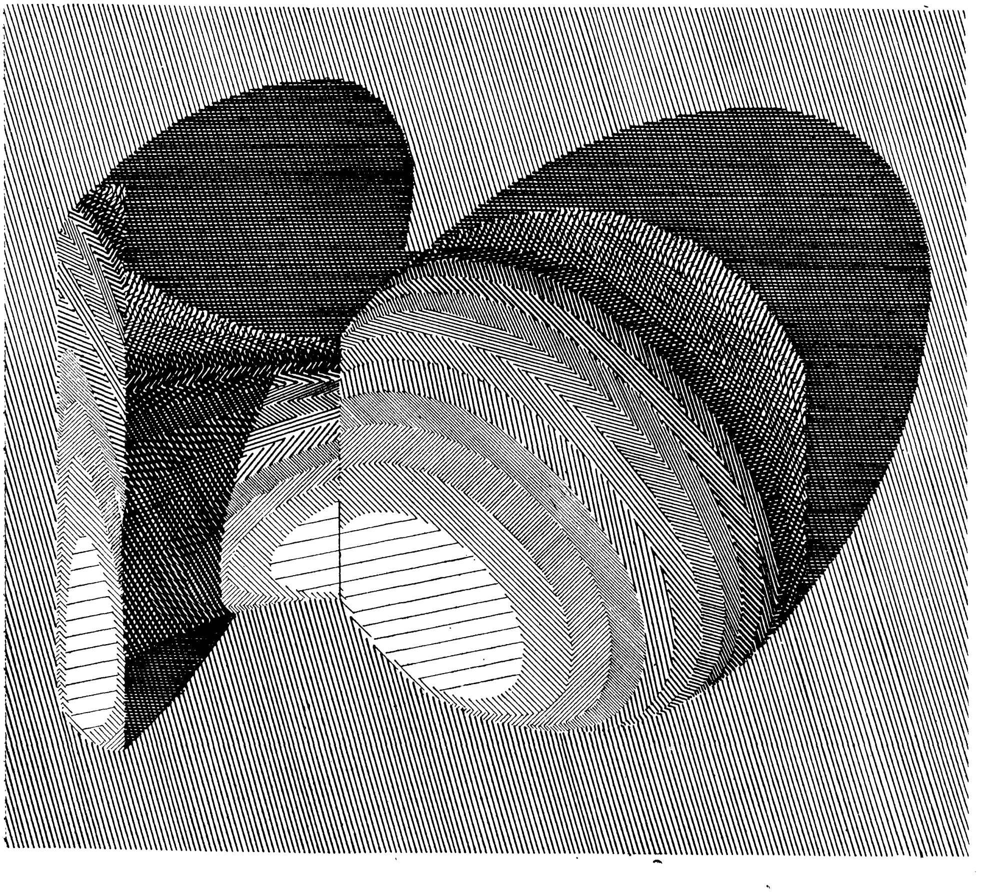
Intensitu osvětlení tělesa, které je omezeno obecně křivými plochami, lze též vyjádřit šrafováním, a to tak, že považujeme intensitu osvětlení mezi dvěma isofotami za konstantní a rovnu aritmetickému průměru intensit, příslušných isofotám, omezujícím příslušnou část plochy.

Na *obr. 2* jest vyznačeno technické osvětlení tělesa, složeného z několika anuloidů a části koule. Na tělese jsou sestrojeny isofoty a vypočteny světlé i osové vzdálenosti šraf pro pruhy mezi dvěma isofotami.

