Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jurij Michailov Smirnov

Proximitní prostory

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 1, 14--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137262

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

J. M. SMIRNOV

PROXIMITNÍ PROSTORY

О ПРОСТРАНСТВАХ БЛИЗОСТИ

(*Mat. sbornik*, sv. 31 (1952), č. 3, str. 543—574

Tento článek s názvem „O prostranstvach blizosti", byl uveřejněn v roce 1952; dosud však má základní význam.

Jsou zde podány jen základy theorie proximitních prostorů; proto jsem překlad poněkud upravil. Vynechal jsem předmluvu — úvodem může být souhrnný článek P. S. Alexandrova [15]. Vynechal jsem odstavec 4, který obsahuje výsledky nikoli základního významu (souvislost s Weilovými stejnoměrnými strukturami). Důkaz věty 3 jsem pak musel převzít z práce [6] V. A. Jefremoviče. Rád bych zde poznamenal, že výsledky odstavce 1 a věta 15 také pocházejí od V. A. Jefremoviče, který také předvídal výsledky odstavce 2 a začal pracovat na problémech dále rozvíjených v pracech [16]. Pro pohodlí čtenáře jsem podal přímé důkazy vět 9 a 11 a několika výsledků odstavce 3 — v originále jsou důsledky autorovy práce [9]. Několik pomocných vět se pak stalo zbytečných; pro jejich inherentní zajímavost jsem je však ponechal.

Překladatel

1. Definice a základní vlastnosti

Prostor P nazveme proximitním prostorem nebo δ-prostorem[1]) když pro každé dvě jeho podmnožiny je stanoveno zda jsou nebo nejsou blízké (nejsou blízké = jsou vzdálené), a to tak, aby byly splněny tyto axiomy:

B 1 *Je-li A blízká k B, pak B je blízká k A,*

B 2 *$A_1 \cup A_2$ je blízká k B právě když některá z A_i je blízká k B,*

B 3 *Dva body jsou blízké právě když jsou totožné,*

B 4 *Prostor P je vzdálený od $\emptyset$,*

B 5 *Ke každé dvojici vzdálených množin A_i existuje dvojice množin B_i tak, že $B_1 \cup B_2 = P$ a že A_i je vzdálené od B_i.*

V t. zv. obecných δ-prostorech je B 3 nahrazen slabším B 3': Každý bod je blízký k sobě.

Příklady. 1. Metrický prostor s proximitou: A, B jsou blízké právě když $\varrho(A, B) = 0$.

2. Topologická grupa s proximitou: A, B jsou blízké právě když $(UA) \cap B \neq \emptyset$ pro každé okolí U jednotky grupy; druhá možnost: právě když $(AU) \cap B \neq \emptyset$ pro každé okolí U jednotky grupy. Každá topologická grupa má tedy dvě proximity, které jsou totožné, když grupa je abelovská nebo bikompaktní. V případě, že grupa není T_1-prostorem, máme obecný δ-prostor.[2])

---

[1]) Název δ-prostor se dosud neujal; budeme ho však používat. V analogii s terminologií u nás běžnou pro topologické prostory, budeme též užívat pojmu „proximita δ na množině P". (*Pozn. překl.*)

[2]) Ekvivalentní formulace prvé definice: $1 \in \overline{AB^{-1}}$; existují $x_a \in A$, $y_a \in B$ s $x_a y_a^{-1} \to 1$ (*Pozn. překl.*)

3. T_ϱ-prostor s proximitou: A, B jsou vzdálené právě když jsou funkcionálně oddělitelné. V dalším uvidíme, že naopak každý δ-prostor má přirozenou T_ϱ-topologii.

V δ-prostoru definujme $\delta(A,B) = 0$ když A, B jsou blízké a $= 1$ v opačném případě. Pak B 2 má tvar

$$\delta(A_1 \cup A_2, B) = \min(\delta(A_1, B), \delta(A_2, B)) = \delta(A_1, B) \cdot \delta(A_2, B).$$

Dále platí

C 1 *$A \subset B$ implikuje $\delta(A, C) \geq \delta(B, C)$,*

C 2 *Incidentní množiny jsou blízké,*

C 3 *Každá množina je vzdálená od $\varnothing$.*

V δ-prostoru P nechť $F \subset P$ je uzavřená, když obsahuje všechny body blízké k F. Tím je definována topologie v P ($\overline{A}$ je průnik všech uzavřených nadmnožin, atd.; lze ukázat, že pro obecné δ-prostory tato topologie je T_1 právě když P splňuje podmínku B 3″: Blízké body jsou totožné). $\overline{A}$ lze charakterisovat přímo:

Lemma 1. *$\overline{A}$ sestává ze všech bodů blízkých k A.*

Důkaz. Označme B množinu bodů blízkých k A. Každé $x \in B$ je blízké k A, takže je blízké každé nadmnožině (C 1), speciálně uzavřené $F \supset A$, tedy $x \in F$; jinými slovy $B \subset \overline{A}$. Naopak pro $x \notin B$ je $\delta(x, A) = 1$, takže (B 5) existuje pokrytí $P = C \cup D$ s $\delta(x, C) = \delta(A, D) = 1$; každý $y \in D$ je tedy vzdálený od A, t. j. $D \subset -B$, $\Longrightarrow B \subset -D \subset C$[3]); odtud $\delta(x, B) \geq \delta(x, C) = 1$. Každý bod z $-B$ je tedy vzdálený od B, takže B je uzavřená; tedy $\overline{A} \subset B$.

Lemma 2. $\delta(A, B) = \delta(\overline{A}, \overline{B})$.

Důkaz. Stačí dokázat $\delta(A, B) = \delta(\overline{A}, B)$. To je zřejmé pro $\delta(A, B) = 0$. V opačném případě máme pokrytí $P = C \cup D$ s $\delta(A, D) = \delta(B, C) = 1$; jako v předešlém důkaze $\overline{A} \subset C$, takže $\delta(B, \overline{A}) \geq \delta(B, C) = 1$.

