

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vladimír Müller

Poznámky k experimentálnímu studiu fyzikálních vlastností vulkanisátů kaučuku

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 5, 552--559

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137194>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

není seznámen s teorií Turingových strojů. Představme si nyní, že místo člověka, který má k dispozici tento „algorithmus napodobení“, postavíme Turingův stroj. Tento stroj však je právě universálním Turingovým strojem. Jestliže nějaký speciální Turingův stroj A řeší určitou úlohu, pak také universální Turingův stroj je schopen tuto úlohu rozřešit ovšem za předpokladu, že kromě vstupních dat úlohy bude na jeho pásku vložena i šifra stroje čili šifra příslušného algoritmu. V souvislosti s tím je možno užít funkčního schematu čili šifry A určitého algoritmu dvojím způsobem, plynoucím ze dvou hledisek:

1. Šifra A popisuje funkci logického bloku speciálního stroje Turingova, který realizuje zašifrovaný algoritmus. To je hledisko, z něhož jsme dosud vycházeli.

2. Šifra A popisuje instrukci, vloženou na pásku universálního stroje Turingova, kde má sloužit k uskutečnění příslušného algoritmu.

Soudobé elektronické samočinné počítačové stroje se staví stejně jako universální stroje Turingovy, do jejichž paměti se společně se vstupními daty úlohy vkládají též instrukce k jejímu řešení.

Závěrem je možno říci, že je vždycky možno (alespoň theoreticky) zkonstruovat takový samočinný počítač, který je schopen realizovat algoritmus k řešení určité dané úlohy nebo dokonce počítač, který je schopen realizovat algoritmy k řešení většího počtu úloh téhož typu.

Na druhé straně však teorie algoritmů ukazuje, že není možné každou matematickou nebo logickou úlohu algoritmisovat, což úzce souvisí s tím, že lidské myšlení nelze vždy úplně spoutat do tuhých algoritmických předpisů.

Je nesporně velmi významným pokrokem, můžeme-li určitou úlohu nebo určitou třídu úloh téhož typu v celém jejich rozsahu řešit pomocí samočinného počítačového stroje, i když zde zůstávají úlohy, které nelze v celém rozsahu řešit strojově a u nichž se musíme spokojit v podstatě klasickým způsobem řešení.

František Martan

POZNÁMKY K EXPERIMENTÁLNÍMU STUDIU FYSIKÁLNÍCH VLASTNOSTÍ VULKANISÁTŮ KAUCUKU

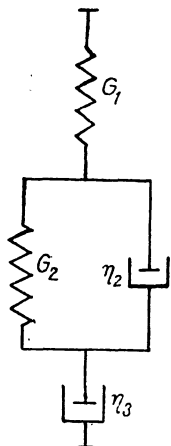
VÁCLAV MÜLLER

Hlavní úlohou experimentálního studia vulkanisátů kaučuku je určit z jejich uvažovaného počtu (vulkanisáty různé složením, dobou vulkanisace resp. jinými specifickými vlastnostmi) ty vulkanisáty, které se hodí svými fyzikálními i chemickými vlastnostmi nejlépe pro předpokládané použití v praxi.

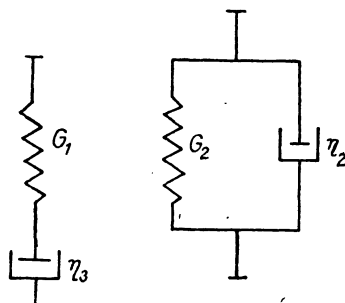
Při výběru vhodných experimentálních metod je nutno hlavně dbáti toho, jak dalece lze zachytit použitím zvolené metody základní mechanické resp. elektrické vlastnosti vulkanisátů, jaký je vztah mezi výsledky získanými různými měrnými metodami a do jaké míry lze tyto vztahy vysvětlit s přihlédnutím ke stejným základním vlastnostem zkoumaného vulkanisátu. Dále záleží na tom, jak přesně lze zjišťovat rozptyly výsledků fyzikálních zkoušek a s jakou matematickou jistotou lze činit výsledná tvrzení z vyplývajících výsledků.