$$\begin{array}{llll}
1\text{—}9: & b = 0{,}1\,, & a = 1{,}9\,, & a + b = 2\,,\\
9\text{—}8: & b = 0{,}1\,, & a = 0{,}57\,, & a + b = 0{,}67\,,\\
8\text{—}7: & b = 0{,}1\,, & a = 0{,}3\,, & a + b = 0{,}4\,,\\
7\text{—}6: & b = 0{,}1\,, & a = 0{,}19\,, & a + b = 0{,}29\,,\\
6\text{—}5: & b = 0{,}3\,, & a = 0{,}36\,, & a + b = 0{,}66\,,\\
5\text{—}4: & b = 0{,}3\,, & a = 0{,}27\,, & a + b = 0{,}57\,,\\
4\text{—}3: & b = 0{,}3\,, & a = 0{,}15\,, & a + b = 0{,}45\,,\\
3\text{—}2: & b = 0{,}3\,, & a = 0{,}09\,, & a + b = 0{,}39\,,\\
2\text{—}1: & b = 0{,}5\,, & a = 0{,}1\,, & a + b = 0{,}6\,,\\
1\text{—}0: & b = 0{,}5\,, & a = 0{,}025\,, & a + b = 0{,}525\,.
\end{array}$$

Za mezí vlastního stínu předpokládejme intensitu osvětlení poloviční proti části osvětlené přímo.

$$
\begin{aligned}
1—9:&\quad b = 0{,}3\,, & a &= 0{,}27\,, & a + b &= 0{,}57\,,\\
9—8:&\quad b = 0{,}3\,, & a &= 0{,}21\,, & a + b &= 0{,}51\,,\\
8—7:&\quad b = 0{,}3\,, & a &= 0{,}18\,, & a + b &= 0{,}48\,,\\
7—6:&\quad b = 0{,}3\,, & a &= 0{,}12\,, & a + b &= 0{,}42\,,\\
6—5:&\quad b = 0{,}3\,, & a &= 0{,}09\,, & a + b &= 0{,}39\,,\\
5—4:&\quad b = 0{,}5\,, & a &= 0{,}145\,, & a + b &= 0{,}645\,,\\
4—3:&\quad b = 0{,}5\,, & a &= 0{,}105\,, & a + b &= 0{,}605\,,\\
3—2:&\quad b = 0{,}5\,, & a &= 0{,}05\,, & a + b &= 0{,}55\,,
\end{aligned}
$$

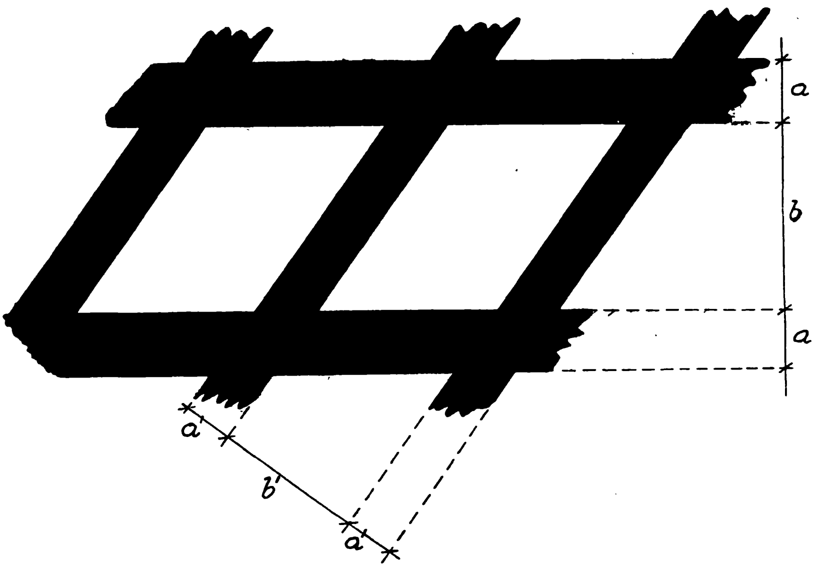


Obr. 2

$$2\text{—}1: \quad b = 0{,}5\,, \quad a = 0{,}04\,, \quad a + b = 0{,}54\,,$$

$$1\text{—}0: \quad b = 0{,}5\,, \quad a = 0{,}01\,, \quad a + b = 0{,}51\,.$$

Druhá průmětna má při technickém osvětlení intensitu osvětlení dánu cosinem úhlu φ, jenž se rovná $\cos \varphi = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$, takže $a = 0{,}3 \cdot \frac{0{,}58}{0{,}42} = 0{,}39$, $a + b = 0{,}69$.



