Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Milan Pišl

Křivky v Gaussově rovině [Pokračování]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 2, 144--156

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137276

Problémy

Charakterisovat rovnice se spojitou pravou stranou, jejichž všechna řešení jsou definována v celé E^1.[7])

Ve větě 25 nalézt dostatečnou podmínku pro to, aby všechna řešení patřila do $\bar{A}$.

V konstrukci tohoto odstavce volit na př. $\varphi(x) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2\pi x)$ všude; podobně konstruovat pole mezi konjugovanými dvojicemi; dostaneme rovnici s množinou sing. bodů hustou v jednotkovém čtverci?[8])

M. PIŠL

KŘIVKY V GAUSSOVĚ ROVINĚ

(Pokračování)

3. KRUŽNICE

3.1 Rovnice kružnice určené středem z_0 a poloměrem r

Pro body kružnice a jen pro tyto body platí:

$$|z - z_0|^2 = r^2$$

a po úpravě

$$(z - z_0) \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2. \tag{9}$$

Rovnici (9) nazýváme normální rovnicí kružnice. Je-li $z_0 = 0$, dostáváme t. zv. středovou rovnici kružnice

$$z\bar{z} = r^2. \tag{9,1}$$

3.2 Obecná rovnice kružnice

Geometrické místo bodů, vyhovujících rovnici

$$A z\bar{z} + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0, \quad \alpha\bar{\alpha} - AC > 0, \quad A \neq 0 \tag{10}$$

je kružnice o středu $z_0 = -\frac{\alpha}{A}$ a poloměru $r = \frac{\sqrt{\alpha\bar{\alpha} - AC}}{|A|}$.

Důkaz: Rovnice (10) je ekvivalentní s rovnicí $\left(z + \frac{\alpha}{A}\right)\left(\bar{z} + \frac{\bar{\alpha}}{A}\right) = \frac{\alpha\bar{\alpha} - AC}{A^2}$; srovnáním s rovnicí (9) dostáváme

$$z_0 = -\frac{\alpha}{A}, \quad r^2 = \frac{\alpha\bar{\alpha} - AC}{A^2} > 0.$$

[7]) Postačující podmínky v *Němyckij, Štěpanov, Kačestvennaja těorija dif. uravněnij.*

[8]) Problém řešen *M. A. Lavrentjevem;* viz *Matěmatika v SSSR za tridcať let, str. 489.*

3.3 Transformace posunem

Provedeme-li transformaci posunem $z = w + z_0$, pak kružnice, jež má v původní soustavě rovnici (10), bude mít v nové soustavě rovnici

$$A\, w\bar{w} + f_1(z_0)\, w + f_2(z_0)\, \bar{w} + f(z_0) = 0, \tag{10,1}$$

kde $f_1(z_0) = A\bar{z}_0 + \bar{\alpha}$, $f_2(z_0) = \overline{f_1}(z_0) = Az_0 + \alpha$ a $f(z_0) = Az_0\bar{z}_0 + \bar{\alpha}z_0 + \alpha\bar{z}_0 + C$, jak se lehko dosazením přesvědčíme. Zvolíme-li za nový počátek z_0 střed kružnice v původní soustavě, to jest $z_0 = -\dfrac{\alpha}{A}$, bude platit $f_1\left(-\dfrac{\alpha}{A}\right) = f_2\left(-\dfrac{\alpha}{A}\right) = 0$, $f\left(-\dfrac{\alpha}{A}\right) = -\dfrac{\alpha\bar{\alpha} - AC}{A} = -Ar^2$ a rovnice (10,1) přejde v již známý středový tvar $w\bar{w} = r^2$.

3.4 Orthogonální kružnice

Nutná a postačující podmínka, aby dvě čáry o rovnicích

$$K_1 \equiv A_1 z\bar{z} + \bar{\alpha}_1 z + \alpha_1\bar{z} + C_1 = 0 \quad \text{a} \quad K_2 \equiv A_2 z\bar{z} + \bar{\alpha}_2 z + \alpha_2\bar{z} + C_2 = 0$$

byly vzájemně orthogonální, zní:

$$\bar{\alpha}_1\alpha_2 + \alpha_1\bar{\alpha}_2 = A_1C_2 + A_2C_1. \tag{11}$$

Důkaz rozdělíme na tři části:

1. Obě čáry jsou přímky, t. j. $A_1 = A_2 = 0$. Pak (11) je ekvivalentní s podmínkou pro kolmost (1,1).

2. Jedna čára je přímka a druhá kružnice, t. j. na příklad $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$. Pak nutná a postačující podmínka, aby přímka K_1 protínala kolmo kružnici K_2, zní: K_1 prochází středem kružnice K_2, t. j.

$$\bar{\alpha}_1\left(-\frac{\alpha_2}{A_2}\right) + \alpha_1\left(-\frac{\bar{\alpha}_2}{A_2}\right) + C_1 = 0 \iff \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \alpha_1\bar{\alpha}_2 = A_2C_1,$$

což je ekvivalentní s podmínkou (11).

3. Zbývá poslední možnost: K_1 i K_2 jsou kružnice. Z planimetrie je známo, že nutnou a postačující podmínkou jejich kolmosti je: součet čtverců jejich poloměrů je roven čtverci středné, t. j.

$$r_1^2 + r_2^2 = |z_1 - z_2|^2 \iff \frac{\alpha_1\bar{\alpha}_1 - A_1C_1}{A_1^2} + \frac{\alpha_2\bar{\alpha}_2 - A_2C_2}{A_2^2} = \left(\frac{\alpha_2}{A_2} - \frac{\alpha_1}{A_1}\right)\cdot\left(\frac{\bar{\alpha}_2}{A_2} - \frac{\bar{\alpha}_1}{A_1}\right),$$

což opět je ekvivalentní s podmínkou (11).