Pro uspokojivé objasnění mechanických vlastností vulkanisátů kaučuku je nutno se zmínit stručně o Alfr ey o v ě modelové theorii, pokud je to nutné k posouzení zkušebních metod v rámci tohoto článku.

Jednoduchý model, demonstrující mechanické vlastnosti vulkanisátů kaučuku, obsahuje elastický, viskosní a tlumící člen (obr. 1). Je to v podstatě seriové zapojení t. zv. Maxwellova a Voigtova (obr. 2) základního modelu. Vysokopolymerní látka, jakou kaučuk je, obsahuje tedy nejméně dva odlišné molekulární mechanismy, vyznačující se různými moduly elasticity,¹⁾ viskozitami resp. relaxačními dobami. (Pozn.: Napětí S_0 klesá s časem při konstantní deformaci vzorku podle exponenciálního vztahu $S = S_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ a klesne za relaxační dobu $\tau = \eta/G$ na e-tou část své původní hodnoty.) Rela-



Obr. 1



Obr. 2

xační doba závisí jen na obou materiálových konstantách G a η . Uvedený jednoduchý model (obr. 1) se skládá ze seriového zapojení elastického členu G_1 , tlumícího členu (Voigtův model) modulu elasticity G_2 a dynamické viskozity η_2 v paralelním zapojení a ryze viskosního dynamického členu η_3 . (G_1, η_3 tvoří Maxwellův model). Deformace modelu (obr. 1) způsobená vnější silou S se vypočte z jednotlivých deformací těchto tří členů, které jsou různým způsobem závislé na pokusné době (doba, po kterou působí stálá síla) t podle vztahu

$$x = \frac{S}{G_1} + \frac{S}{G_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) + \frac{1}{\eta_3} t, \quad (1)$$

kde τ_2 je relaxační (též někdy retardační, jde-li o časový vzrůst deformace při stálém napětí) doba příslušného Voigtova modelu.

Je samozřejmé, že pro skutečně přesné zachycení mechanických vlastností vulkanisátů kaučuku musí být jednotlivé části uvedeného modelu podrobněji řešeny, jak ukázal W. Kuhn ve svém pojednání: „Vztahy mezi viskozními a elastickými vlastnostmi amorfních látek“²⁾. Kuhn zobecnil Maxwellův model, při čemž uvažoval množství soudržných molekulárních mechanismů, vycházejí z pravděpodobnosti mnohotvárné strukturní výstavby řetězcových molekul a vzájemně působících sil. Kuhnova představa

¹⁾ Pro jednoduchost budeme značit písmenem G buď modul elasticity, půjde-li o translační deformaci, nebo modul toře, půjde-li o torsní deformaci.

²⁾ Zft. f. phys. Chemic, sv. 42 (1939).

odpovídá obr. 3. Řadí paralelně množství Maxwellových základních modelů. Každý soudržný molekulární mechanismus je definován vlastním dílčím modulem elasticity G_n , vlastní dílčí viskositou η_n a vlastní relaxační dobou τ_n . Navazuje na řešení známého Maxwellova vztahu pro relaxaci napětí při stálé deformaci:

$$S = S_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ kde } \tau = \frac{\eta}{G} \quad (2)$$

a

$$S = \gamma \cdot G \text{ (Hookeův zákon).}$$

Pro jednotlivé dílčí mechanismy platí:

$$S_{01} = \gamma \cdot G_{01}, \quad S_{02} = \gamma \cdot G_{02}, \dots, S_{0n} = \gamma \cdot G_{0n}. \quad (3)$$

Dosazením do vztahu (2) dostaneme:

$$G = G_{01} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + G_{02} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \dots + G_{0n} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_n}} = \sum_1^n G_{0n} e^{-\frac{t}{\tau_n}}. \quad (4)$$

Relaxační doby jsou při tom velmi závislé na teplotě vulkanisátu. Vzhledem k úměrnosti modulu v torzi (G) a modulu elasticity (E)

$$E_{01} = \frac{1}{2(1+\mu)} \cdot G_{01}, \quad E_{02} = \frac{1}{2(1+\mu)} \cdot G_{02}, \dots, E_{0n} = \frac{1}{2(1+\mu)} \cdot G_{0n},$$

($\mu \dots$ Poissonovo číslo)
lze psát též

$$E = \sum_{n=1}^n E_{0k} e^{-\frac{t}{\tau_k}} \quad (5)$$

pro případ deformace translační.