Obr. 3)*

Jak patrno z výše uvedeného výpočtu, vychází světlá vzdálenost šraf a za mezí vlastního stínu velmi malá, takže šrafování jest obtížné i když volíme poměrně velké b. Snadněji lze šrafování provést, když použijeme k vyjádření intensity osvětlení za mezí vlastního stínu a ve stínu vrženém šrafování křížového. Intensita osvětlení je i v tomto případě vyjádřena transparencí příslušné plošky. Transparence je dána (vzor. č. 4) poměrem bílé plochy k celé ploše. Označíme-li světlou šířku jednoho systému šraf a při šířce šrafy b a světlou šířku druhého systému šraf a' při šířce šrafy b', pak podle *obr. 3* je

$$i = \frac{a \cdot a'}{(a + b) \cdot (a' + b')} \,. \tag{7}$$

Má-li být určitá intensita osvětlení vyjádřena pomocí šrafování křížem, stačí dosadit do vzorce (7) hodnoty základního šrafování a a b, a zvolit b' a vyjde světlá vzdálenost šraf a' pro přešrafování.

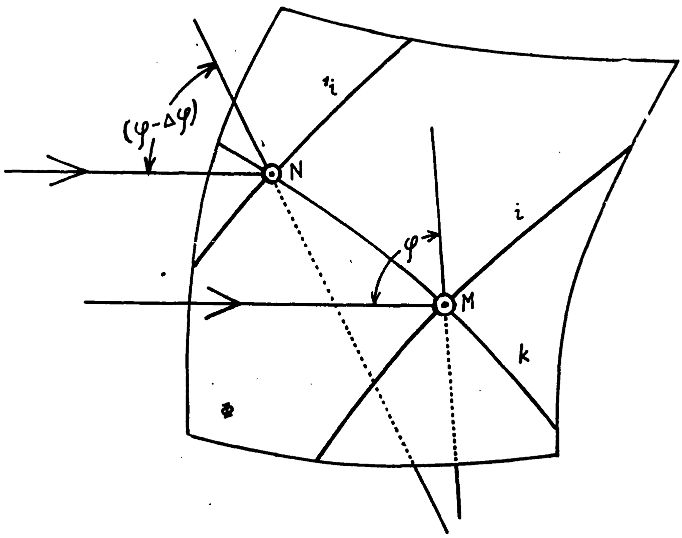
Vyšrafujeme-li za mezí vlastního stínu jednotlivé pruhy mezi isofotami stejným způsobem jako v části osvětlené přímo, vychází pro přešrafování při volbě $b' = 0{,}5\, a'$ stále

*) V obr. 3 je třeba zaměnit všechna a za b a b za a

stejné pro všechny pruhy a rovné: $a' = 0{,}5$. Tato okolnost nijak nepřekvapuje, neboť pro intensitu osvětlení za mezí vlastního stínu byla zvolena intensita poloviční pro celý vlastní stín. Pro stín vržený na průmětnu vychází při $a = 0{,}39$ a tloušťce šrafy $b = 0{,}3$ (t. j. osvětlení nárysny) a při volbě $b' = 0{,}5$ ze vzorce (7) $a' = 0{,}13$.

Na *obr. 2* bylo použito pro vlastní a vržený stín způsobu šrafování křížem. Rovněž tak pro vržený stín na těleso, kde vychází pro intensitu osvětlení rovnu jedné pětině osvětlení přímého při $b' = 0{,}5$: $a' = 0{,}125$, $a' + b' = 0{,}625$.

Na tělesech, kde intensitní čáry jsou čáry paralelní, lze užít poměrně jednoduchého způsobu vyjádření intensity osvětlení rekurentním způsobem.