Když A je vzdálené od $-B$, nazveme B **δ-okolím** množiny A, označíme $A \Subset B$. Axiom B 5 pak můžeme formulovat takto: Dvě vzdálené množiny mají disjunktní δ-okolí. Lze snadno dokázat

D 1 $A \Subset B \Longrightarrow -B \Subset -A$,

D 2 $A \Subset B \Longrightarrow A \subset B$,

D 3 *Když $A \subset B \Subset C$ nebo $A \Subset B \subset C$, pak $A \Subset C$,*

D 4 *Když $A_i \Subset B_i$ pro $1 \leq i \leq k$, pak $\bigcup A_i \Subset \bigcup B_i$, $\bigcap A_i \Subset \bigcap B_i$,*

D 5 *Když $A \Subset C$, pak existuje B s $A \Subset B \Subset C$.*

(Důkaz D 4: $\delta(\bigcup A_i, -\bigcup B_i) = \prod\limits_i \delta(A_i, -\bigcup\limits_j B_j) \geq \prod\limits_i \delta(A_i, -B_i) = 1$; zbytek je duální; důkaz D 5: A, $-C$ mají disjunktní δ-okolí B, resp. D, a pak $A \Subset B \subset -D \Subset C$.)

Lemma 3. *Pro každé $B \Supset A$ existuje otevřená C s $A \Subset C \subset B$.*

Důkaz. $1 = \delta(A, -B) = \delta(A, \overline{-B}) = \delta(A, -(-\overline{-B}))$; stačí tedy volit $C = -\overline{-B} = B^0$ (vnitřek).[4])

---

[3]) $-A$ je komplement A v P. $\Longrightarrow$ je implikace. (*Pozn. překl.*)

[4]) Z důkazu plyne dokonce, že vnitřek δ-okolí je δ-okolím, t. j. $A \Subset B \Longrightarrow A \Subset B^0$. Poznamenejme ještě: G otevřená, $x \Subset G \Longrightarrow x \in G$, neboť $x \in G = G^0 = \overline{-G}$, což znamená podle definice $\delta(x, -G) = 1$. (*Pozn. překl.*).

Lemma 4. *Průnik všech δ-okolí množiny A jest $\overline{A}$.*

Důkaz. Nechť G je tento průnik. Pak $1 = \delta(A, -B) = \delta(\overline{A}, -B)$, takže $\overline{A} \subset G$. Naopak, když $x \notin \overline{A}$, je $\delta(x, A) = 1$, takže A má δ-okolí B bez x; tedy $x \notin G$, cbd.[5])

Nechť τ je topologie a δ proximita na téže množině R. Řekneme, že δ proximitou (na) topologickém prostoru (R, τ), když přirozená topologie proximity δ se shoduje s τ.

Věta 1. *Bikompakt má jedinou proximitu.*

Důkaz. Nechť A, B jsou podmnožiny bikompaktu R, $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Pro každé $x \in \overline{A}$ je $\delta(x, \overline{B}) = 1$; a pak x má otevřené δ-okolí $G(x)$ vzdálené od $\overline{B}$. $\overline{A}$ je bikompaktní, takže $\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i) = U$ pro vhodná x_i; odtud $\delta(U, \overline{B}) = \prod_{i=1}^{n} \delta(G(x_i), \overline{B}) = 1$, tedy také $\delta(A, B) = 1$. Užitím lemmatu 2 máme toto: dvě množiny jsou vzdálené právě když mají disjunktní uzávěry. Tím je proximita v R určena jednoznačně.

Zobrazení f δ-prostorů P do Q nazveme δ-zobrazením, když $\delta(f(A), f(B)) \leqq \delta(A, B)$ kdykoliv $A \subset P \supset B$. Je-li f prosté zobrazení P na Q a jsou-li f i f^{-1} δ-zobrazení, nazveme f δ-homeomorfií.

Lemma 5. *δ-zobrazení je spojité.*

Důkaz. Nechť f je δ-zobrazení δ-prostorů P do Q; nechť $A = \overline{A} \subset Q$. Pro $x \notin f^{-1}(A)$ je $f(x) \notin A$, takže $1 = \delta(f(x), A) \leqslant \delta(f^{-1} f(x), f^{-1}(A)) \leqslant \delta(x, f^{-1}(A))$. To platí pro všechny takové x; tedy $f^{-1}(A)$ je uzavřená.

Věta 2. *Spojité zobrazení bikompaktu do proximitního prostoru je δ-zobrazením.*

Důkaz. Nechť f spojitě zobrazuje bikompakt R do δ-prostoru P. Pro blízké podmnožiny A, B v R je $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ (důkaz věty 1), takže $\emptyset \neq f(\overline{A}) \cap f(\overline{B}) \subset \overline{f(A)} \cap \overline{f(B)}$; odtud $0 = \delta(\overline{f(A)}, \overline{f(B)}) = \delta(f(A), f(B))$. Celkem: obrazy blízkých množin jsou blízké.

Věta 3. *Zobrazení f metrických prostorů P do Q je stejnoměrně spojité právě když je δ-zobrazením.*

Důkaz.[6]) Když f je stejnoměrně spojité, když A, B jsou blízké v P, pak existují $x_n \in A$, $y_n \in B$ s $\varrho(x_n, y_n) \to 0$; pak také $\varrho(f(x_n), f(y_n)) \to 0$, takže $\varrho(f(A), f(B)) = 0$.

Naopak, nechť f není stejnoměrně spojité, takže existují $x_n, y_n \in P$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $\varrho(x_n, y_n) \to 0$ a že $\varrho(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$ (označme $f(x_n) = a_n$, $f(y_n) = b_n$). Ukažme, že lze volit $n_k \uparrow \infty$ tak, že $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ jsou vzdálené. Když pro některé s je množina všech $n : \varrho(a_s, b_n) < \frac{1}{4}\varepsilon$ nekonečná, jsme hotovi, neboť

$$\varrho(a_{n_i}, b_{n_k}) + \frac{1}{2}\varepsilon > \varrho(a_{n_i}, b_{n_k}) + \varrho(a_s, b_{n_k}) + \varrho(a_s, b_{n_i}) \geqslant$$

$$\geqslant \varrho(a_{n_i}, b_{n_k}) + \varrho(b_{n_i}, b_{n_k}) \geqslant \varrho(a_{n_i}, b_{n_i}) > \varepsilon,$$

a tedy vzdálenost $\{a_{n_k}\}_1^{\infty}$, $\{b_{n_k}\}_1^{\infty}$ je $> \frac{1}{2}\varepsilon$. Podobně pro b_s.

