Jiří Gregor

Dynamické systémy s regulární pravou stranou. II

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 3, 266--270

Tečkovaná čára naznačuje průběh postupné přejímky u dodávky, která byla při 12. výběru přijata a čerchovaná čára představuje dodávku, která byla při 10. výběru zamítnuta.

Příklad: Nechť $\alpha = \beta = 0{,}05$; $p_1 = 0{,}03$; $p_2 = 0{,}15$. Potom dosazením do vztahů (30), (31), (32) dostaneme $d_1 = -1{,}691 + 0{,}076i, d_2 = 1{,}691 + 0{,}076i$.

Při určování konstant h_1, h_2 a s vycházíme z testu poměrem věrohodnosti, který navrhl A. WALD [14]. Pro přípustný p_1 resp. nepřípustný p_2 podíl zmetků v dodávce, přijímáme dodávku, jestliže

$$\frac{P_m(p_2)}{P_m(p_1)} \leqq B \tag{33}$$

a dodávku zamítáme, jestliže

$$\frac{P_m(p_2)}{P_m(p_1)} \geqq A\,. \tag{34}$$

V případě, že

$$A < \frac{P_m(p_2)}{P_m(p_1)} < B\,, \tag{35}$$

pokračujeme v náhodném výběru. Ve vztazích (33) a (34) $P_m(p_1) = p_1^m \cdot (1 - p_1)^{n-m}$ a obdobně pro $P_m(p_2)$. Lze dokázat, že platí vztahy

$$\begin{aligned} A &\leqq \frac{1-\beta}{\alpha}\,, \\ B &\geqq \frac{\beta}{1-\alpha}\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Dosazením těchto vztahů do nerovnosti (35) a při uvažování krajních případů, dostaneme vztahy pro konstanty h_1, h_2 a s ([14], [15], [16]).

(Dokončení.)

DYNAMICKÉ SYSTÉMY S REGULÁRNÍ PRAVOU STRANOU II*)

JIŘÍ GREGOR
(*Katedra mat. a deskr. geom. el. fak. ČVUT*)

V

Dosud jsme se zabývali dynamickými systémy, jejichž pravá strana byla v jistém oboru jednoznačnou regulární funkcí komplexní proměnné. Přejdeme-li obecněji k systémům s analytickými pravými stranami, musíme nejprve definovat řešení diferenciální rovnice

$$\dot{z} = f(z)\,, \tag{13}$$

kde $f(z)$ je v jistém oboru víceznačnou funkcí komplexní proměnné.

Definice 6. Nechť v rovnici (13) je $f(z)$ riemannovským elementem v dvojnásobně souvislé oblasti D: $0 < |z| < r$. Funkci $z(t, t_0, a)$ nazýváme řešením rovnice (13), jestliže

*) Část I tohoto článku vyšla v minulém čísle tohoto časopisu.

pro všechna t: $|t - t_0| < \lambda$ jest $z(t, t_0, a) \in D$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z(t, t_0, a) = F(z(t, t_0, a))$, pro jistý analytický element $\{F, z(t_0)\} \in f$.[1])

V definici 6 jsme za střed riemannovského elementu volili pro jednoduchost bod (0). Tento bod je jediným bodem uvnitř oblasti $|z| < r$, který může být kritický. Nebudeme uvažovat případ, kdy bod (0) je obyčejným bodem, neboť pak (podle věty o monodromii) funkce $f(z)$ je jednoznačná. Tento případ byl vyšetřen v první části článku. Vzhledem k pokračovatelnosti analytického elementu můžeme definice 1—4 beze změny přenést i na trajektorie rovnice (13). Řešení rovnice (13) budeme zkráceně psát $z(t)$. Omezíme-li se na m - značné funkce, můžeme rovnici (13) napsat ve tvaru

$$\dot{z} = \sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i z^{\frac{i}{m}}, \tag{14}$$

kde $m \leqq 2$ $\alpha_i \neq 0$ alespoň pro jisté i

Je účelné doplnit dosud vyslovené definice a věty, charakterisující typy singulárních bodů, větou, která pro svoji názornost ani nevyžaduje důkazu.