Obr. 4

Za účelem odvození této rekurentní závislosti vytkněme na libovolné ploše Φ dvě paralelní intensitní čáry, a to intensitní čáru spojující místa, jejichž intensita osvětlení je i a intensitní čáru, spojující místa o intensitě osvětlení ${}^1i$ za předpokladu, že ${}^1i > i$ (*obr. 4*). Dále vytkněme orthogonální trajektorii čar i a ${}^1i$, označme ji k a průsečíky této prostorové křivky s křivkami i a ${}^1i$ označme M a N. Úhel, který svírá normála k ploše Φ se směrem světelných paprsků v bodě M, označme φ, úhel normály v bodě N je pak $(\varphi - \Delta\varphi)$, neboť úhel, příslušející větší intensitě osvětlení je menší. Intensita osvětlení bodů plochy, ležících na isofotě i, je dána hodnotou cosinu úhlu φ, na isofotě ${}^1i$ hodnotou $\cos(\varphi - \Delta\varphi)$. Střední intensitu osvětlení pruhu mezi čarami i a ${}^1i$ lze při malé hodnotě úhlu $\Delta\varphi$ psát přibližně ve tvaru $i' = \cos\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$. Dosadíme-li tuto hodnotu za i do výrazu (6), vychází

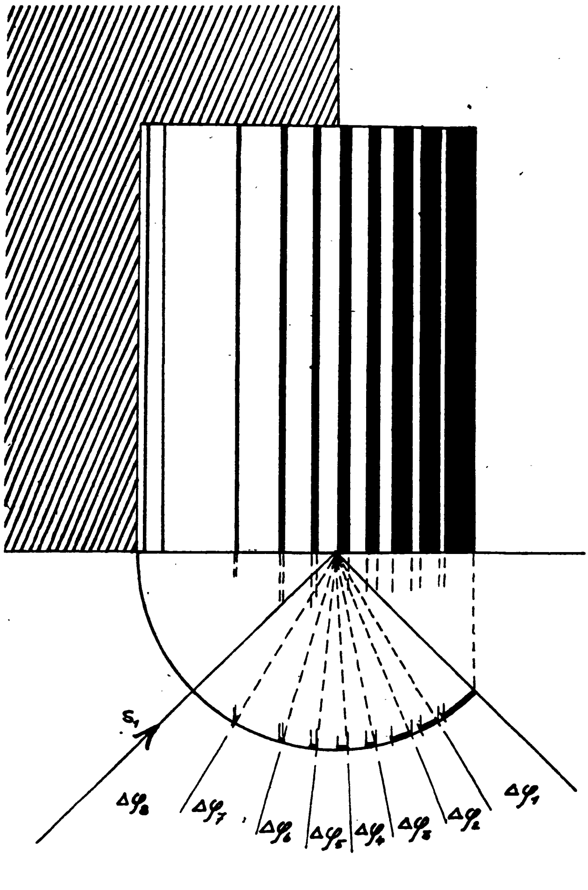
$$a = b \cdot \frac{\cos\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{1 - \cos\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}. \tag{8}$$

K oběma stranám rovnice přidáme b, čímž dostaneme:

$$a + b = b \cdot \frac{1}{1 - \cos\left(\varphi - \dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}. \tag{9}$$

Když dále označíme střední poloměr flexe prostorové křivky k mezi body M a N písmenem r, je možno délku křivky k mezi body M, N vyjádřit přibližně vztahem $\widehat{MN} \doteq r \cdot \Delta\varphi$. Tuto délku můžeme volit rovnu $a + b$ a dosadit do (9), čímž dostaneme

$$r \cdot \Delta\varphi \doteq b \cdot \frac{1}{1 - \cos\left(\varphi - \dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)}. \tag{10}$$