---

[5]) Zejména odtud plyne, že když množina je svým vlastním δ-okolím, pak je uzavřená a otevřená. (*Pozn. překl.*)

[6]) V originále věta 3 je důsledkem věty 19, kterou neuvádím. Předvedu zde klasický důkaz V. A. Jefremoviče [6]. (*Pozn. překl.*)

Můžeme tedy předpokládat, že pro každé s jsou množiny všech n: $\varrho(a_s, b_n) < \frac{1}{4}\varepsilon$, $\varrho(a_n, b_s) < \frac{1}{4}\varepsilon$ obě konečné. Volme nyní $n_1 = 1$; čísel n s $\varrho(a_n, b_{n_1}) < \frac{1}{4}\varepsilon$ nebo $\varrho(a_{n_1}, b_n) < \frac{1}{4}\varepsilon$ je konečně mnoho, takže existuje $n_2 > n_1$ s $\varrho(a_{n_1}, b_{n_2}) \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon \leqslant \varrho(a_{n_2}, b_{n_1})$; čísel n s $\varrho(a_n, b_s) < \frac{1}{4}\varepsilon$ nebo $\varrho(a_s, b_n) < \frac{1}{4}\varepsilon$, kde $s = n_1$ nebo $= n_2$ je konečně mnoho, takže existuje $n_3 > n_2$ opačné vlastnosti; atd. Máme tedy $\{a_{n_k}\}_1^\infty$, $\{b_{n_k}\}_1^\infty$ s $\varrho(a_{n_i}, b_{n_j}) \geqslant \frac{1}{4}\varepsilon$. Celkem: když f není stejnoměrně spojité, pak převádí blízké množiny $\{x_{n_k}\}$, $\{y_{n_k}\}$ ve vzdálené množiny $\{a_{n_k}\}$ $\{b_{n_k}\}$.

2. Obaly proximitních prostorů

Je-li Q podmnožina δ-prostoru P, pak P indukuje proximitu v Q (podmnožiny jsou blízké v Q právě když byly blízké v P[7])). Nechť P, Q jsou δ-prostory; řekneme, že P je *δ-obalem* δ-prostoru Q, když P je δ-nadprostorem prostoru Q (aspoň až na δ-homeomorfii) a Q je hustá v P. δ-prostor P nazveme *absolutně uzavřený*, je-li uzavřený v každém δ-nadprostoru. K danému δ-prostoru P nyní sestrojíme maximální absolutně uzavřený δ-obal uP.[8])

(1) Definice uP. Nechť P je δ-prostor. Soustavu ξ podmnožin nazveme *δ-systémem*, když každé $A \in \xi$ je δ-okolím některého $B \in \xi$. Centrovaný (konečné průniky jsou neprázdné) δ-systém nazveme *koncem*, není-li vlastní částí jiného centrovaného δ-systému. Každý konec ξ obsahuje konečné průniky svých množin (jinak lze ξ rozšířit o tyto průniky; vzniká opět centrovaný δ-systém — viz D 4), a také každou množinu obsahující některou $A \in \xi$ (jinak opět lze ξ rozšířit). Každý centrovaný δ-systém je obsažen v některém konci (Zornovo lemma). Množinu všech konců prostoru P označme uP.

(2) Definice G_A. Pro $A \subset P$ nechť G_A je množina všech konců ξ s $A \in \xi \in uP$. Z (1) plyne ihned $G_A \cap G_B = G_{A \cap B}$, $\bigcup G_{A_\lambda} \subset G_{\bigcup A_\lambda}$. Dále platí

$$\delta(-A, -B) = 1 \Rightarrow G_A \cup G_B = uP.$$

(*Důkaz*). Stačí ukázat, že každý $\xi \in uP$ obsahuje buď A nebo B. To platí, když $-A = \emptyset$ ($A = P \in \xi$). V opačném případě soustava ξ_{-A} všech δ-okolí množiny $-A$ je centrovaná a (D 5) δ-systémem, a $B \in \xi_{-A}$. Nyní buď každá $C \in \xi$ je incidentní s $-A$, a pak $\xi \cup \xi_{-A}$ je centrovaným δ-systémem, takže (ξ je saturovaný) $\xi_{-A} \subset \xi$ a tedy také $B \in \xi$; anebo některá $C \in \xi$ je disjunktní s $-A$, takže $C \subset A$ a tedy také $A \in \xi$.

(3) Definice proximity v uP: Podmnožiny C, D prostoru uP nechť jsou vzdálené právě když existují vzdálené A, B v P s $C \subset G_A$, $D \subset G_B$. Ověříme axiomy B. (B 1 je zřejmé).

B 2 v záporném tvaru: Nechť $C_1 \cup C_2$ je vzdálená od D v uP; pak pro vhodné vzdálené A, B v P je $C_1 \cup C_2 \subset G_A$, $D \subset G_B$; zřejmě pak C_i je vzdálená od D.

[7]) Je pak zřejmé, že v příslušných topologiích je Q vnořeno do P. Názvy δ-nadprostor, atd. jsou snad jasné. (*Pozn. překl.*)

[8]) Analogie alfa-obalu [8]. Původní myšlenka je snad Wallmanova [18]. (*Pozn. překl.*)

Naopak, jsou-li C_1, D resp. C_2, D vzdálené dvojice, existují dvojice vzdálených množin A_1, B_1 a A_2, B_2 v P takové, že $C_1 \subset G_{A_1}$, $C_2 \subset G_{A_2}$, $D \subset G_{B_1} \cap G_{B_2}$; pak $C_1 \cup C_2 \subset G_{A_1 \cup A_2}$, $D \subset G_{B_1 \cap B_2}$ a $A_1 \cup A_2$, $B_1 \cap B_2$ jsou vzdálené v P, takže i $C_1 \cup C_2$, D jsou vzdálené v uP.

B 3: Především $\delta(\xi, \xi) = 0$, neboť každá dvojice množin z ξ je incidentní. Za druhé, nechť ξ, η jsou různé konce. Nutně existují disjunktní $A \in \xi$, $B \in \eta$ (jinak $\xi \cup \eta$ je koncem); existuje C, $A \ni C \in \xi$; pak $B \subset -A \Subset -C$, takže B, C jsou vzdálené; konečně $\xi \in G_C$, $\eta \in G_B$. Celkem: různé konce jsou vzdálené.