3.5 Kruhová inverse

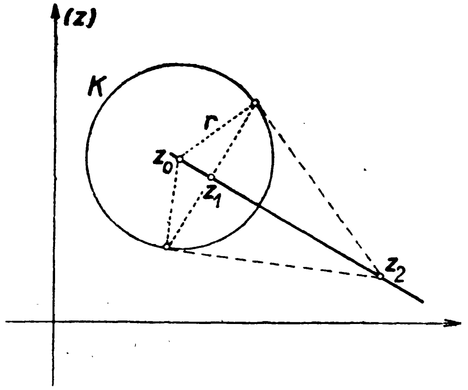
3.51 Body z_1, z_2 nazýváme inversními vzhledem k dané kružnici, jestliže platí:

1. oba leží na téže polopřímce jdoucí středem kružnice,
2. součin jejich vzdáleností od středu kružnice je roven čtverci poloměru (obr. 9).

Nutnou a postačující podmínkou, aby body z_1 a z_2 byly inversní vzhledem ke kružnici dané rovnicí (10), zní:

$$Az_1\bar{z}_2 + \bar{\alpha}z_1 + \alpha\bar{z}_2 + C = 0 \iff Az_2\bar{z}_1 + \bar{\alpha}z_2 + \alpha\bar{z}_1 + C = 0. \tag{12}$$

Při důkazu užijeme transformace posunem $z = w + z_0$, kde $z_0 = -\dfrac{\alpha}{A}$ je středem kružnice K, jejíž rovnice po transformaci bude znít $K \equiv w\bar{w} = r^2$ (viz odst. 3.3) a bod z_1, resp. z_2 přejde v bod $w_1 = z_1 - z_0 = z_1 + \dfrac{\alpha}{A}$, resp. $w_2 = z_2 - z_0 = z_2 + \dfrac{\alpha}{A}$.



Obr. 9

Protože body w_1 a w_2 mají být inversní vzhledem ke kružnici K, bude podle definice platit 1) $w_2 = kw_1$, $k > 0$, 2) $|w_1| \cdot |w_2| = r^2$. Z prvé podmínky dosadíme výraz pro w_2 do podmínky druhé a dostaneme

$$k\,|w_1|^2 = r^2 \Longrightarrow k = \frac{r^2}{w_1 \bar{w}_1}.$$

Tím jsme určili dosud neznámou konstantu k a tím také hledanou podmínku pro body w_1 a w_2, a to podmínku nutnou

$$w_2 = \frac{r^2}{\bar{w}_1}. \tag{12,1}$$

Snadno se přesvědčíme, že je to též podmínka postačující, neboť ze vztahu (12,1) plyne: 1) $w_2 = \dfrac{r^2}{w_1 \bar{w}_1}\, w_1$, 2) $|w_1| \cdot |w_2| = |w_1|^2 \dfrac{r^2}{w_1 \bar{w}_1} = r^2$. Zbývá tedy přepsat vztah (12,1) do původních souřadnic. Platí

$$0 = w_2 \bar{w}_1 - r^2 = \left(z_2 + \frac{\alpha}{A}\right)\left(\bar{z}_1 + \frac{\bar{\alpha}}{A}\right) - r^2 = z_2 \bar{z}_1 + \frac{\alpha \bar{z}_1}{A} + \frac{\bar{\alpha} z_2}{A} + \frac{\alpha \bar{\alpha}}{A^2} -$$
$$- \frac{\alpha\bar{\alpha} - AC}{A^2} = \frac{1}{A}(A z_2 \bar{z}_1 + \bar{\alpha} z_2 + \alpha \bar{z}_1 + C),$$

což jsme měli dokázat.

Poznámka 1. Vztahem (12) je každému bodu z_1 roviny — s výjimkou středu kružnice — přiřazen určitý jediný bod z_2 roviny, a naopak bodu z_2 odpovídá bod z_1. Všechny body roviny seskupí se tedy ve dvojice inversních bodů. Říkáme, že vztah (12) je rovnicí tak zv. kruhové inverse. Pro $A = 0$ přejde kružnice v přímku a vztah (12) se stane rovnicí osové souměrnosti (viz odst. 2.6).

Poznámka 2. Všimneme-li si pozorněji rovnice (12), vidíme, že z rovnice řídicí kružnice, resp. přímky dostaneme rovnici příslušné kruhové inverse, resp. osové souměrnosti jednoduše tak, že nepruhovanou proměnnou ponecháme a pruhovanou označíme jako novou proměnnou (nebo naopak). Na příklad:

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \rightarrow (w - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2,$$
$$\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0 \rightarrow w + \bar{z} + C = 0.$$

3.52 *Útvar inversní ke kružnici, resp. k přímce*

Dokážeme najednou tato tvrzení:

1. Útvarem inversním ke kružnici, resp. k přímce, jež neprochází středem inverse,

je kružnice. Její střed vznikl inversí bodu, tvořícího se středem inverse dvojici bodů inversních k původnímu útvaru. Tato kružnice prochází středem inverse, byla-li původním útvarem přímka.

2. Útvarem inversním ke kružnici nebo přímce, jež prochází středem inverse, je přímka.