Věta 6: *Typ singulárního bodu v rovině u je invariantní vůči zobrazení $z = u^m$ (m přirozené)*[2]).

Dosud uvedené typy singulárních bodů doplníme ještě touto definicí:

Definice 7. V diferenciální rovnici (13) nechť $f(0) = 0$. Počátek nazýváme regulárním kritickým bodem, jestliže existuje právě jedna trajektorie, která vchází do počátku nebo vychází z počátku.

Na základě definice 4 uvedeme ještě větu o počtu výjimečných směrů pro rovnici (14).

Věta 7. *Je-li $k \neq m$, pak trajektorie diferenciální rovnice* (14) *mají nejvýše* $2|m - k|$ *výjimečných směrů.*

Důkaz: Nechť pro jistou posloupnost $z_n \to 0$ jest $\lim \frac{z_n}{|z_n|} = a$. Pak bod a určuje výjimečný směr právě tehdy, je-li $\lim \frac{|z_n|}{z_n} \frac{f(z_n)}{|f(z_n)|} = \pm 1$. Odtud plyne podmínka $a^{\frac{k-m}{m}} \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|} = \pm 1$ a tedy i vyslovené tvrzení.

Důsledky: 1. Pro $k = m$ jsou všechny směry výjimečné právě když $\alpha_k = \bar{\alpha}_k$ a výjimečný směr neexistuje pro $\alpha_k \neq \bar{\alpha}_k$. 2. Výjimečných směrů je právě $2|m - k|$, jsou-li k a m čísla nesoudělná. 3. Nejsou-li k a m nesoudělná, pak výjimečných směrů je právě $2 \frac{|m-k|}{d}$, kde d je největší společný dělitel čísel m a $|k|$.

VI

Chování trajektorií diferenciální rovnice (14) v uvažovaném oboru popisují tato tvrzení:

[1]) V dalším užíváme pojmů element analytické funkce, analytické pokračování, přirozená hranice analytické funkce atd. v obvyklém významu. Říkáme, že f je riemannovským elementem v oblasti D se středem v bodě (0), jestliže je libovolně pokračovatelná v D, v bodě (0) má nejvýše algebraický kritický bod a není libovolně analyticky pokračovatelná v žádné dvojnásob souvislé oblasti $D' : 0 < |z| < \varrho$, kde $\varrho > r$. Okolím riemannovského elementu $f(z)$ nazýváme množinu všech analytických elementů definovaných funkcí $f(z)$ se středem uvnitř kruhu $|z| = \varrho$, kde $\varrho \leqq r$. (Viz Saks-Zygmund: *Funkcje analityczne.*)

[2]) Větu 6 chápeme takto: Mají-li trajektorie $u(t)$ sing. bod typu střed, pak trajektorie $z(t) = [u(t)]^m$ mají také singulární bod typu střed, atd. Obráceně větu nevyslovujeme.

Věta 8. *Je-li v rovnici* (14) $k = m$, *pak počátek je středem trajektorií právě tehdy, je-li* $\alpha_k + \bar{\alpha}_k = 0$, *dikritickým uzlem právě tehdy, je-li* $\alpha_k - \bar{\alpha}_k = 0$ *a ohniskem pro ostatní hodnoty* α_k.

Důkaz: Především: zřejmě existuje $f'(0) = \alpha_k \neq 0$. Po substituci $u = u^m$ přejde rovnice (14) v rovnici

$$\dot{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u^i, \quad \beta_1 \neq 0.$$

Trajektorie této rovnice v okolí bodu $u = 0$ jsou popsány větami 2—4. Kriteriem přitom je hodnota β_1. Jest však $\beta_1 = \lambda\alpha_k$, λ reálné a tedy typ trajektorií $u(t)$ je určen hodnotou α_k. Vzhledem k větě 6 však totéž platí o trajektoriích rovnice (14) za uvedených podmínek. Věta je dokázána.