B 4: $\emptyset, P$ jsou vzdálené, $\emptyset = G_\emptyset$, $uP = G_P$, takže $\emptyset, uP$ jsou vzdálené.

B 5: Nechť C, D jsou vzdálené v uP; nechť pak A, B jsou vzdálené v P, $C \subset G_A$, $D \subset G_B$. Jest $B \Subset -A$, takže (D 5) existují B_i v P s $B \Subset B_1 \Subset B_2 \Subset -A$. Z (2) plyne $uP = G_{-B_1} \cup G_{B_2}$; z $\delta(A, B_2) = 1$ a $C \subset G_A$ plyne $\delta(C, G_{B_2}) = 1$; analogicky z $\delta(B, -B_1) = 1$ a $D \subset G_B$ plyne $\delta(D, G_{-B_1}) = 1$.

(4) Konstrukce f. Dokažme, že soustava ξ_x všech δ-okolí bodu $x \in P$ je koncem. Zřejmě je centrovaným δ-systémem. Nechť ξ je δ-systémem, $\xi \supset \xi_x \neq \xi$. Volme $A \in \xi - \xi_x$; existují B, C v ξ s $C \Subset B \Subset A$. Jest $1 = \delta(C, -A) \leqslant \delta(C, x)$, takže $-C \in \xi_x \subset \xi$. Protože také $C \in \xi$, ξ nemůže být centrovaná; ξ_x je tedy saturovaná, t. j., je koncem. Pro $x \in P$ nyní položme $f(x) = \xi_x$.

(5) Pro $A \subset P$ je $f^{-1}(G_A) = A^0$. (Důkaz) $x \in f^{-1}(G_A) \Rightarrow \xi_x \in G_A \Rightarrow A \in \xi_x \Rightarrow$ $\Rightarrow x \Subset A$ (pozn.[4]) $\Rightarrow x \in A^0$. Naopak, když $x \in A^0$, je x vzdálený od $\overline{-A} =$ $= -(A^0)$, $\Rightarrow x \Subset A^0 \subset A$; jinými slovy $A \in \xi_x$, t. j. $\xi_x \in G_A$.

(6) f je δ-homeomorfií. Různé body x, y v P mají disjunktní δ-okolí A, B; ξ_x, ξ_y jsou nutně různé; f je tedy prosté. Nechť C, D jsou vzdálené v uP; existují vzdálené A, B v P s $C \subset G_A$, $D \subset G_B$; z (5) plyne $f^{-1}(C) \subset A^0$, $f^{-1}(D) \subset B^0$; $f^{-1}(C)$, $f^{-1}(D)$ jsou tedy vzdálené. Naopak, nechť A, B jsou vzdálené v P. Jest $B \Subset -A$, existují B_i v P s $B \Subset B_1 \Subset B_2 \Subset -A$. Užitím lemmatu 3 a (5) $B \subset B_1^0$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(B) \subset G_{B_1}$, a analogicky $f(A) \subset G_{-B_2}$; z $\delta(B_1, -B_2) = 1$ plyne $\delta(f(A), f(B)) = 1$.

Nyní identifikujme (soustavně) P s jeho δ-homeomorfním obrazem v uP. (5) lze pak formulovat takto: $P \cap G_A = A^0$.

(7) uP je δ-obalem prostoru P. Stačí dokázat, že P je hustá v uP. Nechť $\xi \in uP$ a nechť $A, B \subset P$ jsou takové, že $\xi \in G_A$, $P \subset G_B$; z (5) $P = B$, $\Rightarrow \delta(A, B) =$ $= 0$; jinými slovy, každý $\xi \in uP$ je blízko k P.

Věta 4. *Proximitní prostor je absolutně uzavřený právě když každý jeho centrovaný δ-systém má neprázdný průnik.*

Důkaz. Není-li δ-prostor P absolutně uzavřený, má δ-obal $Q = P \cup y$ s $y \notin P$. Nechť η je konec sestavený ze všech δ-okolí bodu y v Q; nechť ξ sestává z průniků P s množinami z η. Každá $A \in \xi$ je $\neq \emptyset$ (jinak by y byl isolovaný); pro $A, B \in \xi$ je $A \cap B \in \xi$ (D 4), tedy ξ je centrovaná; $C \Subset D$ v $Q \Rightarrow P \cap C \Subset P \cap D$ v P[9]), tedy ξ je δ-systémem. Z lemmatu 4 plyne, že průnik η je y, takže průnik ξ je $\emptyset$.

Naopak, nechť P je δ-prostor s centrovaným δ-systémem ξ', jehož průnik je $\emptyset$. Konec $\xi \supset \xi'$ má také prázdný průnik, takže $uP \ni \xi \notin P$; tedy $uP \neq P$ a P není absolutně uzavřený.

Věta 5. *uP je absolutně uzavřený.*

Důkaz. Nechť η' je centrovaný δ-systém v uP; nechť η je konec, $\eta \supset \eta'$. Nechť ξ' je soustava průniků P s množinami z η; tak jako v důkaze věty 4, ξ' je

[9]) $1 = \delta(C, Q - D) \leqslant \delta(P \cap C, P - D) = \delta(P \cap C, P - (P \cap D))$. *(Pozn. překl.)*

centrovaný δ-systém; nechť ξ je konec v P, $\xi \supset \xi'$. Volme libovolně $C \in \eta'$. Kdyby $\xi \notin C$, existovala by $D \in \eta'$ s $D \Subset C$, t. j. s $\delta(D, \xi) = 1$; pak by existovaly vzdálené A, B v P s $\xi \in G_A$, $D \subset G_B$, a tedy $A \in \xi$, $P \cap D \subset B^0 \subset B$, podle (5); odtud plyne jednak ($D \in \eta' \subset \eta' \Longrightarrow$) $P \cap D \in \xi$, jednak $\delta(A, P \cap D) \geqslant \delta(A, B) = 1, \Longrightarrow A \cap (P \cap D) = \emptyset$, ve sporu s centrovaností ξ. Celkem: $\xi \in C$ kdykoliv $C \in \eta'$; uP je tedy absolutně uzavřený.