3. Každá kružnice nebo přímka, orthogonální ke kružnici řídicí, je samodružná (sama k sobě inversní).

4. Kružnice nebo přímka, obsahující jednu dvojici různých inversních bodů, je samodružná.

Důkaz:

Nechť původní útvar K má rovnici

$$A z \bar{z} + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0,$$

a kružnice řídicí K_0 rovnici

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r_0^2.$$

Po transformaci posunutím dostáváme

$$K \equiv A w \bar{w} + f_1(z_0) w + f_2(z_0) \bar{w} + f(z_0) = 0 \quad \left(f_1(z_0) \neq 0 \text{ pro } z_0 \neq -\frac{\alpha}{A}\right),$$

$$K_0 \equiv w \bar{w} = r_0^2,$$

(viz odst. 3.3). Rovnice inverse zní

$$w = \frac{r^2}{\bar{\xi}}.$$

Útvar $K \equiv A w \bar{w} + f_1(z_0) w + f_2(z_0) \bar{w} + f(z_0) = 0$ přejde inversí v útvar

$$K' \equiv f(z_0) \xi \bar{\xi} + r_0^2 f_1(z_0) \xi + r_0^2 f_2(z_0) \bar{\xi} + A r_0^4 = 0.$$

K tvrzení 1: Protože útvar K neprochází středem inverse, to jest počátkem soustavy (w), je $f(z_0) \neq 0$ a inversní útvar je vždy kružnicí.

Střed kružnice K'

$$\xi_0' = -\frac{r_0^2 f_2(z_0)}{f(z_0)},$$

vznikl inversí bodu

$$w' = \frac{r_0^2}{\bar{\xi}'} = -\frac{f(z_0)}{f_1(z_0)}.$$ [2]

Bod w' tvoří s bodem w_0 (středem inverse) dvojici bodů, inversních vzhledem ke kružnici K jako řídicí, neboť

$$A w' w_0 + f_1(z_0) w' + f_2(z_0) \bar{w}_0 + f(z_0) = f_1(z_0) \cdot \left(-\frac{f(z_0)}{f_1(z_0)}\right) + f(z_0) = 0.$$

Je-li původní útvar K přímka, je $A = 0$ a rovnici

$$K' \equiv f(z_0) \xi \bar{\xi} + r_0^2 f_1(z_0) \xi + r_0^2 f_2(z_0) \bar{\xi} = 0$$

splňuje počátek $w_0 = 0$, to jest K' prochází středem inverse.

[2]) Je-li $f_1(z_0) = 0$, je $z_0 = -\frac{\alpha}{A}$ a středy kružnic K a K' splynou se středem kružnice řídicí.

K tvrzení 2: Protože původní útvar prochází středem inverse, je $f(z_0) = 0$, a tedy rovnice útvaru K' zní

$$f_1(z_0)\cdot\xi + f_2(z_0)\bar{\xi} + Ar_0^2 = 0,$$

to jest K' je přímka.

K tvrzení 3: Podle předpokladu je útvar K orthogonální k řídicí kružnici, což znamená podle odst. 3.4, rovnice (11) ($\alpha_1 = f_2(z_0)$, $A_1 = A$, $C_1 = f(z_0)$, $\alpha_2 = 0$, $A_2 = 1$, $C_2 = -r_0^2$), že platí $f(z_0) = Ar_0^2$; dosazením do rovnice K a do rovnice K' dostáváme $K \equiv K'$.

K tvrzení 4: Nechť body $w_1 \neq w_2$ tvoří dvojici inversních bodů; pak pro ně platí $w_2 = \dfrac{r_0^2}{\bar{w}_1}$; vyjádříme-li podmínku, že útvar K obsahuje bod w_1 resp. w_2, dostáváme

$$A\, w_1 \bar{w}_1 + f_1(z_0)\, w_1 + f_2(z_0)\, \bar{w}_1 + f(z_0) = 0,$$

resp.

$$A \frac{r_0^2}{\bar{w}_1} \cdot \frac{r_0^2}{w_1} + f_1(z_0) \frac{r_0^2}{\bar{w}_1} + f_2(z_0) \frac{r_0^2}{w_1} + f(z_0) = 0$$

a po odečtení a úpravě obou rovnic

$$[(Ar_0^2 - f(z_0)] \cdot (w_1 \bar{w}_1 - r_0^2) = 0,$$

odkud plyne

$$Ar_0^2 = f(z_0),$$

neboť $w_1 \bar{w}_1 \neq r_0^2$ pro $w_1 \neq w_2$, což je podmínka kolmosti kružnic K a K_0, a podle předchozího i podmínka samodružnosti.

Tím jsou dokázána všechna vyslovená tvrzení.

3.6 Příklady

1. *Určit geometrické místo bodů z, pro které platí*

$$|z - z_1| = k\,|z - z_2|, \quad k > 0, \quad k \neq 1.$$

Umocněním a úpravou podmínky dostaneme

$$(1 - k^2)\, z\bar{z} - (\bar{z}_1 - k^2 \bar{z}_2)\, z - (z_1 - k^2 z_2)\, \bar{z} + z_1 \bar{z}_1 - k^2 z_2 \bar{z}_2 = 0.$$

Hledané geometrické místo bodů je tedy kružnice o středu $z_0 = \dfrac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2}$ a o poloměru $r = \dfrac{k}{|1 - k^2|}\,|z_1 - z_2|$. Snadno se přesvědčíme, že body z_1 a z_2 tvoří inversní dvojici vzhledem k této kružnici.