Věta 9. *Kritický bod diferenciální rovnice* (14) *pro* $k \neq m$ *je typu sedlového bodu pro pro* $k < m - 1$, *regulárním kritickým bodem pro* $k = m - 1$ *a typu uzlového bodu pro* $k > m$.

Důkaz: Proveďme opět transformaci $z = u^m$. Rovnice (14) přejde v rovnici

$$\dot{u} = \sum_{i=k}^{\infty} \beta_i u^{i-m+1}, \quad \beta_k \neq 0.$$

Pro $k \neq m - 1$ dostáváme nyní vyslovené tvrzení na základě věty 6. Pro $k = m - 1$ je bod $u = 0$ regulárním bodem trajektorií $u(t)$. Zřejmě platí: jestliže $u(t)$ je trajektorie s regulárním bodem v bodě $u = 0$, pak $z(t) = u^m(t)$ ($m \geqq 2$) je trajektorie s regulárním kritickým bodem v bodě $z = 0$ a obráceně. Je tedy i pro tento případ věta dokázána.

Závěry byly dosud vyslovovány pro jistý riemannovský element tvaru pravé strany rovnice (14). Mohou se však vyskytnout i jiné případy kritických bodů.

Uveďme příklad: Uvažujme diferenciální rovnici

$$\dot{z} = \beta + \alpha(z + 1)^{\frac{k}{m}}. \tag{15}$$

Předpokládejme: existuje i přirozené tak, že

$$-\frac{\beta}{\alpha} = e^{i\frac{2\pi k}{m} i}.$$

O trajektoriích diferenciální rovnice (15) lze vyslovit tyto závěry: Existuje m vzájemně různých analytických elementů funkce na pravé straně rovnice (15) se středem v bodě (0). Pro všechny tyto elementy s výjimkou právě jednoho je bod (0) regulárním bodem. Pro jeden element je bod (0) kritickým bodem. Typ tohoto kritického bodu je určen (nejpohodlněji) číslem β takto: Trajektorie mají v okolí počátku střed, je-li $\beta + \bar{\beta} = 0$, dikritický uzel, je-li $\beta - \bar{\beta} = 0$ a ohnisko, je-li $\beta \pm \bar{\beta} \neq 0$. O platnosti těchto závěrů je snadné se přesvědčit na základě rozvoje pravé strany rovnice (15) v mocninnou řadu v okolí bodu (0).

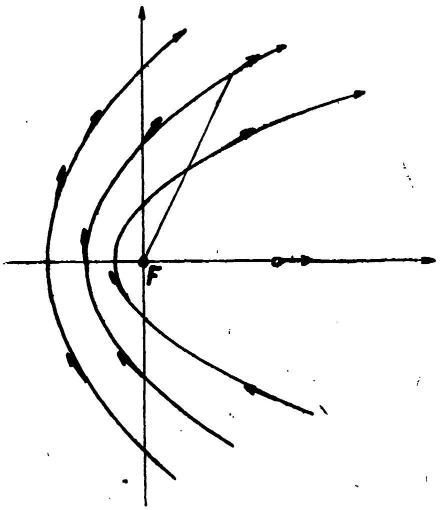
VII

Úvahy předchozích odstavců nejsou prosty některých obtíží. Sestrojme směrové pole rovnice $\dot{z} = \sqrt{z}$, jejíž trajektorie, jak se snadno přesvědčíme, jsou konfokální paraboly. Uvažujme dva případy: $0 \leqq \arg z < 2\pi$ (obr. 1) a $-\pi < \arg z \leqq \pi$ (obr. 2).