Věta 6. *Proximitní prostor je absolutně uzavřený právě když jeho topologie je bikompaktní.*

Důkaz. Bikompaktní δ-prostor je zřejmě absolutně uzavřený. Naopak, nechť P je absolutně uzavřený δ-prostor a nechť φ je centrovaná soustava uzavřených podmnožin. Pro každou $F \in \varphi$ nechť ξ_F je soustava jeho δ-okolí (D 5, $F \neq \emptyset \Longrightarrow \xi_F$ je centrovaný δ-systém); pak také $\xi = \bigcup_{F \in \varphi} \xi_F$ je centrovaný δ-systém. Nechť H je průnik ξ, takže $H \neq \emptyset$; podle lemmatu 4 $H = \bigcap_{F \in \varphi} \bigcap_{G \in \xi_F} G = \bigcap_{F \in \varphi} \overline{F} = \bigcap_{F \in \varphi} F$. Celkem: centrovaná soustava uzavřených množin má neprázdný průnik.

Věta 7. *Topologie proximitního prostoru je úplně regulární.* (Plyne z vět 5, 6).

Věta 8. *Každý proximitní prostor P je δ-homeomorfní s δ-podprostorem tichonovského součinu I^τ τ intervalů $\langle 0, 1 \rangle$, kde τ je váha topologie prostoru uP.* (uP lze topologicky vnořit do I^τ. Podle věty 2 je toto vnoření δ-homoemorfismem). (Lze předpokládat, že τ je *váha* topologického prostoru P — viď vlastnost (10) — *pozn. překladatele.*)

Věta 9. *uP je jediný absolutně uzavřený δ-obal proximitního prostoru P.*

Důkaz. Nechť vP je také absolutně uzavřený δ-obal δ-prostoru P, takže P je hustá v obou obalech, které jsou ještě bikompaktní.

Připomeňme dvě drobnosti z topologie: když P je hustá v T_0-prostoru Q ($= \overline{P}$), pak (a) G otevřená v $\overline{P} \Longrightarrow \overline{G} = \overline{G \cap P}$[10]), (b) F uzavřená v $\overline{P} \Longrightarrow F = \bigcap \overline{U}$, kde U probíhá množiny otevřená v P s $\overline{U} \supset F$.[11]) Nyní dokážeme, že uP, vP jsou homeomorfní (podle věty 2 jsou pak δ-homeomorfní). Přitom nechť $\overline{X}$ značí uzávěr v uP, $[X]$ uzávěr ve vP, G množiny otevřené v uP, H množiny otevřené ve vP, U množiny otevřené v P.[12])

(c) Pro $x \in uP$ položme $\varphi(x) = \bigcap_{G \ni x} [G \cap P]$ ve vP. Průnik konečného počtu okolí je okolím; tím spíše je soustava $[G \cap P]$ centrovaná, takže $\varphi(x) \neq \emptyset$.

(d) $\varphi(x)$ je jednobodová: Nechť $y \in \varphi(x)$; pak pro všechna $H \ni y$, $G \ni x$ je $\emptyset \neq [H] \cap [G \cap P], \Longrightarrow \emptyset \neq \overline{H} \cap \overline{G \cap P} = \overline{H} \cap \overline{G}$; nutně $x \in \overline{H}$. Je-li ještě $y \neq z \in \varphi(x)$, pak y, z mají okolí H_1, H_2 s $\emptyset = [H_1] \cap [H_2], \Longrightarrow \emptyset = \overline{H}_1 \cap \overline{H}_2$, ač $x \in \overline{H}_1$ a podobně $x \in \overline{H}_2$; spor.

(e) $x \in \overline{U} \Longleftrightarrow \varphi(x) \in [U]$: Z $x \in \overline{U}$ plyne, že pro každé $G \ni x$ je $\emptyset \neq \overline{G} \cap \overline{U} = \overline{G \cap P} \cap \overline{U}, \Longrightarrow \emptyset \neq [G \cap P] \cap [U]$; soustava $[U], [G \cap P]$ pro $G \ni x$ je tedy

[10]) $G = \overline{P} - \overline{\overline{P} - G}$, takže $\overline{G} = \overline{\overline{P} - \overline{\overline{P} - G}} \subset \overline{P} - \overline{\overline{P} - \overline{G}} = \overline{P} - \overline{\overline{P} - \overline{P \cap G}} \subset \overline{P} - (\overline{P} - \overline{P \cap G}) \doteq \overline{P \cap G}$, což zřejmě $\subset \overline{G}$. (*Pozn. překl.*)

[11]) $F \subset \bigcap \overline{U}$ zřejmě, a pro $F \not\ni x \in \bigcap \overline{U}$ má F okolí G v $\overline{P}$ s $x \notin \overline{G}$ (P je T_0); pak podle (a) $F \subset \overline{G} = \overline{G \cap P}$, takže $x \in \bigcap \overline{U} \subset \overline{G \cap P} \subset \overline{G}$, spor. (*Pozn. překl.*)

[12]) Z věty 1 plyne: X, Y blízké v $P \Longleftrightarrow \overline{X} \cap \overline{Y} \neq \emptyset \Longleftrightarrow [X] \cap [Y] \neq \emptyset$.

centrovaná, takže $\emptyset \neq [U] \cap \bigcap [G \cap P] = \varphi(x)$. Naopak, z $\varphi(x) \in [U]$ plyne $\emptyset \neq [U] \cap [G \cap P]$ kdykoliv $G \ni x$, takže $x \in \overline{U}$ jako v (d).

(f) Když nyní definujeme zobrazení ψ podobně (pro $y \in vP$ nechť $\psi(y) = \bigcap_{H \ni y} \overline{H \cap P}$), bude platit analogie (e), takže celkem

$$x \in \overline{U} \Longleftrightarrow \varphi(x) \in [U], \; y \in [U] \Longleftrightarrow \psi(y) \in \overline{U}.$$

Odtud snadno plyne $\varphi\psi(x) = x$, $\psi\varphi(y) = y$, takže φ je prosté zobrazení uP na vP s $\psi = \varphi^{-1}$.

(g) Když F je uzavřená v uP, je $F = \bigcap_{U \supset F} \overline{U}$ podle (b); z (f) plyne $\varphi(F) \subset \bigcap [U]$, a když $y \in \bigcap [U]$, je $\varphi^{-1}(y) \in \bigcap \overline{U}$, opět podle (f), takže $y \in \varphi(F)$. Celkem $\varphi(F) = \bigcap [U]$, takže obraz uzavřené množiny je uzavřený; stejně pro $\varphi^{-1} = \psi$.