2. *Určit geometrické místo bodů z, pro které platí*

$$\arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \varphi, \quad z_1 \neq z_2, \quad z \neq z_1, \quad z \neq z_2, \quad \varphi \neq 0, \pi.$$

Označme $z - z_1 = \alpha$, $z - z_2 = \beta$, $\arg(z - z_1) = \arg \alpha = \varphi_1$, $\arg(z - z_2) = \arg \beta = \varphi_2$. Platí

$$\varphi = \arg(z - z_1) - \arg(z - z_2) = \varphi_1 - \varphi_2$$

a dále

$$e^{j\varphi} = e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{\alpha\,|\beta|}{\beta\,|\alpha|}$$

(viz odst. 1.3). Umocněním dostáváme

$$e^{2j\varphi} = \frac{\alpha\,\bar{\beta}}{\bar{\alpha}\,\beta},$$

odkud pro dané geometrické místo vychází

$$\bar{\alpha}\cdot\beta\, e^{j\varphi} - \alpha\,\bar{\beta}\, e^{-j\varphi} = 0,$$

to jest po dosazení za α a β a po úpravě

$$(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})\, z\bar{z} + (\bar{z}_2 e^{-j\varphi} - \bar{z}_1 e^{j\varphi})\, z + (z_1 e^{-j\varphi} - z_2 e^{j\varphi})\, \bar{z} +$$
$$+ \bar{z}_1 z_2 e^{j\varphi} - z_1 \bar{z}_2 e^{-j\varphi} = 0.$$

Hledané geometrické místo je tedy kružnice o poloměru $r = \dfrac{|z_1 - z_2|}{2\,|\sin\varphi|}$, procházející body z_1 a z_2, jak se snadno přesvědčíme.

3. *Najít rovnici kružnice, která prochází body* z_i $(i = 1, 2, 3)$.

Hledaná kružnice K nechť má rovnici

$$A\, z\bar{z} + \bar{\alpha}\, z + \alpha\, \bar{z} + C = 0.$$

Souřadnice bodů z_i musí této rovnici vyhovovat. Determinant soustavy

$$\begin{aligned}
A\, z\bar{z} + \bar{\alpha}\, z + \alpha\, \bar{z} + C &= 0,\\
A\, z_1\bar{z}_1 + \bar{\alpha}\, z_1 + \alpha\, \bar{z}_1 + C &= 0,\\
A\, z_2\bar{z}_2 + \bar{\alpha}\, z_2 + \alpha\, \bar{z}_2 + C &= 0,\\
A\, z_3\bar{z}_3 + \bar{\alpha}\, z_3 + \alpha\, \bar{z}_3 + C &= 0
\end{aligned}$$

musí být roven nule, a tedy hledaná rovnice kružnice zní

$$\begin{vmatrix} z\bar{z}, & z, & \bar{z}, & 1 \\ z_1\bar{z}_1, & z_1, & \bar{z}_1, & 1 \\ z_2\bar{z}_2, & z_2, & \bar{z}_2, & 1 \\ z_3\bar{z}_3, & z_3, & \bar{z}_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Poznámka: Leží-li body z_i na jedné přímce, je

$$\begin{vmatrix} z_1, & \bar{z}_1, & 1 \\ z_2, & \bar{z}_2, & 1 \\ z_3, & \bar{z}_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Výsledná rovnice je pak rovnicí přímky.

4. KUŽELOSEČKY

4.1 Ohnisková definice elipsy

Za ohniska elipsy zvolme body z_1 a $z_2 = -z_1$, délku hlavní poloosy označme a, vedlejší b, výstřednost e, při čemž platí $a^2 = b^2 + e^2$, $e^2 = z_1\bar{z}_1$ (obr. 10). Z ohniskové definice elipsy plyne

$$|z - z_1| + |z + z_1| = 2a,$$

to jest

$$\sqrt{(z + z_1)(\bar{z} + \bar{z}_1)} = 2a - \sqrt{(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)};$$

dvojnásobným umocněním a úpravou dostáváme

$$\bar{z}_1^2 z^2 + z_1^2 \bar{z}^2 - 2(2a^2 - z_1\bar{z}_1) z\bar{z} + 4a^2(a^2 - z_1\bar{z}_1) = 0$$

a užijeme-li vztahu $b^2 = a^2 - z_1\bar{z}_1$, máme

$$\bar{z}_1^2 z^2 + z_1^2 \bar{z}^2 - 2(a^2 + b^2) z\bar{z} + 4a^2b^2 = 0. \qquad (13,1)$$

4.2 Elipsa se středem v počátku

Geometrické místo bodů z, vyhovujících rovnici

$$\bar{\alpha} z^2 + \alpha \bar{z}^2 + 2Az\bar{z} + C = 0, \quad |\alpha| < |A|, \quad AC < 0, \qquad (13,2)$$

je elipsa s ohnisky v bodech $z_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{C\alpha}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}}}$ a čtvercem hlavní poloosy $a^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{|C|}{|A| - |\alpha|}$.[3])

