V. Boltjanski; V.A. Jefremovič

O topologii. III

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 1, 7--27

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137075`

MATEMATIKA

O TOPOLOGII III*)

V. G. Boltjanskij, V. A. Jefremovič

Kombinatorická topologie

7. Fundamentální grupa

V této kapitole se budeme zabývat důležitým topologickým pojmem, který úzce souvisí s algebraickým pojmem grupy[1]). Ukážeme, že ke každému útvaru, přesněji ke každému topologickému prostoru[2]) lze sestrojit jistou grupu, tzv. *fundamentální grupu* tohoto prostoru. Tento zdánlivě velmi abstraktní pojem má řadu konkrétních použití dokonce v praktických problémech (např. v teorii uzlů, viz níže).

Dříve než podáme definici fundamentální grupy, vrátíme se ještě k pojmu trajektorie[3]), který jsme vyšetřovali v kap. 4.

Trajektorie a jejich deformace. Homotopní trajektorie

Nechť se bod x spojitě pohybuje po trajektorii h, ležící v souvislém[4]) topologickém prostoru $\mathbf{X}$, od počátečního bodu x_0 do koncového bodu x_1. Budeme nyní tuto trajektorii *spojitě deformovat*, tj. přemisťovat v prostoru $\mathbf{X}$ tak, že body x_0 a x_1 zůstávají pevné (obr. 93). Dostaneme tak jinou trajektorii h'; mezipolohy deformované trajektorie jsou na obr. 93 vyobrazeny tenšími čarami.

Poznamenejme, že takovou deformací může trajektorie přejít i v protínající se trajektorii, nebo v trajektorii, procházející několikrát stejným bodem prostoru $\mathbf{X}$ atd. Např. na obr. 94 je znázorněna deformace, kterou trajektorie h přechází v trajektorii h', která již sama sebe neprotíná.

Jsou-li h_1 a h_2 takové trajektorie, že jedna z nich přejde popsanou deformací v druhou, říkáme, že tyto trajektorie jsou *homotopní*; označujeme to takto: $h_1 \sim h_2$.

Je zřejmé, že libovolné dvě trajektorie h_1 a h_2 uvnitř kruhu, které nemají splývající krajní body, jsou homotopní. Představme si totiž trajektorii jako

*) В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович, *Очерк основных идей топологии*, Matěmatičeskoje prosveščenije, č. 4, 1959. První dvě části *O topologii I* a *O topologii II* viz v tomto časopise, IV, č. 3 a 4.

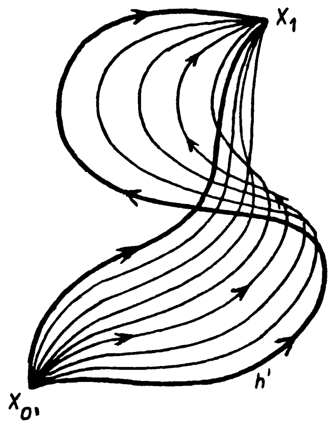
[1]) Základní definice z teorie grup viz v Dodatku (str. 24). Viz také П. С. Александров, *Введение в теорию групп*, 2. vyd., Učpedgiz, Moskva 1951 (česky P. S. Alexandrov, *Úvod do theorie grup*, SOVĚTSKÁ VĚDA — matematika, fysika, astronomie, V (1955), str. 463, 772, 946.

[2]) Viz *O topologii II*, v tomto časopise, IV, č. 4, (1959), str. 394 ad.

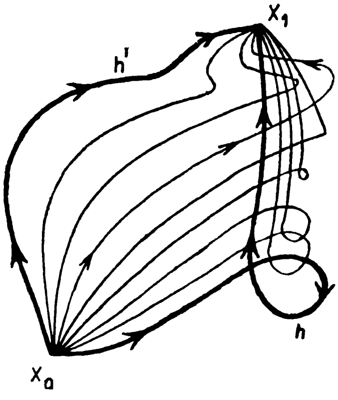
[3]) Tamtéž, str. 405 ad.

[4]) Na rozdíl od toho, co bylo řečeno v kap. 4, budeme zde i v dalším považovat útvar (nebo prostor) $\mathbf{X}$ za souvislý, jestliže libovolné dva jeho body mohou být spojeny trajektorií, ležící v $\mathbf{X}$. Útvary, které jsou v tomto smyslu souvislé (bývají nazývány pro odlišení lineárně souvislými jsou souvislé i ve smyslu definice z kap. 4) nikoli však obráceně.

gumovou nit, nataženou mezi body x_0 a x_1, kterou držíme tak, aby zaujímala tvar uvažované trajektorie. Pustíme-li nit, začne se pohybovat, deformovat, až zaujme polohu, ve které je nejméně natažena, čili přejde v úsečku, spojující body x_0 a x_1. Tedy libovolná trajektorie s koncovými body x_0 a x_1 je homotopní s úsečkou x_0x_1 a proto libovolné dvě trajektorie s koncovými body x_0 a x_1 jsou homotopní.

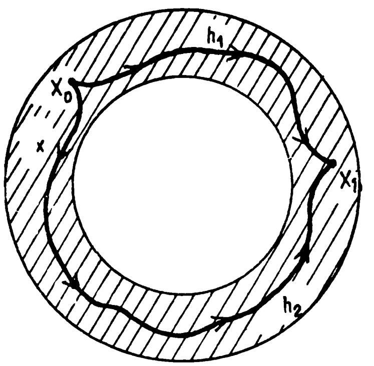


Obr. 93

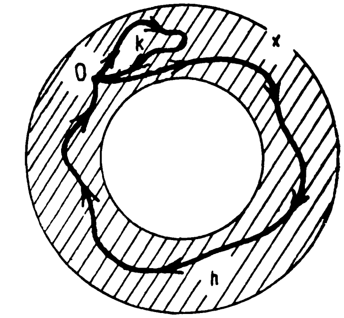


Obr. 94

V mezikruží nejsou každý dvě trajektorie se společnými krajními body homotopní; např. trajektorie h_1 a h_2 na obr. 95 nemohou přejít jedna v druhou eformací uvnitř mezikruží: překáží tomu ,,otvor“ v mezikruží.



Obr. 95



Obr. 96

Součiny trajektorií. Homotopní třídy trajektorií

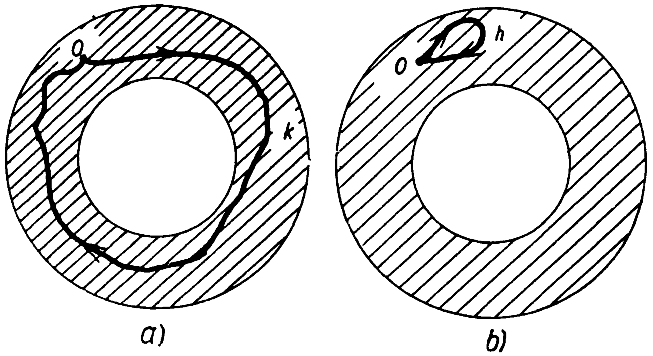
Jestliže trajektorie k začíná v bodě, ve kterém končí trajektorie h, pak trajektorii, kterou dostaneme, jestliže nejprve projdeme h a potom k, nazýváme *součinem* trajektorií h a k a označujeme hk. Ve smyslu této definice *lze násobit* *jen takové trajektorie, u kterých koncový bod první trajektorie je počátečním bodem druhé.*

Poznamenejme, že jestliže $h \sim h'$, $k \sim k'$ a přitom počáteční bod trajektorie k splývá s koncovým bodem trajektorie h, pak trajektorie hk je homotopní s trajektorií $h'k'$.