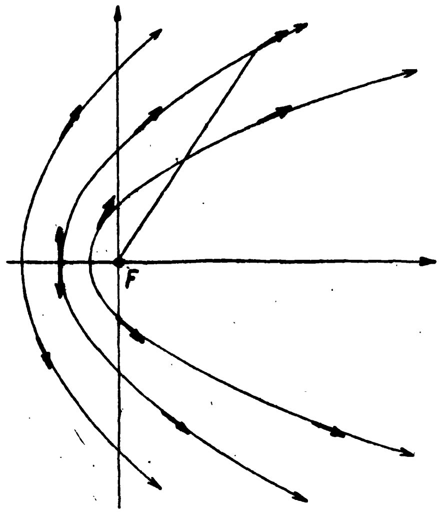
Pro druhou větev dostaneme směrové pole, které je v obou případech orientováno v každém bodě opačně, než je uvedeno na obrázcích. Uvážíme-li i jiné možné případy diferenciálních rovnic s pravými stranami vyhovujícími požadavkům odst. V, můžeme se pokusit o ověření závěrů, které předběžně budeme formulovat takto:

a) má-li pravá strana rovnice právě m analytických elementů se středem z_0, pak bodem z_0 prochází nejvýše m trajektorií;

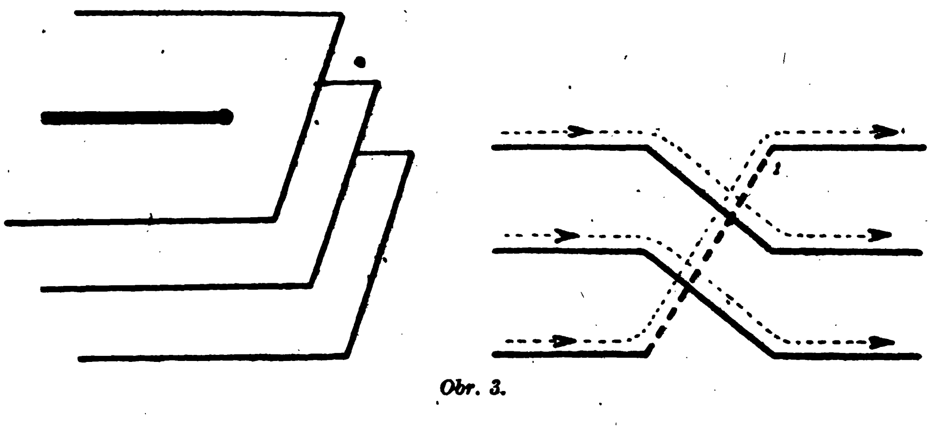
b) na jisté křivce vycházející z počátku (z rozvětvovacího bodu) není směrové pole diferenciální rovnice orientovatelné.



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Abychom blíže objasnili povahu těchto závěrů, uvažujme směrové pole diferenciální rovnice (13) na příslušné Riemannově ploše.

Riemannovou plochou riemannovského elementu f (viz pozn. k definici 6) rozumíme množinu, jejíž prvky jsou všechny analytické elementy $\{F, a\}$, patřící do okolí elementu f. Dva elementy $\{F_1, a_1\}$ a $\{F_2, a_2\}$ jsou totožné právě tehdy, je-li $F_1 = F_2$ a $a_1 = a_2$. Okolím elementu $\{F, a\}$ nazveme všechna bezprostřední analytická pokračování elementu $\{F, a\}$. Element $\{F, a\}$ patří do svého okolí. Lze ukázat, že takto definované okolí vyhovuje axiomům Hausdorffovým. Ukazuje se, že takto definovaný abstraktní prostor je homeomorfní s vnitřkem kružnice, t. j. existuje jisté t. zv. kanonické, vzájemně jednoznačné spojité zobrazení Φ (se spojitým inversním zobrazením Φ^{-1}) tohoto prostoru na množinu bodů u: $|u| < \varrho$ komplexní roviny. Lze tudíž v tomto prostoru definovat metriku. Z vlastností zobrazení Φ plyne, že lze definovat i pojmy analytičnost, úhel.