Jednoduchý Kuhn-Maxwellův model lze též znázornit rovnomocným seriovým spojením Voigtových modelů a Maxwellova modelu (obr. 3). A. Smekal ukázal, že ani diskretní Kuhnovo relaxační spektrum nestačí pro úplné objasnění elasticko-viskosních vlastností vysokopolymérů, ale že je nutno předpokládat spojitě relaxační spektrum. Je tedy nutno psát vztah (4) ve tvaru:

$$G = \int_0^{\infty} \frac{dG_0}{d\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot d\tau, \quad (6)$$

a podobně vztah (5). Kuhn naproti tomu poukázal na to, že pro popis chování elasticko-viskosních látek stačí v podstatě předpokládat dvě daleko od sebe odlehle skupiny relaxačních dob, odpovídajících dvěma různým soudržným molekulárním mechanismům téže zkoumané látky (τ_1, τ_2) na příklad ve stavu ztuhlém-neviskosním a elasticko-viskosním. U jednoduchého modelu (obr. 1) se předpokládá, že G_1 je mnohem větší než G_2 a $\eta_1 \gg \eta_2$. Deformace při stálé vnější síle nebo vzrůst a dozívání napětí při stálé deformaci závisí na poměru pokusné doby t k relaxačním dobám zkoumaného materiálu. Při velmi rychlých a velmi pomalých deformacích je chování vzorku vulkanisátu kaučuku

závislé na pokusné době t , při středních pokusných dobách t přispívají jednotlivé soudržné molekulární mechanismy různým způsobem k celkovému chování vulkanisátu. Při stálé deformační rychlosti plyne pro deformační napětí vztah:

$$S = G \cdot x + \eta \frac{dx}{dt}.$$

Elastico-viskosní chování vulkanisátů kaučuku samozřejmě ovlivňuje všechny fyzikální zkušební metody.

Chceme-li tedy experimentálně přezkoušet dosud vyvinuté teoretické představy (modelová schemata),³⁾ je nutno při dané deformaci spojitě měnit pokusnou dobu t , abychom našli charakteristické relaxační doby viskoelastického vzorku. Jak již bylo řečeno, je-li pokusná doba t malá v poměru k relaxační době τ , sotva nelezeme doznívání (relaxaci) napětí vlivem viskosních vlastností vzorku, vzorek reaguje elasticky. Jestliže ale pokusná doba dosáhne řádově relaxační doby, stanou se plastické reakce zřejmými. Naopak lze udržovat pokusnou dobu stálou a měnit relaxační dobu změnou teploty vzorku. Se vzrůstající teplotou se zkracuje relaxační doba. Poněvadž pokusné doby lze nejlépe zjišťovat použitím dynamických (kmitových) metod a jimi též délku pokusných dob lehko měnit, je výhodné použít pro uvedené účely metody s volnými nebo vynucenými kmity. Za pokusnou dobu lze pokládat příslušnou dobu jednoho kmitu. Pokud doba kmitu je malá vzhledem k relaxační době, jsou kmity jen málo tlumené. Dosáhne-li doba kmitu řádově relaxační doby a vzrůstá-li dále, dostaneme dispersní obor, v němž kmity projdou útlumovým maximem. Měření dob a tlumení elastických kmitů při teplotních a frekvenčních změnách dovolují zkoumat plasticko-elastické vlastnosti látek (moduly a relaxační doby) a vyvozovat z nich závěry o molekulárních dějích při deformaci. Držíme-li amplitudy kmitů při těchto pokusech dostatečně malé, je možno zanedbat zbytkové deformace (vyjma při velmi vysokých teplotách resp. při velmi pomalých kmitěch) a tlumení spočívá na zpožďujícím vlivu vnitřního tření vzorku, jak v hrubém přiblížení znázorňuje Voigtův model. Pro kmitavý pohyb Voigtova modelu platí diferenciální rovnice, vyjadřující vztah mezi napětím a deformací:

$$S = S_{\text{elast.}} + S_{\text{plast.}} + S_{\text{zrychl.}}$$

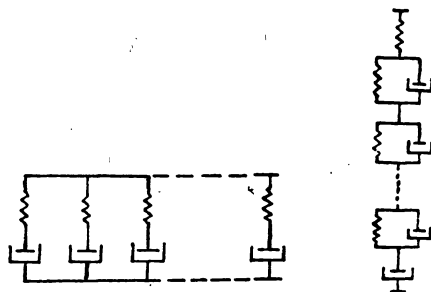
nebo

$$S = G \cdot \gamma + \eta \cdot \dot{\gamma} + M \ddot{\gamma}, \quad (7)$$

kde $\ddot{\gamma}$ je zrychlení setrvačné hmoty M kmitajícího systému. V případě torsních kmitů zavádíme do vztahu (7) modul torse. Pak ale M znamená moment setrvačnosti kmitajícího systému. Pro případ periodických vynucených kmitů dosazujeme za S příslušný výraz pro periodickou sílu. Pro volné kmity platí:

$$G \cdot \gamma + \eta \cdot \dot{\gamma} + M \ddot{\gamma} = 0, \quad (8)$$

³⁾ T. Alfrey, *Mechanical Behavior of High Polymers*, New York, London, 1948.



Obr. 3

s řešením:

$$\gamma = e^{-\frac{t}{T_0 \Lambda}} \cdot A \cdot \cos \omega t,$$

kde Λ je logaritmický dekrement útlumu. Z řešení plyne rovnice pro:

$$T_0 = \frac{4 \pi M}{\sqrt{4 \cdot GM - \eta^2}},$$

$$\Lambda = \frac{2 \pi \eta}{\sqrt{4 \cdot GM - \eta^2}}.$$

Poněvadž η^2 je zpravidla vzhledem k $4G \cdot M$ pro vulkanisáty kaučuku zanedbatelné, lze psát pro T_0 ve všech oborech s ne příliš velkým tlumením přibližně $T_0 = 2 \pi \sqrt{\frac{M}{G}}$ (vzorec doby kmitu netlumených kmitů). Ze známé doby kmitů T_0 lze tudíž jednoduše stanovit modul G .