Zvolme nyní v prostoru **X** bod o a vyšetřujme jen ty trajektorie v prostoru **X**, jejichž počátečním a zároveň koncovým bodem je bod o. Libovolné dvě takové trajektorie je možno násobit[5]).

Homotopní trajektorie nebudeme rozlišovat. Budeme tedy vyšetřovat nikoli trajektorie, ale třídy homotopních trajektorií; takovou třídu trajektorií tvoří tedy všechny trajektorie homotopní s některou trajektorií. V některých případech, např. je-li **X** kruh, existuje pouze jediná homotopní třída; každé dvě trajektorie uvnitř kruhu jsou totiž homotopní. V mezikruží nejsou však např. trajektorie h a k (obr. 96) homotopní: jedna z nich (trajektorie k) neobepíná vnitřní kruh mezikruží a může „přejít" v jediný bod; druhá (trajektorie h) obepíná vnitřní kruh a nemůže proto deformací „přejít" v bod. Trajektorie h a k v mezikruží patří tedy k různým homotopním třídám.

Budeme tedy vyšetřovat homotopní třídy uzavřených trajektorií v prostoru **X**, v němž je zvolen „základní bod" o, který tvoří počáteční a koncový bod



Obr. 97

uvažovaných trajektorií. Množinu všech těchto tříd označme $\mathscr{F}$(**X**). Tyto třídy lze ***násobit***: uvažujme trajektorii h z některé třídy a trajektorii k z některé třídy a znásobme je; třída obsahující trajektorii hk nazývá se součinem tříd, obsahujících trajektorii h resp. k. Budeme-li místo trajektorií h a k uvažovat jiné „representanty" h' a k' těchže tříd, pak, podle toho co bylo řečeno výše, dostaneme trajektorii $h'k'$, která je homotopní s trajektorií hk, tj. definuje tutéž třídu. Takto definovaný součin tříd nezávisí tedy na volbě „representantů" v každé třídě a je proto těmito třídami jednoznačně určen.

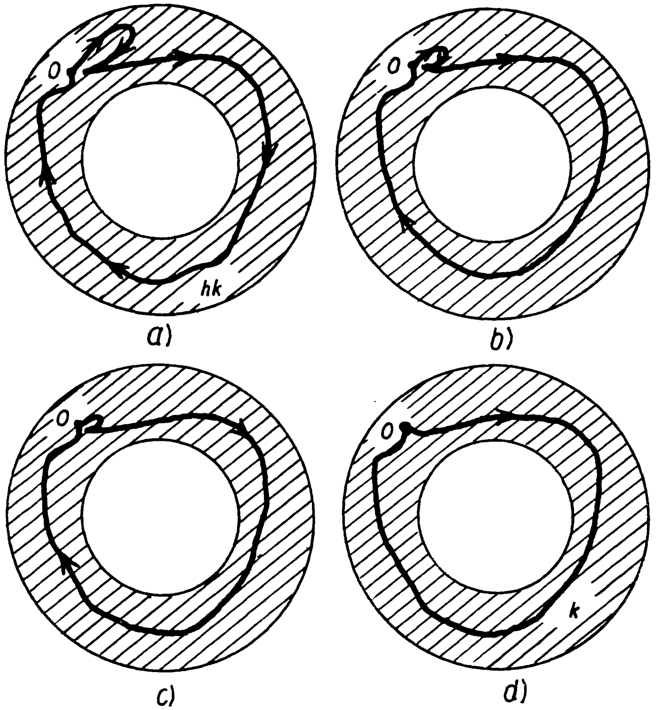
Fudamentální grupa

Viděli jsme, že v množině $\mathscr{F}$(**X**), tj. v množině všech tříd homotopních trajektorií v prostoru **X** (jejichž počátečním i koncovým bodem je bod o), je defino-

[5]) Poznamenejme, že hk a kh jsou různé trajektorie, které obvykle ani nejsou homotopní (o čemž se přesvědčíme na dále uvedených příkladech).

ván součin. Ukazuje se, *že množina* $\mathscr{F}(\mathbf{X})$ *tvoří grupu vzhledem k takto zavedené operaci násobení*. Naznačíme krátce, jak lze toto tvrzení dokázat.

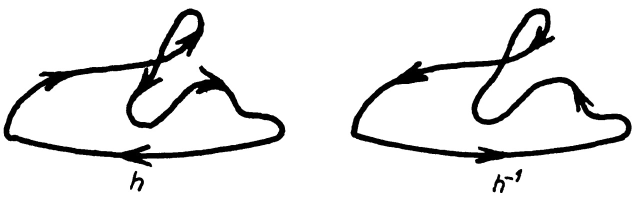
Je-li k trajektorie a h trajektorie, která může přejít v bod (obr. 97, a i b; obě trajektorie mají počáteční i koncový bod v bodě o), není těžké ukázat, že



Obr. 98

$hk \sim k$ (obr. 98), $kh \sim k$. Označíme-li tedy e třídu všech trajektorií, které mohou „přejít“ v bod, dostáváme $ae = ea = a$ pro každou třídu a.

Použijeme-li terminologie teorie grup můžeme říci, že třída e je *jednotkou* při násobení, které bylo zavedeno v množině $\mathscr{F}(\mathbf{X})$. Dále, je-li a jistá třída a h



Obr. 99

trajektorie, patřící do této třídy, označíme znakem h^{-1} trajektorii, kterou dostaneme, orientujeme-li trajektorii h opačně (obr. 99). Snadno se přesvědčíme o tom, že trajektorie hh^{-1} a $h^{-1}h$ mohou „přejít“ v bod. Označíme-li proto

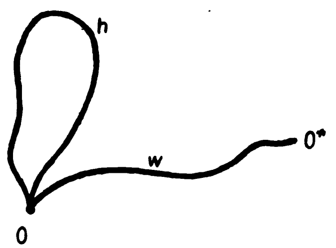
a^{-1} třídu, do které patří trajektorie h^{-1}, dostaneme $aa^{-1} = a^{-1}a = e$, tj. v množině $\mathscr{F}(\mathbf{X})$ ke každému prvku a existuje inversní prvek. Konečně pro libovolné tři trajektorie h, k, l dostaneme $(hk)l \simeq h(kl)$, odkud plyne, že zavedené násobení v $\mathscr{F}(\mathbf{X})$ je asociativní. Vzhledem k takto zavedenému násobení tvoří tedy množina $\mathscr{F}(\mathbf{X})$ grupu. Tuto grupu nazýváme *fundamentální grupou* prostoru $\mathbf{X}$.

Poznamenejme, že grupa $\mathscr{F}(\mathbf{X})$ nemusí být komutativní; může totiž nastat případ, že v této grupě existují dvě třídy a, b, pro něž $ab \neq ba$.