Důkaz provedeme tak, že ukážeme ekvivalenci rovnice (13.2) s rovnicí (13.1) pro $z_1 = \sqrt{\dfrac{C\alpha}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}}}$, $a^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{|C|}{|A| - |\alpha|}$, $|\alpha| < |A|$, $AC < 0$. Platí

$$b^2 = a^2 - e^2 = a^2 - z_1\bar{z}_1 = \frac{1}{2}\frac{|C|}{|A| - |\alpha|} - \frac{|C\alpha|}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}} =$$

$$= \frac{|C|}{2}\frac{|A| + |\alpha| - 2|\alpha|}{(|A| + |\alpha|)(|A| - |\alpha|)} = \frac{1}{2}\frac{|C|}{|A| + |\alpha|},$$

neboť podle předpokladu je $|A| \neq |\alpha|$. Dále platí

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\frac{|C|}{|A| - |\alpha|} + \frac{1}{2}\frac{|C|}{|A| + |\alpha|} = \frac{|C|}{2}\frac{|A| + |\alpha| + |A| - |\alpha|}{(|A| - |\alpha|)(|A| + |\alpha|)} =$$

$$= \frac{|AC|}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}} = -\frac{AC}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}},$$

[3]) Zde a v dalším rozumíme symbolem $\sqrt{\alpha}$ (α komplexní) hlavní hodnotu odmocniny, to jest platí

$$-\pi < \arg\sqrt{\alpha} \leqq \pi.$$

Snadno se přesvědčíme, že pro takto definovanou hlavní hodnotu odmocniny $\sqrt{\alpha}$ platí $\sqrt{\bar{\alpha}} = \overline{\sqrt{\alpha}}$.

neboť podle předpokladu je $AC < 0$. Dosazením do rovnice (13.1) dostáváme

$$\frac{C\bar{\alpha}}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}} z^2 + \frac{C\alpha}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}} \bar{z}^2 + \frac{2AC}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}} z\bar{z} + \frac{C^2}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}} = $$
$$= \frac{C}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}} (\bar{\alpha} z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z} + C) = 0,$$

což je rovnice (13.2).

Poznámka: Směr hlavní osy je určen $\arg z_1 = \arg \sqrt{C\alpha}$.

4.3 Ohnisková definice hyperboly

Za ohniska zvolme body z_1 a $z_2 = -z_1$, délku hlavní poloosy označme a, vedlejší b, výstřednost e, při čemž platí $a^2 + b^2 = e^2$, $e^2 = z_1\bar{z}_1$ (obr. 11). Z ohniskové definice hyperboly plyne pro jednu větev

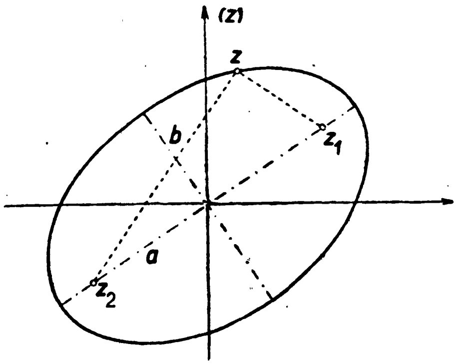
$$|z + z_1| - |z - z_1| = 2a$$

a pro druhou větev

$$|z - z_1| - |z + z_1| = 2a,$$

tedy pro obě větve

$$|z + z_1| - |z - z_1| = \pm 2a,$$



Obr. 10

to jest

$$\sqrt{(z + z_1)(\bar{z} + \bar{z}_1)} = \sqrt{(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)} \pm 2a.$$

Dvojnásobným umocněním a úpravou dostáváme

$$\bar{z}_1^2 z^2 + z_1^2 \bar{z}^2 - 2(2a^2 - z_1\bar{z}_1) z\bar{z} + 4a^2(a^2 - z_1\bar{z}_1) = 0$$

a užijeme-li vztahu $b^2 = z_1\bar{z}_1 - a^2$, máme

$$\bar{z}_1^2 z^2 + z_1^2 \bar{z}^2 - 2(a^2 - b^2) z\bar{z} - 4a^2b^2 = 0. \qquad (14{,}1)$$

4.4 Hyperbola se středem v počátku

Geometrické místo bodů z, vyhovujících rovnici

$$\bar{\alpha} z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z} + C = 0, |\alpha| > |A|, C \neq 0, \qquad (14{,}2)$$

je hyperbola s ohnisky v bodech $z_{1,2} = \pm \sqrt{\dfrac{-C\alpha}{\alpha\bar{\alpha} - A^2}}$ a se čtvercem hlavní poloosy $a^2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{|C|}{|\alpha| - \varepsilon A}$, kde $\varepsilon = \operatorname{sign} C$.

Důkaz provedeme opět tak, že ukážeme ekvivalenci rovnice (14.2) s rovnicí (14.1) pro $z_1 = \sqrt{\dfrac{-C\alpha}{\alpha\bar{\alpha} - A^2}}$, $a^2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{|C|}{|\alpha| - \varepsilon A}$, $|\alpha| > |A|$, $\varepsilon = \operatorname{sign} C$.

Platí

$$b^2 = z_1 \bar{z}_1 - a^2 = \frac{|C\alpha|}{\alpha\bar{\alpha} - A^2} - \frac{1}{2}\,\frac{|C|}{|A| - |\alpha|} = \frac{|C|}{2}\,\frac{2|\alpha| - |\alpha| - \varepsilon A}{(|\alpha| + \varepsilon A)(|\alpha| - \varepsilon A)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{|C|}{|\alpha| + \varepsilon A},$$

neboť podle předpokladu je $|\alpha| - \varepsilon A \neq 0$. Dále platí

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{2}\,\frac{|C|}{|\alpha| - \varepsilon A} - \frac{1}{2}\,\frac{|C|}{|\alpha| + \varepsilon A} = \frac{|C|}{2}\,\frac{|\alpha| + \varepsilon A - |\alpha| + \varepsilon A}{(|\alpha| - \varepsilon A)(|\alpha| + \varepsilon A)} =$$

$$= \frac{A\varepsilon|C|}{|\alpha|^2 - \varepsilon^2 A^2} = \frac{AC}{\alpha\bar{\alpha} - A^2};$$

dosazením do rovnice (14.1) dostáváme

$$-\frac{C\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha} - A^2}\,z^2 - \frac{C\alpha}{\alpha\bar{\alpha} - A^2}\,\bar{z}^2 - \frac{2AC}{\alpha\bar{\alpha} - A^2}\,z\bar{z} - \frac{C^2}{\alpha\bar{\alpha} - A^2} =$$

$$= -\frac{C}{\alpha\bar{\alpha} - A^2}\,(\bar{\alpha} z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z} + C) = 0,$$

to jest rovnici (14.2).