Fysikální zkušební metody používané ke studiu mechanických vlastností vulkanisátů kaučuku lze v podstatě rozdělit na statické a dynamické. Při statických zkouškách většinou jde o jednu probíhající deformační děje za působení zvolené síly. Při dynamických zkouškách působí na vulkanisát krátké a rychlé střídavé síly. Dynamickými metodami lze mnohdy lépe zjišťovat menší odchylky ve složení směsi vulkanisátů než metodami statickými. Dynamické metody spočívají, jak již bylo řečeno, na volných nebo vynucených kmitech, při čemž posléze jmenované metody lze rozdělit na rezonanční a mimo-rezonanční. Metody volných kmitů spočívají na měření doznívání kmitavých dějů. Lze na př. vychýlit torsní kyvadlo a měřit amplitudy po sobě jdoucích kmitů. Přesné měření požadovaných veličin nelze provést jednoduše. Na př. metoda torsního kyvadla má principiální nedostatky. Úbytek amplitud kmitů ovlivňuje měřenou dynamickou viskozitu vulkanisátu, neboť tato veličina je závislá na amplitudě kmitů. Volné kmity podržují vlastní frekvenci systému. Obecně není vlastní frekvence vulkanisátů táž, nýbrž závisí na dynamickém modulu elasticity, takže jejich dynamickou viskozitu nelze měřit při týchž frekvencích. Měřené hodnoty jsou tedy frekvenčně závislé. Metody spočívající na vynucených kmitech používají kmitajícího systému složeného z hmoty, příslušného modulu, a tlumení (vztah [8]), kde obě poslední veličiny spočívají výlučně na chemickém složení vzorku zkoumané směsi. Systém je uveden vnější sinusovou silou (elektricky nebo mechanicky buzenou) do resonance. Změnou hmoty systému lze provádět měření při různých frekvencích, takže měřenou veličinu lze získat interpolací pro různé směsi při téže frekvenci. Velká změna frekvence změnou hmoty systému není možná. U metod používajících vynucených kmitů mimorezonančních lze obsáhnout značný frekvenční obor. Pokusy s normováním různých metod jsou obtížné, poněvadž je nutno nejprve vysvětlit pojmy, na nichž metody spočívají. Budiž připomenuto, že dynamické charakteristiky popisují vulkanisát jen za těch podmínek, za nichž byly měření získány (na př. závislosti na frekvencích, teplotách, předpětích, velikostech střídavého zatížení atp.). Je nutno připomenout, že dynamická viskozita vulkanisátů kaučuku klesá v teplotním oboru od -30°C do 100°C se stoupající teplotou, takže se vulkanisát zahřátý následkem absorpce energie v uvedeném teplotním oboru vždy méně zahřívá. Z dynamické viskozity a dynamického modulu elasticity lze přesně stanovit příslušnou hysterese a absorpci energie redukovanou na jeden kmit a z toho vypočítat vzniklé množství tepla. Volba dynamické metody musí být vždy taková, aby studium směsi se dalo za relativně souhlasného

namáhání, jakému bude vystavena směs v praxi. Všechny fyzikální vlastnosti vulkanisátů kaučuku získané měřením, podrobených při použití dynamických metod malým, rychlým po sobě jdoucím deformacím, t. j. viskosní vlastnosti, zbytkové deformace, úbytky počátečního napětí způsobné relaxací, vznik tepla atp., lze vysvětlit přesuny molekulárních vrstev zkoumaného vzorku vysokopolymerního. Články dlouhých řetězcových molekul vulkanisátů kaučuku mají totiž v nenapjatém stavu uspořádání odpovídající rovnovážnému stavu. Při vložení vnějšího napětí se tento rovnovážný stav poruší a vulkanisát se snaží nabýt struktury odpovídající novým stavovým podmínkám. Při přesunech molekulárních vrstev je část vynaložené mechanické energie spotřebována na kmitavý pohyb molekul, čímž se dá vysvětlit měřením zjizvitelná ztráta energie. Poněvadž při všech deformačních dějích vysokopolymerních látek dochází v jejich vnitřním složení k posuvům molekul a svazků molekul, vedoucím jednak k přeměně energie, jednak nevratným deformacím, jak již bylo v předešlém řečeno, musí k modulu elasticity G přistoupit ještě druhá jeho součást, charakterisující jejich viskosněplastické chování. Matematicky byl stanoven vztah mezi elastickými a plastickými ději při dynamickém namáhání vztahem

$$G^* = G_1 + i G_2, \quad (9)$$

kde G^* je t. zv. komplexní modul. Je-li při dynamické deformaci S napětí a γ deformace, platí:

$$S = G^* \cdot \gamma = (G_1 + i G_2) \cdot \gamma.$$

Odvození a význam tohoto vztahu plyne z Voigtova modelu.