Změna „základního" bodu

Výše vyslovená definice fundamentální grupy se opírá o pojem „základního" bodu, a ten byl zvolen zcela libovolně.

Snadno se však dokáže, že fundamentální grupy souvislého útvaru $\mathbf{X}$, sestrojené pro dva různé základní body o a o^*, jsou isomorfní. Nechť totiž w je jakákoli trajektorie, spojující bod o s bodem o^* (obr. 100). Každé uzavřené trajektorii h o počátečním bodu o potom přiřadíme trajektorii h' o počátečním bodu o^* takto: $h' = w^{-1}hw$ (v^{-1} je opačně orientovaná trajektorie v). Snadno se ukáže, že tímto vztahem je definováno prosté zobrazení mezi třídami trajektorií, vycházejících z bodu o, a třídami trajektorií, vycházejících z bodu o^*. Toto zobrazení je isomorfismem; ze vztahů $h' = w^{-1}hw$, $k' = w^{-1}kw$ totiž plyne, že trajektorie $h'k' = w^{-1}hww^{-1}kw$ je homotopní s trajektorií $w^{-1}hkw$, což znamená, že třída trajektorií s representantem $h'k'$ odpovídá třídě trajektorií, určené representantem hk. Tím je ukázáno, *že fundamentální grupy, odpovídající dvěma různým „základním" bodům, jsou isomorfní.*



Obr. 100

Dá se dokázat ještě obecnější tvrzení: *fundamentální grupy* $\mathscr{F}(\mathbf{X})$ a $\mathscr{F}(\mathbf{X}')$ *dvou homeomorfních prostorů* $\mathbf{X}$ a $\mathbf{X}'$ *jsou isomorfní.* Vidíme tedy, že z hlediska algebraické struktury je fundamentální grupa topologickým invariantem uvažovaného prostoru $\mathbf{X}$.

Nejsou-li fundamentální grupy dvou prostorů isomorfní, nemohou být tyto prostory homeomorfní.

Příklady

Později ukážeme způsob konstrukce fundamentální grupy dost široké třídy útvarů (tzv. polyedrů). Nyní si ukažme na několika příkladech bezprostřední sestrojení fundamentální grupy.

1. Fudamentální grupa kruhu je, jak jsme již viděli, triviální; obsahuje totiž pouze jeden prvek.

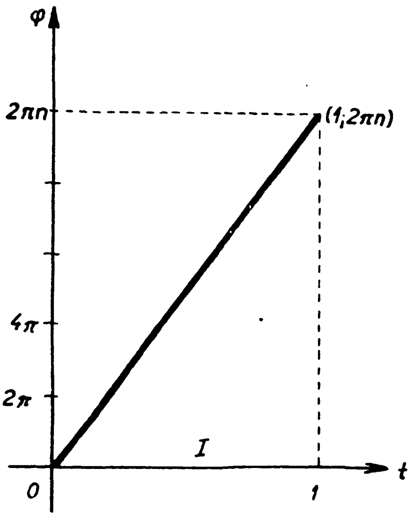
Uvědomíme-li si, že na „hladké" ploše lze libovolnou trajektorii (dokonce i trajektorii podobnou Peanově křivce, tj. zaplňující celou plochu) deformovat v hladkou trajektorii, která nepokrývá celou plochu, můžeme provést rozbor řady příkladů.

2. Fundamentální grupa dvourozměrné kulové plochy (tj. hranice koule v trojrozměrném prostoru) je také triviální. Každou trajektorii na kulové ploše lze totiž deformovat na hladkou trajektorii, která nezaplňuje celou kulovou

plochu. Odstraníme-li nyní z kulové plochy jeden bod, kterým tato trajektorie neprochází, dostaneme plochu homeomorfní s vnitřkem kruhu. A uvnitř kruhu, jak víme, může být každá trajektorie deformována v bod.

Prostory s triviální fundamentální grupou se nazývají *jednoduše souvislými*. Kruh i kulová plocha jsou tedy jednoduše souvislé. Jiným příkladem jednoduše souvislého prostoru je přímka, rovina aj.; jednoduše souvislou je i n-dimensionální kulová plocha. Uvědomíme-li si definici fundamentální grupy, můžeme vyslovit definici jednoduše souvislého prostoru takto: *prostor nazýváme jednoduše souvislým, jestliže libovolnou trajektorii v tomto prostoru lze deformovat v bod.*

3. Fundamentální grupa kružnice již není triviální — tato grupa je isomorfní s aditivní grupou celých čísel (která je *nekonečnou cyklickou grupou*)[6]).



Obr. 101

Označíme-li totiž trajektorii, která probíhá kružnici v jistém smyslu (který nazveme „kladným"), písmenem a a opačně orientovanou trajektorii znakem a^{-1}, pak a^n bude trajektorie, která probíhá kružnicí $n$krát a to v „kladném" směru, je-li n číslo, kladné, a v „záporném" směru, je-li n číslo záporné (a^0 je pak „nulovou trajektorií," tj. takovou trajektorií na kružnici, která může být deformována ve svůj počáteční bod o).

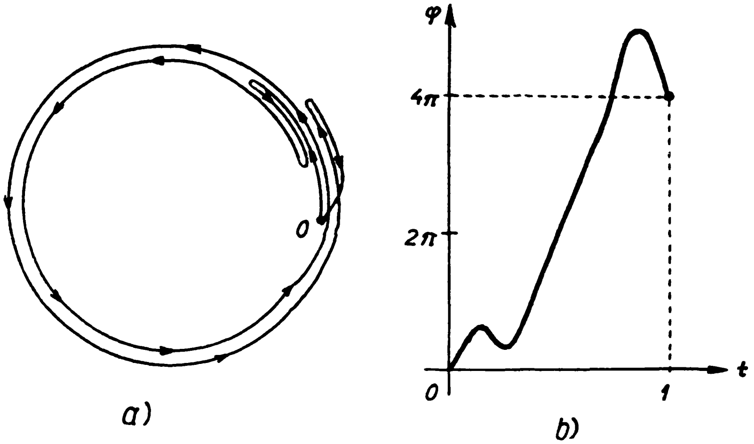
Abychom přesněji vyšetřili trajektorie na kružnici, budeme příslušné pohyby bodů zobrazovat graficky. Každé trajektorii je možno přiřadit jistý graf: podle definice trajektorie[7]) každé poloze pohybujícího se bodu odpovídá jistá hodnota parametru t (např. času) na jednotkovém intervalu I: $0 \leqq t \leqq 1$. Každé poloze bodu však také odpovídá velikost φ příslušného polárního úhlu (je vhodné to zařídit tak, aby velikost polárního úhlu počátečního bodu o byla rovna nule). Vyneseme-li na ose úseček hodnoty parametru t a na ose pořadnic odpovídající hodnoty φ, dostaneme graf závislosti $\varphi = \varphi(t)$ (při čemž $\varphi(0) = 0$).