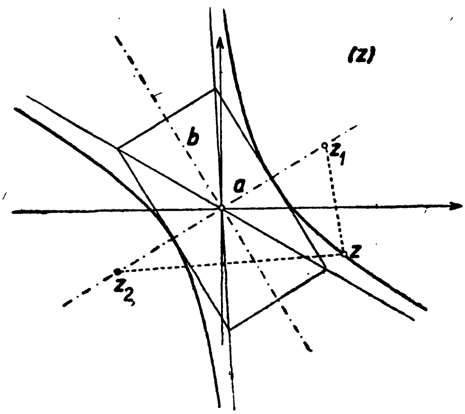
Poznámka 1: Pro $A = 0$ je rovnice (14.2) rovnicí rovnoosé hyperboly, neboť

$$a^2 = b^2 = \frac{1}{2}\,\frac{|C|}{|\alpha|}.$$

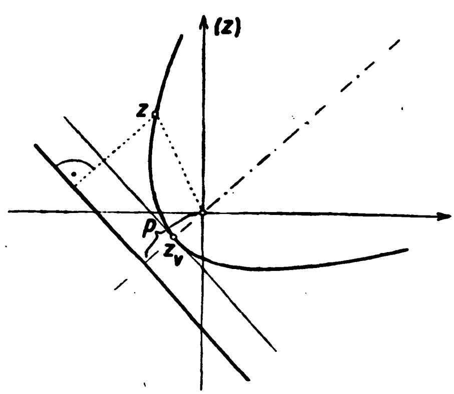
Poznámka 2: Směr hlavní osy je určen $\arg z_1 = \arg\sqrt{-C\alpha}$.

4.6 Ohnisková definice paraboly

Za ohnisko paraboly zvolme počátek (*obr. 12*), za přímku řídicí libovolnou přímku $\bar{\beta} z + \beta\bar{z} + C = 0$, $C \neq 0$. Z ohniskové definice paraboly plyne



Obr. 11



Obr. 12

$$\frac{|\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + C|}{2|\beta|} = |z|.$$

Odtud umocněním a úpravou dostáváme

$$(\bar{\beta} z - \beta \bar{z})^2 + 2C\bar{\beta} z + 2C\beta\bar{z} + C^2 = 0. \tag{15}$$

Užijeme-li obvyklého označení poloparametru p pro vzdálenost ohniska od přímky řídicí, platí (viz vzorec 7.1)

$$p = \frac{|C|}{2|\beta|}. \tag{15.1}$$

Osa paraboly prochází ohniskem kolmo na přímku řídicí a její rovnice zní (viz odst. 2.3 rovnice 5)

$$\bar{\beta} z - \beta \bar{z} = 0. \tag{15.2}$$

Tečna vrcholová tvoří osu pásu určeného přímkou řídicí a rovnoběžkou ohniskem a má tedy rovnici (viz odst. 2.74)

$$\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \frac{C}{2} = 0. \tag{15.3}$$

Vrchol dostaneme jako průsečík osy paraboly s tečnou vrcholovou

$$z_v = -\frac{C}{4\bar{\beta}}. \tag{15.4}$$

5. ISOTROPICKÉ SOUŘADNICE

5.1 Bod

V úvodu k první části (odst. 1.2) jsme řekli, že každá uspořádaná dvojice reálných čísel x a y určuje bod roviny, a to bod v konečnu neboli vlastní. Připustíme-li do svých úvah též body nevlastní, je nutno rozšířit pojem obyčejných kartézských souřadnic. Čtenáři je jistě známo, že se tak děje zavedením homogenních kartézských souřadnic, v nichž každý bod roviny, vlastní i nevlastní, je určen uspořádanou trojicí reálných čísel. Abychom mohli algebraické výsledky důsledně interpretovat, provedeme toto zobecnění kartézských souřadnic.

Připustíme za kartézské souřadnice bodu i čísla komplexní, čímž zavedeme vedle dosavadních bodů reálných t. zv. body imaginární a souhrnně budeme mluvit o bodech komplexních. Nebudeme však pracovat v kartézských souřadnicích, nýbrž v souřadnicích isotropických, které definujeme takto:

Isotropickými homogenními souřadnicemi komplexního bodu nazveme uspořádanou trojici (ξ, η, t) *definovanou rovnicemi*

$$\begin{aligned} \xi &= x + \mathrm{j}y, \\ \eta &= x - \mathrm{j}y, \\ t &= u, \end{aligned} \tag{16}$$

kde (x, y, u) *jsou kartézské homogenní souřadnice, čísla* x *a* y *jsou komplexní, číslo* u *je vždy reálné.*

Z definice (16) plynou tyto základní vlastnosti isotropických homogenních souřadnic:

1. Dva komplexní body (ξ_i, η_i, t_i),) $(i = 1,2)$ jsou totožné právě tehdy, je-li hodnost matice $\begin{bmatrix} \xi_1, & \eta_1, & t_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & t_2 \end{bmatrix}$ z jejich souřadnic rovna jedné.