Obr. 5

Z této rovnice lze pak vypočísti $\Delta\varphi$ při určité hodnotě φ, při známém r a zvoleném b. Z obou kořenů přísl. kvadratické rovnice má pouze jeden praktický význam:

$$\Delta\varphi \doteq \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} - \sqrt{\frac{(1-\cos\varphi)^2}{\sin^2\varphi} - \frac{2b}{r\cdot\sin\varphi}}. \qquad (11)$$

Z rovnice (11) vychází pro každou intensitní čáru, charakterisovanou vytčeným úhlem φ, při známém r a zvoleném b hodnota $\Delta\varphi$. Pokud délka oblouku čáry k pro každou dvojici bodu M a N je konstantní, což bylo o čarách i a ${}^1i$ předpokládáno, a pokud též střední poloměr r je konstantní pro celou plochu mezi dvěma intensitními čarami, lze ze vzorce (11) ke každé čáře i určit čáru ${}^1i$ tak, aby šířka černého pruhu, vyjadřujícího střední intensitu osvětlení mezi čarami i a ${}^1i$ byla konstantní.

Na *obr. 5* je vytčen nárys a půdorys části rotační válcové plochy, osvětlené paprsky rovnoběžnými s prvou průmětnou a svírajícími s druhou průmětnou úhel 45°. Při výpočtu vyjdeme od meze vlastního stínu, pro níž platí $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, poloměr r je zde konstantní a roven poloměru válcové plochy. Volíme-li $b = 0{,}2\,r$, vychází z (11) pro $\Delta\varphi_1$ v obloukové míře hodnota 0,225, což odpovídá $\Delta\varphi_1 \doteq 13°$. Když dosadíme dále do (11) za φ úhel $\varphi_2 = 90° - 13° = 77°$ a zvolíme $b = 0{,}1\,r$, vyjde: $\Delta\varphi_2 = 0{,}14$ v obloukové míře, což odpovídá úhlu $\Delta\varphi_2 = 8°$, $\Delta\varphi_3 \doteq 11°$ při volbě $b = 0{,}1\,r$, $\Delta\varphi_4 = 8°$ při volbě $b = 0{,}05\,r$, $\Delta\varphi_5 \doteq 10°$ při volbě $b = 0{,}05\,r$, $\Delta\varphi_6 = 8°$ při volbě $b = 0{,}025\,r$, $\Delta\varphi_7 = 15°$ při volbě $b = 0{,}02\,r$. Jak patrno, do úhlu 90° zbývá $\Delta\varphi_8 = 17°$. Pro pruh mezi intensitními čarami $\varphi_7 = 17°$ a $\varphi_8 = 0°$, tedy pro $\Delta\varphi_8 = 17°$ dostaneme b z rovnice (11), kam dosadíme za 17 v obloukové míře

$$0{,}297 = \frac{1-\cos 17°}{\sin 17°} - \sqrt{\frac{(1-\cos 17°)^2}{(\sin 17°)^2} - \frac{2b}{r\cdot\sin 17°}},$$

odkud vyjde $b = 7\,\%$ poloměru.

Na *obr. 5* jsou příslušné hodnoty $\Delta\varphi$ vyznačeny, půdorysy šířek b jsou vytaženy silněji.

I na plochách, jejichž intensitní čáry nejsou čáry paralelní, lze odvodit podobné rekurentní závislosti. Příslušné černé plošky nebudou však omezeny paralelními čarami, takže dosti zdlouhavé počítání a vynášení vzorce podle typu (11) není již výhodné. V takovém případě je lépe sestrojit potřebné čáry intensitní, v jednotlivých místech odměřit $a + b$ a pak při známé střední intensitě osvětlení mezi isofotami vytčenými vyjde z rovnice (5) hodnota a. Tímto způsobem bylo by možno postupovati na př. při vyjádření intensity osvětlení plochy kuželové.

Z uvedených příkladů je patrno, že intensitu osvětlení lze vyjádřit velmi dobře šrafováním, a že tento způsob je pohodlnější než polohování jednotlivých plošek neutrální šedí. Rovněž reprodukce tohoto způsobu vyjádření intensity osvětlení je snazší.