Jestliže bod při rovnoměrném pohybu proběhne kružnici $n$krát (n je celé kladné číslo), dostaneme trajektorii a^n; grafem této trajektorie bude úsečka (obr. 101), spojující body [0;0] a [1; $2n\pi$]. Pohyb bodu po kružnici však může být daleko složitější; může se např. měnit smysl pohybu po kružnici. Na obr. 102b je znázorněn graf trajektorie, která je schematicky znázorněna na obr. 102a. Graf jakékoli uzavřené trajektorie na kružnici však vždy bude spojovat body [0;0] a [1; $2n\pi$], kde n je jisté celé číslo; taková trajektorie totiž končí v bodě o, jehož polární úhel je celistvým násobkem 2π. Jestliže graf jisté trajektorie spojuje body [0; 0] a [1; $2n\pi$] (n celé kladné), pak číslo n udává *počet oběhů* vyšetřované trajektorie. Je zřejmé, že trajektorie f, která má n oběhů, je homotopní s trajektorií a^n: jestliže totiž zakreslíme do jednoho obrázku grafy trajektorie f a a^n, můžeme libovolným bodem grafu trajektorie f pohybovat svisle (rovnoběžně s osou pořadnic) až k odpovídajícímu bodu grafu trajektorie a^n.

[6]) Takové grupy nazýváme též *volnými* (viz Dodatek na str. 25).

[7]) Viz pozn. [3]).

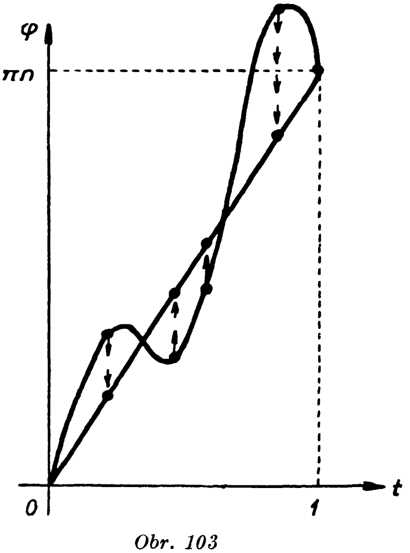
Jestliže tento pohyb budeme provádět současně pro všechny body grafu trajektorie f (obr. 103), dostaneme deformaci grafu trajektorie f v graf trajektorie a^n. Deformujeme-li však takto graf trajektorie, odpovídá tomu deformace trajek-



Obr. 102

torie, odkud plyne, že trajektorie f a a^n jsou homotopní. Tedy všechny trajektorie, které mají n oběhů na kružnici, jsou homotopní s trajektorii a^n, načež jsou také navzájem homotopni a patří do jedné třídy homotopních trajektorií. Trajektorie, jejichž počet oběhů po kružnici není stejný, nejsou homotopní.

Existuje tedy vzájemně jednoznačná korespondence mezi prvky fundamentální grupy kružnice a celými čísly. Všimněme si ještě, že při násobení trajektorií se počet oběhů sčítá, a proto je *fundamentální grupa kružnice isomorfní s aditivní grupou celých čísel.*



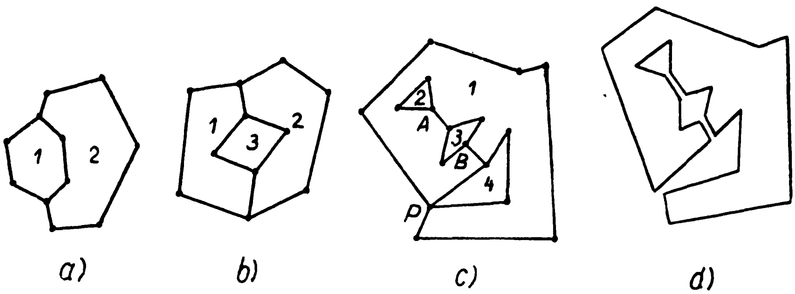
Obr. 103

4. Vyšetřme jestě fundamentální grupu projektivní roviny. Zvolme jistý bod o za počáteční a orientovanou přímku, jdoucí bodem o, označme a. Orientovanou přímku a považujme za uzavřenou trajektorii, vycházející z bodu o ve směru, určeném orientací, procházející nevlastním bodem a vracející se do bodu o. Otočení přímky a kolem bodu o o $180°$ je spojitá deformace, která převádí přímku a v přímku a^{-1}. Označíme-li proto znakem α prvek fundamentální grupy, definovaný trajektorií a, dostaneme $\alpha = \alpha^{-1}$, tj. $\alpha^2 = e$. Není obtížné ukázat, že libovolná uzavřená trajektorie s počátečním bodem o může být v projektivní rovině „deformována" v přímku a, tj. že je homotopní s trajektorií a^n. Jelikož ale trajektorie a^2 může být deformována v bod, je libovolná

trajektorie buď homotopní s trajektorií a, nebo deformovatelná v bod. *Fundamentální grupa projektivní roviny má tedy jen dva prvky, e a α, kde $\alpha^2 = e$, tj. je cyklickou grupou druhého řádu.*

Komplexy a polyedry

Konstrukce fundamentální grupy topologického prostoru je natolik složitým problémem, že nemůžeme zde udat nějaké konkrétní „předpisy“ pro jeho řešení. Omezíme se na jednodušší útvary — na *polyedry*, které mají v topologii (zejména v kombinatorické topologii) významnou úlohu, a které jsou v podstatě hlavním předmětem studia.



Obr. 104

Ukážeme nejprve, jaké množiny nazýváme polyedry. V kapitole 3 jsme často vyšetřovali graf[8]), „nakreslený“ na jisté ploše tak, že když rozřízneme plochu podél všech hran, rozpadne se na jednotlivé kousky, „stěny“, z nichž každá je homeomorfní s kruhem. Nejjednodušším příkladem je „rozříznutí“ konvexního mnohostěnu podél jeho hran. Vzájemná poloha stěn může však být mnohem složitější, jak ukazují příklady v obraze 104a), b), c).

V obraze 104c) stěna, označená číslem 1, se podél hran a a b*) a ve vrcholu P přimyká sama k sobě. Jestliže však „rozřízneme“ útvar podél všech hran, stane se tato stěna množinou homeomorfní s kruhem (obr. 104d)).

Budeme vyšetřovat i obecnější množiny (nejen plochy), které je možno „rozřezat“ na mnohoúhelníky, tj. množiny, na které je možno „nakreslit“ graf tak, že rozřezáním podél jeho hran se množina rozpadne na podmnožiny homeomorfní s kruhem. Tyto podmnožiny budeme nazývat *stěnami*, a prvky grafu *hranami* a *vrcholy*. Stěny se při tom mohou přimykat k sobě složitým způsobem (jako např. v obr. 104a), b), c)); připouštíme také, aby se k některé hraně připřimykaly tři, čtyři atd. stěny (ne vždy jen jedna nebo dvě, jak tomu bylo v případě plochy s krajem). Mohou existovat i takové hrany, ke kterým se nepřimyká stěna (obr. 105); rozřezávat množinu podél takových stěn nemá smyslu.