Uveďme ještě několik vlastností δ-obalu uP.

(8) $G_A = G_{A^\circ}$. Zřejmě $G_{A^\circ} \subset G_A$. Naopak, pro $\xi \in G_A$ je $A \in \xi$, takže $B \Subset A$ pro některé $B \in \xi$; odtud $B \subset A^\circ$ (lemma 3), $\Longrightarrow A^\circ \in \xi$, $\Longrightarrow \xi \in G_{A^\circ}$.

(9) G_A je otevřená v uP. Stačí ukázat, že G_A je δ-okolím každého $\xi \in G_A$ (lemma 3). Když $\xi \in G_A$, je $C \Subset B \Subset A \in \xi$ pro vhodná $C, B \in \xi$; z vlastnosti (2) pak plyne $uP = G_{-B} \cup G_A$, $\Longrightarrow -G_A \subset G_{-B}$; dále $\xi \in G_C$, $\delta(C, -B) = 1$, takže podle (3) $\delta(\xi, -G_A) = 1$.

(10) Systém všech G_H s H otevřenou v P je otevřenou basí prostoru uP. Nechť E je otevřená v uP, $\xi \in E$; pak $-E$ je uzavřená, takže $\delta(\xi, -E) = 1$; pak existují vzdálené A, B v P s $\xi \in G_A = G_{A^\circ}$, $-E \subset G_B$, takže také $\delta(G_{A^\circ}, -E) = 1$; celkem $\xi \in G_{A^\circ} \subset E$.

(11) *G_A je největší otevřená množina H v uP s $H \cap P = A^\circ$.* Především je $G_A \cap P \subset A^\circ$, neboť $\xi \in G_A \cap P = G_{A^\circ} \cap P$ znamená $\xi = \xi_x \in G_{A^\circ}$ s $x \in P$, $\Longrightarrow A^\circ \in \xi_x$, $\Longrightarrow x \Subset A^\circ$ v P, takže $\xi_x \in A^\circ$ v uP.

Za druhé, $A^\circ \subset G_A$, neboť pro $\xi \in A^\circ$ je $\xi = \xi_x$ s $x \in A^\circ$, $\Longrightarrow x \Subset A^\circ$ (viz pozn. [4]), $\Longrightarrow A^\circ \in \xi_x = \xi$, $\Longrightarrow \xi \in G_A$. Celkem $G_A \cap P = A^\circ$. Konečně nechť E je sjednocení všech H otevřených v uP s H $\cap P = A^\circ$ (již jsme dokázali $G_A \subset E$). E je otevřená, takže podle (10) je $E = \bigcup G_\Gamma$ pro vhodná Γ otevřená v P, a zřejmě $G_\Gamma \cap P \subset \bigcup G_\Gamma \cap P = E \cap P = (\bigcup H) \cap P = A^\circ$; dokažme $\Gamma \subset A^\circ$: $x \in \Gamma \Longrightarrow x \Subset \Gamma \Longrightarrow \Gamma \in \xi_x \Longrightarrow \xi_x \in G_\Gamma$ (a $\in P$), $\Longrightarrow \xi_x \in A^\circ \Longrightarrow \xi_x = \xi_y$ s $y \in A^\circ \Longrightarrow x = y \in A^\circ$. Celkem $E = \bigcup G_\Gamma \subset G_{A^\circ} = G_A$.

(12) Je-li $P = \bigcup_1^n A_i$ *δ-pokrytí prostoru P*, je $uP = \bigcup_1^n G_{A_i}$ *δ-pokrytí uP* („$P = \bigcup_1^n A_i$ je δ-pokrytí" znamená, že existuje pokrytí $P = \bigcup_1^n B_i$ s $B_i \Subset A_i$). Nechť X° značí vnitřek v P, $[X]$ uzávěr v uP. Podle předpokladu je $P = \bigcup_1^n A_i = \bigcup_1^n B_i$ pro vhodná $B_i \Subset A_i$. Pak (pozn.[4]) $B_i \Subset A_i^\circ$ v P, takže také v uP; pak (lemma 1) $[B_i] \Subset A_i^\circ \subset G_{A_i^\circ} = G_{A_i}$, $\Longrightarrow [B_i] \Subset G_{A_i}$; konečně zřejmě $[B_i]$ je pokrytím $uP = [P]$.

3. Proximity a bikompaktní obaly

Pro chvíli budeme užívat tohoto označení: R je pevný T_ϱ-prostor (s topologií τ); R_α je libovolný proximitní prostor soumístný s topologickým prostorem R (t. j., R_α je množina R s proximitou α, jejíž přirozená topologie je opět τ); αR je libovolný bikompaktní obal topologického prostoru R.

Z vět 5 a 6 plyne, že každý R_α je vytvářen jistým bikompaktním obalem, totiž topologickým prostorem uR_α, který označíme αR. Z věty 1 naopak plyne, že každý bikompaktní obal αR vytváří jistý proximitní prostor R_α; přitom αR jakožto proximitní prostor je absolutně uzavřený δ-obal proximitního prostoru R_α (věta 9). Platí tedy:

Věta 10. *Zobrazení u, $u\,R_\alpha = \alpha R$, je vzájemně jednoznačným zobrazením množiny $\mathfrak{R}$ všech proximitních prostorů soumístných s daným T_ϱ-prostorem R na množinu $\mathfrak{B}$ všech bikompaktních obalů prostoru R.*

Tím se theorie proximitních prostorů redukuje na theorii bikompaktů.

Věta 11. *Každé δ-zobrazení f proximitních prostorů $P = X_\alpha$ do (na) $Q = Y_\alpha$ lze prodloužit na spojité zobrazení $\bar{f}$ bikompaktních obalů $\alpha X = uP$ do (na) $\alpha Y = uQ$.*

Důkaz. Položme $Z = f(X)$; uzávěry budeme brát v αX, resp. v αY. (a) Pro $z \in \bar{Z}$ položme $\psi(z) = \bigcap \overline{f^{-1}(H \cap Z)}$, kde H probíhá okolí z v $\bar{Z}$. $\{H \cap Z\}$ je centrovaná, takže $\psi(z) \neq \emptyset$. Dále pro $y \neq z$ je $\psi(y) \cap \psi(z) \neq \emptyset$, neboť pak y, z mají okolí H_i s $\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 = \emptyset$, $\Rightarrow H_i \cap Z$ vzdálené, $\Rightarrow f^{-1}(H_i \cap Z)$ vzdálené, $\Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{f^{-1}(H_1 \cap Z)} \cap \overline{f^{-1}(H_2 \cap Z)} = \emptyset$.