Platí

$$S = G \gamma + \eta \dot{\gamma},$$

to jest, je zde paralelně zapojen ryze elastický člen G s viskosním členem η , způsobujícím zpoždování deformačních dějů. Při periodických deformacích (dynamická metoda) lze klást

$$\gamma = \gamma_0 e^{i \omega t},$$

a z toho plyne

$$\dot{\gamma} = i \omega \gamma_0 e^{i \omega t} = i \omega \gamma.$$

Tím nabude výraz pro S tvaru

$$S = G \gamma + i \omega \eta \gamma = (G + i \omega \eta) \gamma. \quad (10)$$

Porovnáním vztahů (9) a (10) plyne

$$G_1 \equiv G, \quad G_2 \equiv \omega \eta.$$

Vidíme, že reálná část komplexního modulu je identická s modulem elasticity a jeho imaginární část identická se součinem z kruhové frekvence a viskozity. Často se užívá podílu obou částí komplexního modulu jako tangenty mechanického ztrátového úhlu:

$$\operatorname{tg} \delta_{\text{mech}} = \frac{G_2}{G_1}.$$

Při použití metody volných kmitů lze $\operatorname{tg} \delta_{\text{mech}}$ vyjádřit vztahem

$$\operatorname{tg} \delta_{\text{mech}} = \frac{\Delta}{\pi},$$

kde λ je logaritmický dekrement amplitud volných kmitů. Při použití metod s vynucenými kmity lze $\text{tg } \delta_{\text{mech}}$ odečíst z obou vztažných veličin c a d (obr. 4) útlumové elipsy. Použitím těchto vztahů lze porovnávat výsledky měření, plynoucích jak z metod volných kmitů, tak z metod vynucených kmitů. Analogické vztahy plynou pro tangentu ztrátového úhlu při měření dielektrických vlastností látek polární povahy, jako je tomu na příklad u vulkanisátů kaučuku. Polární povaha vulkanisátů kaučuku spočívá v existenci permanentních dipólů v molekulách. Jak známo, podle Debyeovy dipólové teorie snaží se orientovat permanentní dipóly vlivem elektrického pole rovnoběžně se směrem pole. Tepelný pohyb molekul způsobí, že toto uspořádání je nedokonalé a že po ustání působení pole se molekulární dipóly zase vrátí do neuspořádaného stavu. Orientace a desorientace molekul neprobíhá náhle, nýbrž zpožděně vlivem účinku vnitřního tření s příslušnou relaxační dobou. Debye spočítal střední elektrický moment dipólu, existující ještě ve směru pole v čase t , počítaném od přerušení původního elektrického pole E_0 :

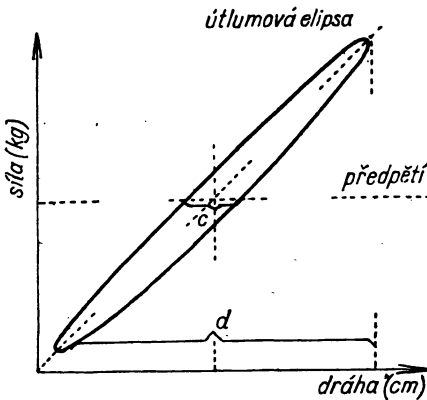
$$\bar{\mu} = \frac{\mu^2 E_0}{3 kT} e^{-\frac{t}{\xi(2kT)}}$$

kde μ je permanentní dipólmoment molekuly, T absolutní teplota a ξ konstanta tření. Orientace dipólů doznívá exponenciálně s časem a to s relaxační dobou, danou vztahem

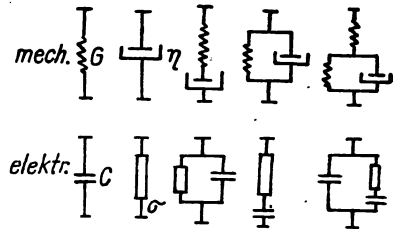
$$\tau = \frac{\xi}{2kT}$$

Doznívání orientace dipólů nastává tedy tím pomaleji, čím větší je tření a tím rychleji, čím vyšší je absolutní teplota. Pro vulkanisáty kaučuku jakožto vysokopolymery není toto hrubé zjednodušení přirozeně přípustné a je nutno na příklad podle Kuhna a Smekala uvažovat nikoli jedinou relaxační dobu, nýbrž celé diskrétní nebo spojitě spektrum relaxačních dob. Z předcházejícího vyplývá možnost studovat na podkladě orientace dipólů v elektrickém střídavém poli frekvenční a teplotní změny relaxace molekul podobným způsobem, jako je tomu při mechanických kmitech. Reciproká dielektrická konstanta přejímá zde úlohu modulu elasticity, dielektrický ztrátový úhel úlohu tlumícího členu. Bude-li kmitavá doba střídavého elektrického pole srovnatelná s relaxační dobou

nastavení dipolů, dospějeme k dispersnímu oboru dielektrické konstanty, v němž dielektrické ztráty dosáhnou maxima. Dipóly, které při vyšší frekvenci mohou vykonávat