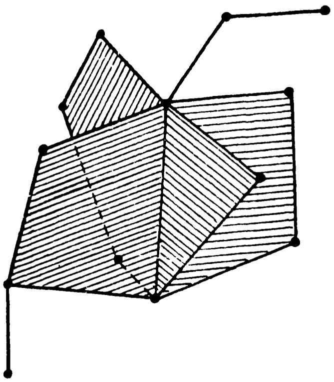
Každou množinu, která se dá pomocí jistého grafu rozřezat na podmnožiny homeomorfní s kruhem, budeme nazývat *dvojrozměrným polyedrem*, a souhrn všech hran, vrcholů a stěn, na než je polyedr rozťat pomocí tohoto grafu, budeme nazývat *komplexem* tohoto polyedru. Samozřejmě existují různé komplexy

[8]) Viz O topologii I, v tomto časopise, IV, (1959), č. 3, str. 274 ad.

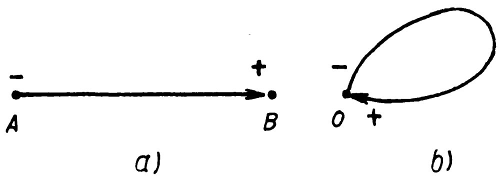
*) V obraze jsou chybně velká písmena místo malých.

téhož polyedru. Je možné vyšetřovat i jednorozměrné polyedry (které nemají stěn). Každý komplex jednorozměrného polyedru je grafem, neboť má pouze hrany a vrcholy. Lze vyšetřovat i bezrozměrné polyedry (tvořené jednotlivými body). Polyedry mohou být dále trojrozměrné, čtyřrozměrné atd., obecně n-rozměrné. Komplex trojrozměrného polyedru je tvořen vrcholy, hranami, stěnami a tělesy (výsledkem rozetnutí polyedru všemi vrcholy, hranami a stěnami jsou trojrozměrné „kousky" — tělesa — homeomorfní s koulí).

Prvky každého komplexu (tj. vrcholy, hrany, stěny atd.) nazýváme *elementy* komplexu (popřípadě *buňky*).



Obr. 105



Obr. 106

Polyedry jsou nejjednoduššími množinami. Jak víme, vyšetřuje topologie i složitější útvary, které nejsou polyedry (většina útvarů, popsaných v kapitole 5[9])).

Homotopní hranice stěn

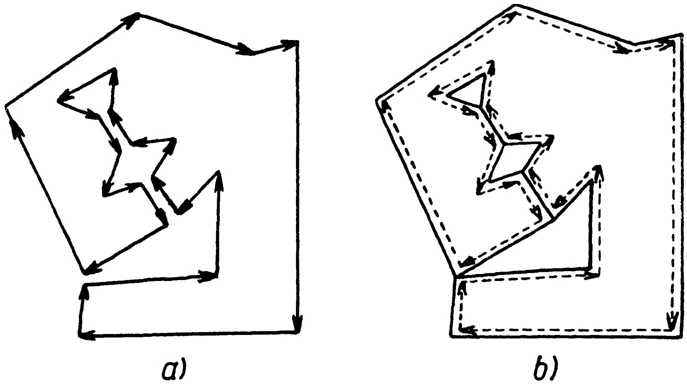
Hranu budeme nazývat *orientovanou*, je-li na ní udána (např. šipkou) orientace. Místo šipky je možno použít znamének + a —: znaménka + u konce šipky, znaménka — u začátku šipky (obr. 106a)). Je-li hrana uzavřená (tj. splývají-li její krajní body), dává se znaménko — k té části hrany, kde začíná pohyb ve směru šipky, znaménko + k té části hrany, kde tento pohyb končí (obr. 106b)).

Budeme v dalším mluvit také o smyslu oběhu na obvodu stěny. Význam slov „smysl oběhu na obvodu stěny" je zřejmý, je-li stěna např. konvexním mnohoúhelníkem. Ve složitějších případech (viz např. obr. 104c)) je smysl oběhu definován takto: Víme, že po rozříznutí podél všech hran se každá stěna stane oborem homeomorfním s kruhem (obr. 104d)). Oběhneme-li jednou hranici tohoto oboru v jistém smyslu, pak při následujícím „slepení" dá tento oběh jistý pohyb po hranici elementu. To je *oběh po obvodu stěny.* Budeme-li se pohybovat po hranici oboru v opačném smyslu, změní se také oběh po obvodu v opačný. Oběh je možno definovat i jinak: oběhem obvodu stěny nikoli po hranici, ale „velmi blízko" hranice, aniž ji kdekoli překročíme (obr. 107a), b)).

Zavedeme nyní pojem *homotopní hranice stěny,* který má významnou úlohu při konstruování fundamentální grupy polyedru.

[9]) V tomto časopise, IV, (1959), č. 4, str. 403 ad.

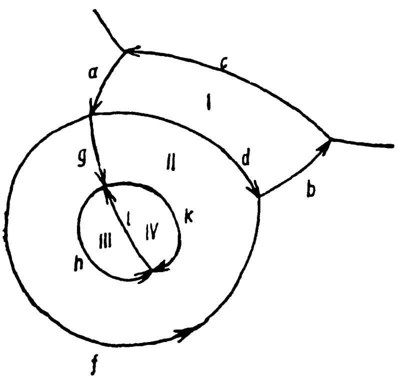
Vezměme nějakou stěnu polyedru. Všechny hrany, k nimž se tato stěna přimyká, budeme orientovat, a označíme je písmeny a, b, c,... Pro daný oběh po obvodu stěny sestrojíme jistý výraz takto: pohybujeme-li se na začátku oběhu po hraně a, napíšeme a nebo a^{-1} podle toho, zda se oběh děje ve směru šipky,



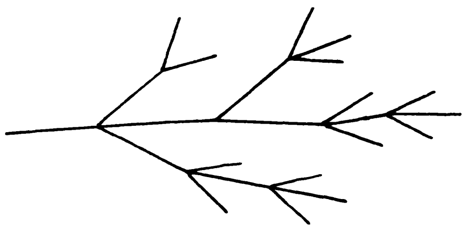
Obr. 107

nebo proti směru šipky. Jestliže následující hrana při pohybu je označena např. d, napíšeme napravo d nebo d^{-1} opět podle smyslu oběhu. Pohybujeme-li se dále po hraně m, opět připíšeme m nebo m^{-1} atd. Výraz, který takto dostaneme po dokončení oběhu stěny, nazýváme ***homotopickou hranicí*** vyšetřované stěny.

Všimněme si, že jsou-li všechny hrany označeny a orientovány, můžeme homotopickou hranici stěny zapsat různými způsoby, podle toho, v jakém smyslu provádíme oběh a kterou hranou oběh začínáme. Pro každou stěnu vezmeme některou homotopickou hranici (není podstatné kterou). Při tom pořadí „činitelů“ ve výrazu, který dostaneme, nesmíme měnit.