(b) Dokažme $\alpha X = \bigcup \psi(z)$. V opačném případě k $x \in \alpha X - \bigcup \psi(z)$ a ke každému z existuje $H_z \ni z$ s $x \notin \overline{f^{-1}(H_z \cap Z)}$; při tom z otevřeného pokrytí $\bar{Z} = \bigcup H_z$ lze vybrat konečné pokrytí $\bar{Z} = \bigcup H_n$, a pak $Z = \bigcup (H_n \cap Z)$, $\Rightarrow X = \bigcup f^{-1}(H_n \cap Z)$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha X = \bar{X} = \bigcup \overline{f^{-1}(H_n \cap Z)}$, ve sporu s $x \notin \overline{f^{-1}(H_n \cap Z)}$.

(c) Pro $x \in \psi(z)$ položme $\bar{f}(x) = z$. Podle (a), (b) je $\bar{f}$ zobrazení αX na $\bar{Z}$. Dále, $\bar{f}$ je prodloužením f: pro $x \in X$ je nutně $z = f(x)$, neboť v opačném případě mají z, $f(x)$ okolí H_i v $\bar{Z}$ s disjunktními uzávěry, takže i $\overline{f^{-1}(H_i \cap Z)}$ jsou disjunktní jako dříve, ač x patří do obou; spor.

(d) Pro F uzavřenou v $\bar{Z}$ a $x \notin \bar{f}^{-1}(F)$ je $x \notin \overline{f^{-1}(H_z \cap Z)}$ pro každé $z \in F$ a některé $H_z \ni z$; přitom $\{H_z\}$ je pokrytí bikompaktní F, takže je $\bar{f}^{-1}(F) = \psi(F) \subset \subset \bigcup \overline{f^{-1}(H_n \cap Z)}$ pro vhodná H_n jako dříve; tedy $G = -\bigcup \overline{f^{-1}(H_n \cap Z)}$ je okolí bodu x disjunktní s $\bar{f}^{-1}(F)$; celkem: vzor uzavřené množiny je uzavřený.

Vraťme se k původnímu označení. Nechť $\alpha R > \gamma R$ znamená, že existuje spojité zobrazení αR na γR identické na R[13].) Nechť $R_\alpha \geq R_\gamma$ znamená, že identita je δ-zobrazením R_α na R_γ.

Věta 12. *Zobrazení u, $uR_\alpha = \alpha R$, je pořádkovou isomorfií částečně uspořádaných množin $\mathfrak{R} = \{R_\alpha\}$ na $\mathfrak{B} = \{\alpha R\}$.*

Důkaz. Když $R_\alpha \geqslant R_\gamma$, pak identita je δ zobrazením R_α na R_γ, které můžeme prodloužit (věta 11) na spojité zobrazení αR na γR, takže $\alpha R \geq \gamma R$. Naopak, když $\alpha R > \gamma R$ a f je spojité zobrazení αR na γR identické na R, pak f je δ-zobrazení (věta 3), takže i identita je δ-zobrazení; t. j., $R_\alpha > R_\gamma$.

Každý T_ϱ-prostor R má maximální bikompaktní obal βR[14]); podle věty 12 R má tedy i **maximální proximitu**. Dále, lze dokázat, že T_ϱ-prostor má minimální bikompaktní obal právě když má jednobodovou bikompaktifikaci a právě když je lokálně bikompaktní.[15]) Platí tedy:

---

[13]) $\alpha R \geqslant \gamma R \geqslant \alpha R$ znamená homeomorfii; naopak však homeomorfní bikompaktní obaly ani nemusí být srovnatelné ve smyslu $\leqslant$ — viď. [9] (*Pozn. překl.*)

[14]) Čechův beta-obal — viz [17]. (*Pozn. překl.*)

[15]) Když R má minimální bikompaktifikaci αR, nechť $\xi, \eta \in \alpha R - R$, $\xi \neq \eta$; „slepením“ bodů ξ, η dostáváme bikompaktifikaci slabší než αR, spor; tedy minimální bikompaktifikace je jednobodová.

Věta 13. *Každý T_ϱ-prostor R má maximální proximitu β; minimální proximitu ψ má právě tehdy, když R je lokálně bikompaktní.*

Snadno lze popsat proximity β a ψ: dvě množiny jsou vzdálené při β právě když jsou funkcionálně oddělitelné (viz [14])); podmnožiny A, B s nebikompaktními uzávěry jsou blízké při ψ; má-li však jedna z nich bikompaktní uzávěr, jsou A, B blízké při ψ právě když mají incidentní uzávěry. Dále, zřejmě R má jedinou proximitu právě když β je ψ, takže

Věta 14. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby T_ϱ-prostor R měl jedinou proximitu jest: každé dvě uzavřené nebikompaktní podmnožiny jsou funkcionálně neoddělitelné.*

Na příklad topologický prostor $TW(\omega_1)$ všech ordinálních* čísel $< \omega_1$ je nebikompaktní a má jedinou proximitu.

Lemma 6. *Podmnožiny A, B δ-prostoru P jsou vzdálené právě když jsou funkcionálně oddělitelné δ-funkcí*, t. j., *δ-zobrazením f δ*-prostoru P do $\langle 0,1 \rangle$ s $f\,|A = 0$, $f|\,B = 1$.

(Zřejmě množiny oddělitelné δ-funkcí jsou vzdálené. Naopak, nechť A, B jsou vzdálené; pak mají disjunktní uzávěry v bikompaktním uP, takže je možné je funkcionálně oddělit spojitou funkcí v uP; zúžení této funkce na P je opět δ-funkcí.)

Věta 15. *Omezenou δ-funkci f definovanou na podmnožině A proximitního prostoru P lze prodloužit na δ-funkci $\bar{f}$ definovanou na P a splňující* $\sup f = \sup \bar{f}$.