Obr. 4



Obr. 5

jen malé pohyby kolem své rovnoběžné polohy, uvolňují se („tají“) a mohou se nyní plně, pokud to dovoluje teplotní jejich pohyb, orientovat podle směru střídavého pole. S tím je spojeno rychlé zvýšení dielektrické konstanty, analogické rychlému snížení modulu elasticity při „tání“ směsi. Podobně jako komplexní modul, zahrnující tlumící člen, definujeme též komplexní dielektrickou konstantu, zahrnující mimo normální dielektrickou konstantu též dielektrické ztráty. Lze tedy provést analogii mezi mechanickými a elektrickými teoretickými modely. Viskosní píستový člen η odpovídá elektrické vodivosti σ , elastický člen G reciproké kapacitě $\frac{1}{c}$. Vzhledem k reciprocitě je seriové a paralelní zapojení příslušných členů vzájemně zaměněno. Pro úplnost zde uvádím některé známé analogie mechanických modelů s elektrickými (obr. 5).

Jak bylo řečeno, vnitřní tření molekul vzorku je příčinou ztrát energie, vedoucích k jeho zahřívání. Jsou to hysterese nebo útlumové ztráty, z kterých se dá stanovit mechanický ztrátový úhel. Jeho analogií je elektrický ztrátový úhel, vystupující při dielektrických měřeních, který je mírou vnitřního tření při rotaci dipólů molekul látky polární povahy v střídavém elektrickém poli. Z fyzikálních měření těchto jak mechanických, tak elektrických vlastností vulkanisátů plynou vztahy, v nichž vystupují obě frekvence (mechanická i elektrická) a relaxační doba, při čemž je možno relaxační dobu položit úměrnou absolutní teplotě vulkanisátu.

Z mechanických měření plynou vztahy

$$\frac{1}{G} \approx D' = D_{el} + \frac{D_{el}}{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad \text{tg } \delta_{\text{mech}} = D' = D'' = \frac{D_{el \infty} \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

z dielektrických měření plynou vztahy

$$DK \approx \epsilon' = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad \text{tg } \delta_{el} \epsilon' = \epsilon'' = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (11)$$

kde G je modul elasticity, D' deformace při dané frekvenci nebo relaxační době, D_{el} deformace vulkanisátu v „ztuhlém stavu“, $D_{el \infty}$ maximální hodnota elastické deformace, ω kruhová frekvence, τ relaxační doba, D'' tak zvané mechanické ztrátové číslo, DK dielektrická konstanta, ϵ' dielektrická konstanta při dané frekvenci nebo relaxační době, ϵ_{∞} dielektrická konstanta vulkanisátu v „ztuhlém“ stavu nebo za vysokých frekvencí, ϵ_0 dielektrická konstanta vulkanisátu v „uvolněném“ elasticko-viskosním stavu nebo za nízkých frekvencí, ϵ'' elektrické ztrátové číslo, $\text{tg } \delta$ ztrátový úhel.

Jak patrně ze vzorců (11), dielektrická konstanta, kterou lze určit měřením příslušných kapacit, se chová analogicky jako $\frac{1}{G}$ a $\text{tg } \delta_{el}$, který lze určit volbou přesné můstkové metody, odpovídá obdobně $\text{tg } \delta_{\text{mech}}$.

Příklad aplikace matematické statistiky na vyhodnocování rozptylů výsledků měření elasticko-viskosních vlastností vulkanisátů kaučuku uvedeme ve zvláštním článku.