Obr. 108


Obr. 109

Jako příklad ukážeme oběh proti smyslu otáčení hodinových ručiček v elementech I, II, III, IV na obr. 108. Dostaneme tyto homotopické hranice elementů:

$$I\colon adbc.,\ II\colon kh^{-1}g^{-1}fd^{-1}g,\ III\colon hl,\ IV\colon l^{-1}k^{-1}.$$

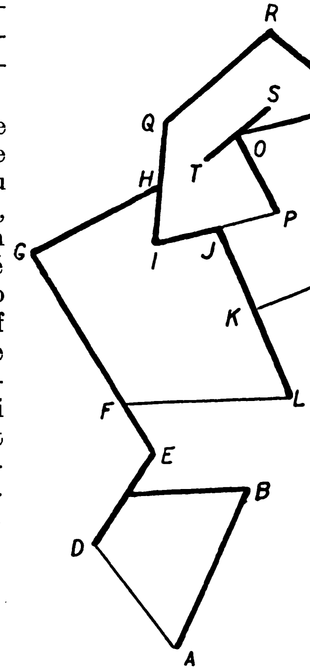
Poznamenejme, že některá hrana se může objevit několikrát v homotopické hranici stěny (jako např. hrana g v homotopické hranici stěny II).

Strom; maximální strom grafu

Zavedeme tento pojem: Souvislý graf nazýváme stromem (obr. 109), jestliže libovolné dva jeho vrcholy je možné spojit právě jednou lomenou čarou, která celá patří ke grafu, nebo, což je totéž, jestliže graf neobsahuje žádnou uzavřenou lomenou čáru.

V každém souvislém grafu je možné (obecně různými způsoby) vybrat *maximální strom*, tj. takový strom (sestavený z vrcholů a hran grafů), že přidáme-li ještě jednu (libovolnou) hranu grafu, přestává být útvar stromem. Maximální strom lze konstruovat tak, že vyjdeme od libovolného vrcholu grafu, připojujeme po jedné hrany (pokud je to možné) a šetříme požadavků, kladených na strom (poznamenejme, že maximální strom obsahuje všechny vrcholy vyšetřovaného grafu).

Vezměme např. graf z obr. 110. Budeme se pohybovat po grafu: vyjdeme z vrcholu A ve směru B a půjdeme dále. Když projdeme cestu ABC, dostaneme se do rozvětvovacího bodu C, odkud můžeme pokračovat ve dvou směrech — k bodu D nebo k bodu E. V prvním případě skončíme v bodě D, neboť pokračováním po úsečce DA bychom uzavřeli dráhu $ABCDA$ a graf by přestal být stromem. Druhý směr pokračuje drahou CEF, a odtud je opět možné postupovat dvěma směry atd. Z bodu O, kam jsme při pohybu došli z bodu N, je možné postupovat třemi směry — OP, OS, OT. Jako výsledek dostáváme maximální strom grafu z obr. 110; maximální strom je vytažen silnějšími čarami — nepatří k němu úsečky DA, FL, JP, MK.



Obr. 110

Konstrukce fundamentální grupy polyedru

Uvedeme bez důkazů jednoduchý způsob konstrukce fundamentální grupy souvislého polyedru[10]).

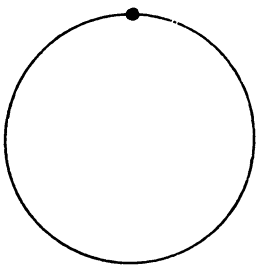
Nechť **P** je souvislý polyedr. Uvažujme nějaký jeho komplex a označme graf, tvořený všemi vrcholy a hranami, **G**. V grafu **G** konstruujme maximální strom a všechny hrany, které tvoří tento strom, označme číslem 1. Všechny ostatní hrany grafu **G** (které nejsou částí maximálního stromu) orientujme a označme $a, b, c, \ldots$. Napišme homotopickou hranici každé stěny uvažovaného komplexu, aniž bychom uvažovali činitele rovny 1 (tj. hrany, označené číslem 1). Grupu zkonstruujeme, jestliže za generátory grupy budeme považovat prvky, $a, b, c \ldots$, tj. znaky těch hran grafu **G**, které nejsou součástí maximálního stromu, a za určující vztahy rovnosti, které dostaneme, jestliže všechny na-

[10]) Konstruovat grupu znamená udat všechny generátory a určující vztahy (viz Dodatek str. 25). S těmito pojmy je možno se také seznámit např. v knize P. S. Alexandrova (viz poznámku[1]).

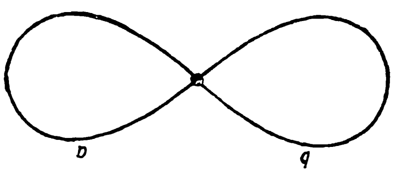
psané homotopické hranice položíme rovny jedné. Lze ukázat, *že takto konstruovaná grupa je isomorfní s fundamentální grupou uvažovaného polyedru.* Tento způsob konstrukce fundamentální grupy je velmi výhodný.

Příklady

1. Komplex kružnice obsahuje jeden vrchol a jednu hranu (obr. 111). Maximální strom je tvořen právě jedním vrcholem, proto hrana je jediným generátorem fundamentální grupy, a neexistují žádné určující vztahy (neboť tento komplex neobsahuje dvojrozměrné elementy, tj. stěny). *Fundamentální grupa kružnice je tedy volnou cyklickou grupou* (viz str. 25).



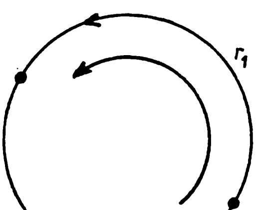
Obr. 111



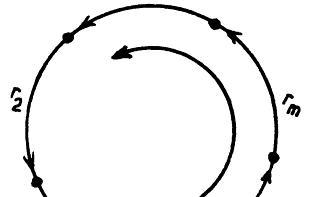
Obr. 112

2. Fundamentální grupa lemniskaty (obr. 112) je volnou grupou (tj. grupou bez určujících vztahů) se dvěma generátory a, b.

3. Komplex kulové plochy (dvojrozměrné) je tvořen jedním vrcholem (bezrozměrným elementem) a jednou stěnou (dvojrozměrným elementem), neboť vyjmeme-li z kulové plochy bod, je zbytek kulové plochy homeomorfní s kruhem.



Obr. 113



Obr. 114

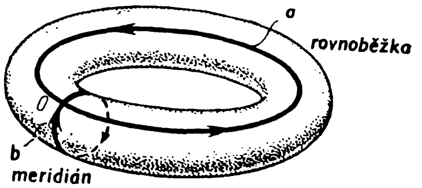
Maximální strom je tvořen jedním vrcholem. Jelikož v komplexu není ani jedné hrany, nemá fundamentální grupa kulové plochy žádné generátory, je tedy triviální (srovnej str. 25).