Důkaz. Uzávěr $[A]$ v uP je absolutně uzavřeným δ-obalem δ-prostoru A; f lze tedy prodloužit na funkci f_1 definovanou na $[A]$ (věta 11); f_1 lze prodloužit na spojitou funkci f_2 definovanou na uP (věta Urysonova-Tietzeova); její zúžení na P je δ-funkcí (věta 2). Ve všech případech se zobrazuje do bikompaktního $\langle -M, M \rangle$, kde $M = \sup f$.

Literatura

[1] A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Paříž, 1937.

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Paříž, 1940.

[3] V. A. Jefremovič, *Něekvimorfnost' prostranstv Jevklida i Lobačevskovo*, UMN, IV, sv. 2 (30), 1949.

[4] V. A. Jefremovič, *Infinitěsimalnyje prostranstva*, DAN SSSR, LXXVI, č. 3, 1951.

[5] V. A. Jefremovič, *Infinitěsimalnyje prostranstva*, UMN, VI, sv. 4 (44), 1951.

[6] V. A. Jefremovič, *Geometrija blizosti I*, Mat. sb., sv. 31 (73), 1952.

[7] N. S. Ramm, *O regularnych sěmějstvach pokrytij*, UMN, VI, sv. 4 (44), 1951.

[8] P. S. Alexandrov, *O ponjatii prostranstva v topologii*, UMN, II, sv. 1 (17), 1947.

[9] Ju. M. Smirnov, *Otobraženija sistěm otkrytych množestv*, Mat. sb., 31 (73), 1952.

[10] Ju. M. Smirnov, *O pokrytijach topologičeskich prostranstv*, Učenyje zapiski MGU, ser. mat., 4, sv. 148, 1951.

[11] P. S. Alexandrov a P. S. Uryson, *O kompaktnych topologičeskich pro-*

* Když R má jednobodovou bikompaktifikaci $R \cup \xi$ (viď [11], kapitola 4, věta 3 a konstrukce), má každé $x \in R$ okolí G disjunktní s některým okolím H bodu ξ, při čemž $H = \xi \cup (R - F)$ s F bikompaktní v R; tedy $x \in G \subset F$, takže R je lokálně bikompaktní.

Když R je lokálně bikompaktní, je otevřená v každé své bikompaktifikaci αR (l. c., věta 3'); volme $\xi \in \alpha R - R$ a slepme uzavřenou množinu $\alpha R - R$ v bod ξ; pak $R \cup \xi$ je jednobodová bikompaktifikace slabší než αR a homeomorfní s každou jinou jednobodovou bikompaktifikací (l. c.).

stranstvach, Trudy mat. inst. im. Stěklova, XXXI.
[12] J. Tukey, *Convergence and uniformity in topology*, Princeton, 1940.
[13] A. D. Tajmanov, *O rasprostraněnii něpreryvnych otobraženij topologičeskich prostranstv*, Mat. sb., 31 (73),
[15] P. S. Alexandrov, *O pojmu prostoru v topologii*, . . .
[16] Ju. M. Smirnov, *O polnotě prostranstv blizosti*, Trudy mosk. mat. obšč. 3 a 4 (1954, 1955).
[17] E. Čech, *On bicompact spaces*, *Ann. of Math.*, (2) 38, 1937.
[18] H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, Ann. of Math., 39, 1938.

Zpracoval O. Hájek

N. A. DOBROTIN

PŮVOD KOSMICKÝCH PAPRSKŮ

ПРОИСХОЖДЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

(*Kosmičeskije luči*, GITTL, Moskva 1954, str. 297—307.)

Správně vysvětlit vznik kosmických paprsků je značně obtížný úkol, poněvadž ještě stále zůstává nevyjasněnou otázka, zda kosmické záření se vyskytuje pouze v prostoru planetární soustavy, nebo zda se rozprostírá v celé Galaxii, nebo dokonce v mezigalaktických prostorech.

Někteří zahraniční fysikové, kteří vycházejí ze svých idealistických koncepcí, se domnívají, že kosmické paprsky vznikly v době, kdy Vesmír měl úplně jinou strukturu než nyní, že v současné době kosmické paprsky nevznikají. Taková hlediska se ztotožňují s fideistickým nazíráním na stvoření světa, t. j. jsou nevědecká, znamenají odklon od snahy vysvětlit původ kosmického záření a konečně jsou naprosto v rozporu s pozorovanými fakty.

Jednoduchá úvaha vede k tomu, že pouze nepatrná část primárních částic může mít »věk« řádově 10^8 roků, který je však s kosmického hlediska velmi malý. Z toho vyplývá, že ani struktura Vesmíru, ani v něm probíhající procesy se nemohly za tuto dobu nějakým podstatným způsobem změnit.

V literatuře (1, 2) byla nejednou vyslovena domněnka o vzniku kosmických paprsků ze Slunce. Sluneční původ je však velmi málo pravděpodobný, neboť naráží na značné obtíže při vysvětlování isotropie (*pozn. překl.:* tím je míněn zjev, že kosmické paprsky dopadají na Zemi ze světového prostoru rovnoměrně ze všech stran a směrů, a teprve zemské magnetické pole je odchyluje) a stálosti intensity záření v čase. Je nutné předpokládat, že primární částice před dopadem na Zemi »bloudí« dlouhou dobu prostorem, jehož rozměry lze srovnat se sluneční soustavou. Tento závěr vede k předpokladu uzavřených drah, k jejichž vysvětlení je nutno připustit existenci zcela speciálních magnetických polí, která však mají pro svou speciálnost pouze hypothetický charakter.

J. P. Těrleckij (3, 4) podrobně vypracoval theorii zrychlování nabitých částic v elektromagnetických polích hvězd a částečně i v polích rotujících magnetisovaných hvězd. Jestliže osa magnetického dipólu hvězdy svírá s osou její rotace nějaký od nuly různý úhel, pak vzniká kolem hvězdy vírové elektrické pole. Proto může nabitá částice, která proletí v nějaké vzdálenosti od hvězdy, změnit svou energii následkem urychlení v tomto poli.

Urychlování nabitých částic v polích bude probíhat i v případě nulových úhlů mezi magnetickým a mechanickým momentem.