2. Nutná a postačující podmínka, aby bod (ξ, η, t) byl reálný, zní:

$$\eta = \bar{\xi} \Longleftrightarrow \xi = \bar{\eta}.$$

3. Bod (ξ, η, t) je právě tehdy vlastní, je-li $t \neq 0$.

4. Počátek má souřadnice (0, 0, 1). Bod (1,0,0) resp. (0,1,0) nazýváme levým resp. pravým kruhovým isotropickým bodem.

Poznámka: Kruhové body mají kartézské souřadnice (1, j, 0) resp. (1, — j, 0) a jsou to body, jimiž procházejí všechny kružnice v rovině.

Bodem konjugovaným k bodu (ξ, η, t) nazýváme bod $(\bar{\eta}, \bar{\xi}, t)$. Bod (η, ξ, t) je zřejmě konjugovaný k bodu $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, t)$.

Dva body (ξ_i, η_i, t_i), $(i = 1,2)$ jsou vzájemně konjugované právě tehdy, je-li hodnost matice $\begin{bmatrix} \xi_1, & \eta_1, & t_1 \\ \bar{\eta}_2, & \bar{\xi}_2, & t_2 \end{bmatrix}$ rovna jedné. Speciálně pro body nevlastní tato podmínka zní: $\begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1 \\ \bar{\eta}_2, & \bar{\xi}_2 \end{vmatrix} = 0.$

Bod (ξ, η, t) je reálný právě tehdy, je-li sám k sobě konjugovaný, t. j. je-li hodnost matice $\begin{bmatrix} \xi, & \eta, & t \\ \bar{\eta}, & \bar{\xi}, & t \end{bmatrix}$ rovna jedné. Speciálně pro body nevlastní tato podmínka zní: $\begin{vmatrix} \xi, & \eta \\ \bar{\eta}, & \bar{\xi} \end{vmatrix} = 0.$

5.2 Přímka

Komplexní přímkou nazveme geometrické místo komplexních bodů, jejichž souřadnice ξ, η, t splňují lineární homogenní vztah

$$\alpha \xi + \beta \eta + Ct = 0, \tag{17}$$

kde komplexní čísla α, β a reálné číslo C jsou konstanty, z nichž alespoň jedna je různá od nuly.

Dvě přímky $\alpha_i \xi + \beta_i \eta + C_i t = 0$, $(i = 1,2)$ jsou totožné právě tehdy, je-li hodnost matice $\begin{bmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & C_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & C_2 \end{bmatrix}$ rovna jedné.

Geometrické místo bodů, jejichž souřadnice ξ, η, t splňují vztah

$$\bar{\beta} \xi + \bar{\alpha} \eta + Ct = 0, \tag{17,1}$$

nazveme přímkou konjugovanou k přímce (17). Přímka konjugovaná k přímce (17.1) je přímka (17).

Dvě přímky $\alpha_i \xi + \beta_i \eta + C_i t = 0$ $(i = 1,2)$ jsou vzájemně konjugované právě tehdy, je-li hodnost matice $\begin{bmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & C_1 \\ \bar{\beta}_2, & \bar{\alpha}_2, & C_2 \end{bmatrix}$ rovna jedné. Přímka (17) je reálná právě tehdy, je-li sama k sobě konjugovaná, t. j. je-li hodnost matice $\begin{bmatrix} \alpha, & \beta, & C \\ \bar{\beta}, & \bar{\alpha}, & C \end{bmatrix}$ rovna jedné. Její rovnici lze vždy uvést na tvar

$$\bar{\beta} \xi + \beta \eta + Ct = 0. \tag{17,2}$$

Všechny ostatní přímky nazveme imaginárními. Každé dvě různé komplexní přímky mají právě jeden bod společný. Mají-li tedy dvě komplexní přímky aspoň dva body společné, pak jsou totožné. Společný bod dvou imaginárních konjugovaných přímek je vždy reálný. Každá imaginární přímka má právě jeden bod reálný. Přímka, obsahující dva imaginární konjugované body, je reálná. Přímka, obsahující bod O_1 (1, 0 ,0), resp. bod O_2 (0, 1, 0), resp. bod O_3 (0, 0, 1), má rovnici

$$\beta\eta + Ct = 0, \text{ resp. } \alpha\xi + Ct = 0, \text{ resp. } \alpha\xi + \beta\eta = 0. \tag{17,3}$$

Přímka, obsahující dvojici bodů O_2, O_3, resp. dvojici O_1, O_2, resp. dvojici O_1, O_2, má rovnici

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = 0 & \text{(tak zvaná pravá isotropická přímka)} \\ \text{resp.} & \\ \eta = 0 & \text{(tak zvaná levá isotropická přímka)} \\ \text{resp.} & \\ t = 0 & \text{(přímka nevlastní).} \end{array}\right\} \tag{17,4}$$