4. Vyšetřme nyní komplex z obrazu 113, který je tvořen kruhem a jeho hranicí, rozdělenou na dvě polokružnice r_1 a r_2. Slepováním krajních bodů průměrů dostaneme projektivní rovinu[11]), při čemž obě hrany r_1 a r_2 splynou (s uvážením

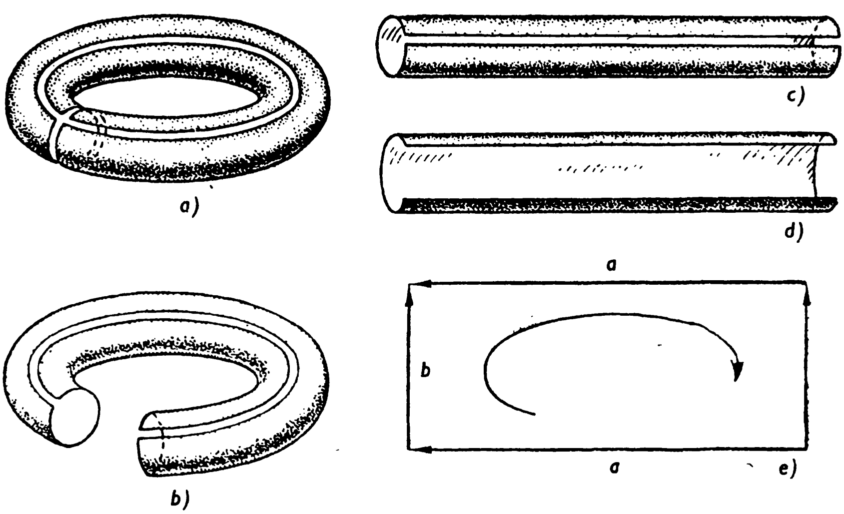
[11]) Viz *O topologii I*, v tomto časopise, IV (1959), č. 3, str. 287.

příslušné orientace) v jedinou hranu r. Projektivní rovina připouští tedy komplex, který je tvořen jedním vrcholem, jednou hranou a jednou stěnou. Homotopická hranice této hrany, jak je zřejmé z obr. 113, je rovna rr, tj. r^2. Fundamentální grupa projektivní roviny je tedy grupou s jedním generátorem r a určujícím vztahem $r^2 = 1$; je tedy *cyklickou grupou druhého řádu* (tedy isomorfní s grupou zbytkových tříd modulo 2, srov. str. 25).

5. Vyšetřme *projektivní rovinu modulu m*, kterou dostaneme z kruhu, jestliže slepíme každých m bodů hraniční kružnice, které dělí tuto kružnici na m stejných oblouků[12]). Abychom dostali komplex projektivní roviny modulu m, rozdělme kružnici na m stejných oblouků $r_1, r_2, \dots r_m$; na všech vyznačíme šipkou stejnou orientaci (obr. 114). Při slepování dají tyto oblouky jednu hranu r. Dostaneme komplex: jeden vrchol, jednu hranu a jednu stěnu, při čemž homotopická hranice této stěny je $r \,.\, r \ldots\ldots r = r^m$. Fundamentální grupa projektivní roviny modulu m je tedy grupou s jedním generátorem r a určujícím vztahem $r^m = 1$, čili *cyklickou grupou řádu m* (která je isomorfní s grupou zbytkových tříd modulo m).



Obr. 115

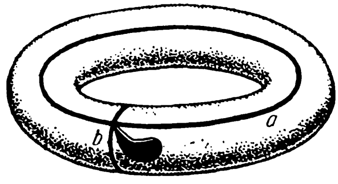


Obr. 116

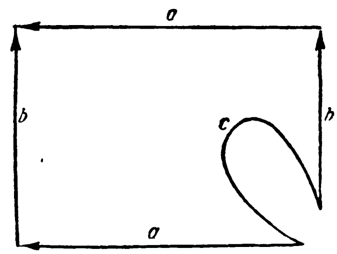
6. Na anuloidu uvažujme rovnoběžku a a meridián b, které se protínají v bodě o (obr. 115). Dostáváme tak komplex anuloidu: jeden vrchol, dvě hrany a jednu stěnu. Rozříznutím anuloidu podél rovnoběžky a meridiánu dostaneme obdélník (obr. 116a—d), tj. množinu homeomorfní s kruhem. Homotopní hranice této jediné stěny je při vyšetřovaném rozkladu rovna $aba^{-1}b^{-1}$ (viz obr. 116e).

[12]) Jinými slovy, projektivní rovinu modulu m dostaneme, jestliže otvor v kulové ploše zalepíme Moebiovým listem modulu m. Viz pozn. [11]).

Fundamentální grupa anuloidu je tedy grupou se dvěma generátory a, b a určujícím vztahem $aba^{-1}b^{-1} = 1$ (nebo $ab = ba$). Jinými slovy tato fundamentální grupa je *volnou Abelovou grupou* se dvěma generátory.

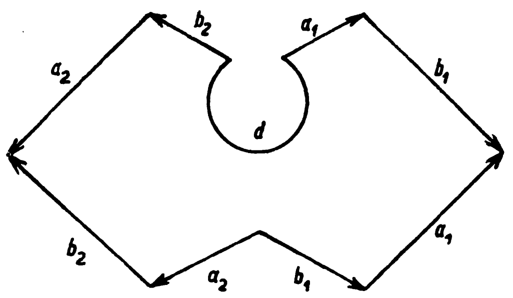


Obr. 117



Obr. 118

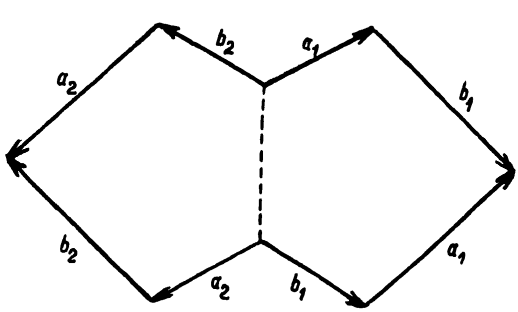
7. Jestliže na anuloidu vyřízneme otvor tak, jak ukazuje obr. 117, dostaneme rozříznutím podél rovnoběžky a meridiánu pětiúhelník a nikoli obdélník (obr. 118 srov. s obr. 116e). Slepením úseček pětiúhelníku, které jsou na obr. 118 označeny stejně, dostaneme anuloid s otvorem, tedy „ucho“[13]). Hrana c dává kraj tohoto „ucha“. Slepíme-li kraje dvou takových ploch (obr. 119), dostaneme „preclík“[14]). Jestliže tedy slepíme úsečky, které jsou na obr. 119 stejně označeny, dostaneme „preclík“, tj. orientovatelnou plochu $\mathbf{P}_2$[15]).



Obr. 119

„Preclík“ s vyříznutým otvorem může být slepen z mnohoúhelníka, který je vyobrazen na obr. 120. Připojíme-li ještě jedno „ucho“, dostaneme (obr. 121) kulovou plochu se třemi uchy, tj. orientovatelnou plochu $\mathbf{P}_3$.[14]) Orientovatelná plocha $\mathbf{P}_m$[14]) (kulová plocha s m uchy) může být sestrojena ze $4m$-úhelníku, který je znázorněn na obr. 122, jestliže slepíme stejně označené strany. Z toho vyplývá, že plocha $\mathbf{P}_m$ má tento komplex: jeden vrchol, $2m$ hran $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_m, b_m$, a jedna stěna. Homotopní hranice této stěny je

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\ldots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1} \text{ (viz obr. 122).}$$



Obr. 120

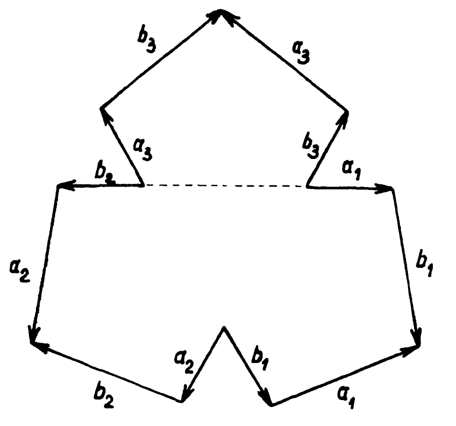
Fundamentální grupa plochy $\mathbf{P}_m$

[13]) Viz *O topologii I*, v tomto časopise, IV, (1959), č. 3, str. 278.
[14]) Tamtéž.
[15]) Tamtéž, str. 285.