Uvažujme nyní v rovině u diferenciální rovnici $\dot{u} = f(u)$, kde f je jednoznačná regulární funkce. Trajektoriím $u(t)$ odpovídají zobrazením Φ jisté homeomorfní obrazy přímky v definovaném abstraktním prostoru, které budeme nazývat trajektoriemi na Riemannově ploše. Vzhledem k tomu, že zobrazení Φ je konformní, zůstávají zachovány úhly i orientace. Každým bodem Riemannovy plochy prochází tudíž jediná trajektorie a pole trajektorií je orientovatelné. Je dále zřejmé, že tato konstrukce odpovídá postupu, kterého bylo použito při důkazu vět 8 a 9.

Vše je mnohem názornější, použijeme-li obvyklého modelu Riemannovy plochy, který (v okolí bodu (0) pro funkci $\sqrt[3]{z}$) připomeneme na obr. 3, ve kterém jsou šipkami vyznačeny jedině přípustné přechody z jednoho listu na druhý.

Obtíže v úvahách na začátku tohoto odstavce pramení z toho, že jsme trajektorie na Riemannově ploše „promítli" do roviny a tak „narušili" jednoznačnost a orientovatelnost pole trajektorií. Zároveň můžeme považovat za odůvodněné závěry, které jsme vyslovili na začátku tohoto odstavce.

Literatura

[1] S. Saks, A. Zygmund: *Funkcje analityczne*, Warszawa, 1948.

VYHODNOCOVÁNÍ VÝSLEDKŮ FYSIKÁLNÍCH MĚŘENÍ PŘI MALÉM POČTU PROVEDENÝCH ZKOUŠEK

Václav Müller

Tento článek je pokračováním článku „Poznámky k experimentálnímu studiu fysikálních vlastností vulkanisátů kaučuku".[1]) Uvádí jednoduchý případ použití známého Studentova t-rozdělení k posouzení významnosti rozdílu mezi průměry dvou řad fysikálních měření a k ochránění vyhodnocení výsledků měření před chybnými závěry. Samozřejmou povinností experimentátora je pečovat v našem případě o přesné chemické složení příslušné směsi kaučuku, přesné zhotovení vzorků a o dostatečnou přesnost měřicích přístrojů. Uvedené metody bylo použito k vyhodnocení měření vlivu teploty na účinný stupeň elasticity zvoleného vulkanisátu kaučuku metodou odrazu. Bylo dvacet stejných vzorků téže směsi kaučuku ve dvou řadách měření. Počet proměřovaných vzorků v obou řadách byl $N_1 = N_2 = 10$ [2]). Výsledky měření byly tyto:

Počet stupňů volnosti je $n = N_1 + N_2 - 2$, neboť k výpočtu $\bar{x}_1$ a $\bar{x}_2$ je zapotřebí dvou lineárních vztahů (pro každou z obou řad měření je $N_1 = N_2 = 10$ je totiž počet stupňů volnosti $n_1 = N_1 - 1$, $n_2 = N_2 - 1$, tedy o jednotku menší než počet provedených měření, poněvadž každý z průměrů je určen lineárním vztahem). V našem případě je $n = 18$.

[1]) V tomto časopise, roč. II (1957), č. 5, str. 552—559.

[2]) Elasticita kaučukových směsí zpravidla vzrůstá s rostoucí teplotou v teplotních mezích cca 0 °C až 100 °C, což svědčí o úbytku vnitřního tření a o optimálním uplatnění elastických vlastností zvoleného vulkanisátu v uvedeném teplotním oboru. K poklesu elasticity dochází až v teplotním oboru 100 až 150 °C vlivem tepelné destrukce makromolekul zvoleného vulkanisátu kaučuku.