Zvolíme-li na přímce (17) body (ξ_i, η_i, t_i), $i = 1, 2$, pak platí

$$\alpha\xi_i + \beta\eta_i + Ct_i = 0, \quad i = 1, 2, \tag{17,5}$$

a poněvadž trojice (α, β, C) je nenulová, plyne z (17) a (17,5)

$$\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & t \\ \xi_1, & \eta_1, & t_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & t_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{18}$$

což je rovnice přímky určené body (ξ_i, η_i, t_i), $i = 1, 2$. Z rovnice (18) dále plyne

$$\begin{aligned} \xi &= \varkappa_1 \xi_1 + \varkappa_2 \xi_2, \\ \eta &= \varkappa_1 \eta_1 + \varkappa_2 \eta_2, \\ t &= \varkappa_1 t_1 + \varkappa_2 t_2, \end{aligned} \tag{18,1}$$

kde $(\varkappa_1, \varkappa_2) \neq 0$. Koeficienty $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ nazýváme homogenními parametry bodu (ξ, η, t) v řadě, určené body (ξ_i, η_i, t_i), $i = 1, 2$. Tyto koeficienty svým poměrem určují jednoznačně bod řady. Základní body řady dostaneme pro $\varkappa_2 = 0$, resp. $\varkappa_1 = 0$. Poměr $\varkappa = \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$ (tak zvaný parametr) je úměrný dělicímu poměru bodu (ξ, η, t) vzhledem k bodům (ξ_1, η_1, t_1), (ξ_2, η_2, t_2) jako základním. Dvojpoměr dvou bodů řady a bodů základních je roven podílu parametrů prvých dvou bodů. Bod harmonicky sdružený s bodem (ξ, η, t) vzhledem k bodům (ξ_i, η_i, t_i), $i = 1, 2$ jako základním má parametr $-\varkappa$ a souřadnice $\varkappa_1\xi_1 - \varkappa_2\xi_2$, $\varkappa_1\eta_1 - \varkappa_2\eta_2$, $\varkappa_1 t_1 - \varkappa_2 t_2$.

5.3 Křivky

Křivkou (ve zvláštním případě přímkou) budeme rozumět geometrické místo bodů, jejichž souřadnice vyhovují rovnici

$$\begin{aligned} A_0 t^n &+ (\bar{\alpha}_1 \xi t^{n-1} + \alpha_1 \eta t^{n-1}) + (\bar{\alpha}_2 \xi^2 t^{n-2} + A_2 \xi \eta t^{n-2} + \\ &+ \alpha_2 \eta^2 t^{n-2}) + \ldots + (\bar{\alpha}_0 \xi^n + \bar{\beta}_0 \xi^{n-1} \eta + \ldots + \beta_0 \xi \eta^{n-1} + \alpha_0 \eta^n) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

kde alespoň jeden z koeficientů α_i, A_i je různý od nuly.

Tato křivka je vždy sama k sobě konjugovaná, neboť obsahuje-li bod (ξ, η, t), obsahuje také bod $(\bar{\eta}, \bar{\xi}, t)$ s ním konjugovaný.

Poznámka: Nebudeme vyšetřovat křivky dané rovnicí (19) a obsahující jen konečný počet reálných bodů.

(Dokončení)

FAKTOROVÉ EXPERIMENTY V PRŮMYSLOVÉM VÝZKUMU

Milan Beneš (Ústav pro výzkum rud, Praha),
Jiří Likeš (Ocelářský výzkumný ústav, Praha).

(Dokončení)

Principy a methody spřažení

Nyní vyložíme některé další principy pro faktorovou analysu, které budou potřebné především při neúplných faktorových experimentech. Byly již dříve uvedeny důvody, proč ztrácejí pro nás interakce nejvyšších řádů praktický význam, což se projevuje hlavně tehdy, jestliže máme sledovat větší počet faktorů. Po prvé bylo těchto principů využito opět v zemědělském výzkumu, kdy byly faktorové experimenty rozděleny do několika bloků, aby byla zaručena stejnoměrnost půdy, na které se experiment prováděl. V průmyslovém výzkumu má obvykle toto rozdělení do bloků poněkud odlišný charakter. Někdy jde o to, aby tímto rozdělením faktorových experimentů do bloků byly dodrženy v čase nebo v prostoru stále stejné podmínky, které při experimentu působí. Na příklad, tímto způsobem může být vyloučen nežádoucí vliv pracovníka, pracovního zařízení, materiálu na výsledek pokusu nebo vliv časového trendu, jestliže se experimentální podmínky s časem mění. Jindy provádíme rozdělení do bloků z toho důvodu, abychom při stejném počtu pokusů mohli sledovat ještě další faktor, který při experimentu působí, a tím vlastně takto zmenšíme celkový počet pokusů, který bychom jinak museli v experimentu provést. Statistická analysa výsledků je v obou těchto případech stejná. Je však nutno mít na zřeteli tu důležitou okolnost, že tyto bloky nebo další faktor, který je těmito bloky představován, nesmí mít interakci žádného řádu s ostatními faktory, které sledujeme. Pokud by tato interakce mezi bloky a ostatními faktory skutečně existovala, porušila by se značným způsobem vyváženost celého experimentu, která je právě při faktorové analyse velmi důležitá.

Podstata rozdělení faktorových experimentů do bloků spočívá v tom, že případné rozdíly mezi bloky spojíme s interakcemi, které jsme dříve určitým způsobem zvolili. Způsob spojení účinků bloků a zvolených interakcí, které má za následek ztrátu informací o těchto interakcích, budeme nazývat spřažením (*confounding*).

Vysvětlíme krátce princip spřažení přímo pro experimenty typu 2^n v případě, že experiment rozkládáme pouze do dvou bloků. V tomto případě je nejlépe spřáhnout interakci nejvyššího řádu, která podle formule (1) je

$$A_1 A_2 \ldots A_n = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} (a_i - 1). \tag{9}$$