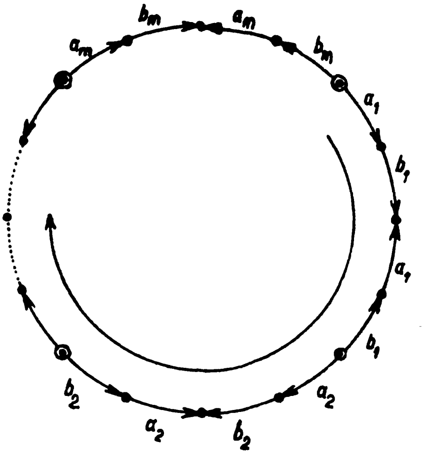
je tedy grupou s $2m$ generátory $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_m, b_m$, a jediným určujícím vztahem

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1} = 1.$$

Poznamenejme, že pro $m \geqq 2$ není tato grupa Abelovou grupou (např. $a_1 b_1 \neq b_1 a_1$).



Obr. 121

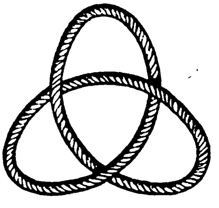


Obr. 122

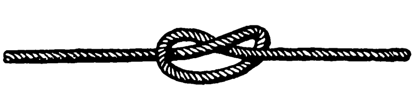
Uzly a jejich grupy

Uzel je velmi známá věc z denního života. Tkalci, námořníci, horolezci, atd. používají desítky topologicky různých uzlů.

Nejjednodušší uzel vidíme v obraze 123. Nazývá se také *prostý uzel*[16]).



Obr. 123



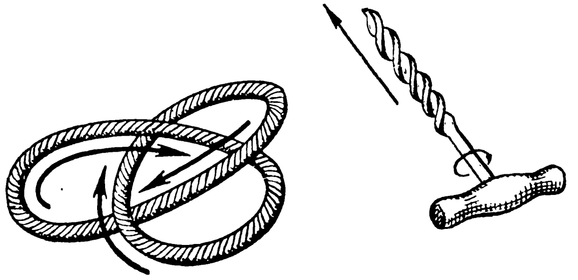
Obr. 124

Prostý uzel má dva typy — *levý* a *pravý*. Podrobíme-li levý prostý uzel transformaci zrcadlením, dostaneme pravý prostý uzel. Název pravý dostal tento uzel proto, že ať příslušnou čáru orientujeme jakkoli, odpovídá pohyb ve zvoleném směru po úseku, který je na obr. 125 označen (a), pohybu po pravotočivém závitu.

[16]) Nejsou-li konce „lana", na němž je uzel vytvořen, spojeny (obr. 124), je možno uzel vždy „rozvázat". Proto se v topologii zkoumají uzly na čarách, jejichž „konce" jsou v nekonečnu, nebo na uzavřených čarách. Zde se budeme zabývat těmito druhými uzly.

Je zajímavé, že každý člověk je zvyklý zavazovat jeden uzel: někdo zavazuje vždy levý uzel, někdo vždy pravý.

Složitějším uzlem je *obyčejný dvojný uzel* (obr. 126[17]); nesmíme jej směšovat s tzv. *námořnickým uzlem* (obr. 127).

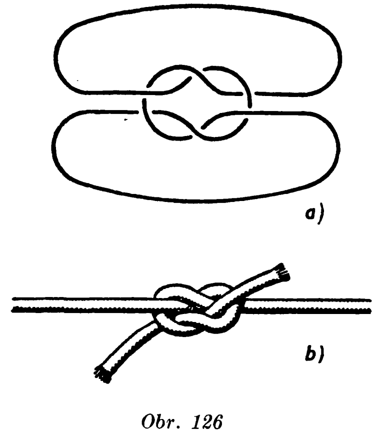


Obr. 125

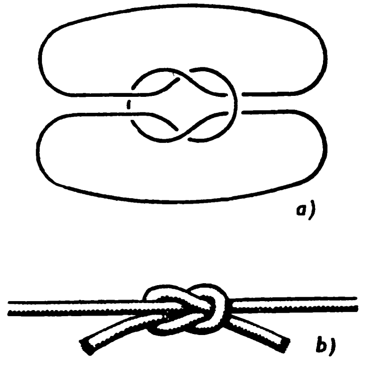
Důležitým problémem topologie trojrozměrného prostoru je tzv. *problém uzlu:*

Kdy je možné považovat dvě uzavřené prosté křivky L_1 a L_2 v trojrozměrném prostoru (např. dvě uzavřené lomené čáry) za „topologicky stejně vytvořené"?

Neurčitý výrok „topologicky stejně vytvořené" křivky zpřesníme zavedením pojmu isotopie dvou útvarů: dvě množiny L_1 a L_2, vnořené do topologického



Obr. 126

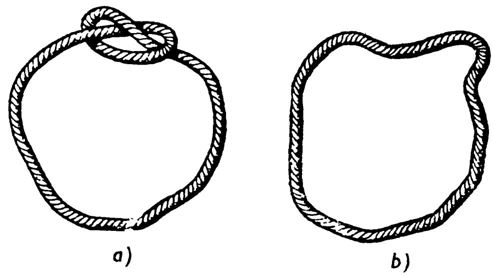


Obr. 127

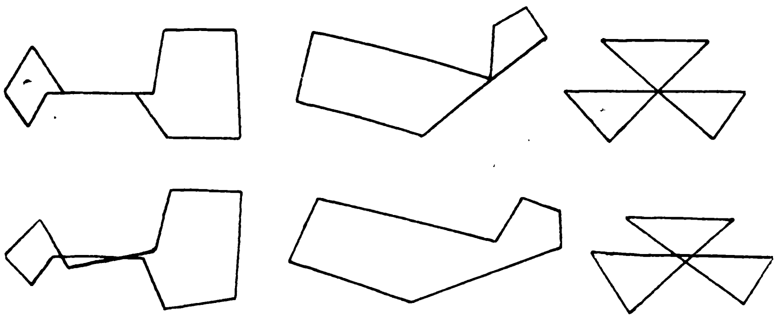
prostoru **R**, nazýváme *topologicky stejně vytvořenými* v tomto prostoru, nebo *isotopními* v **R**, jestliže existuje takové topologické zobrazení prostoru **R** na sebe, které zobrazuje množinu L_1 na množinu L_2.

[17]) Na obr. 126 a je znázorněno schéma obyčejného dvojného uzlu (na uzavřené čáře); tvar tohoto uzlu je znázorněn na obr. 126b. Totéž se vztahuje k obr. 127.

Problém uzlu je tedy problémem nalezení podmínek, za kterých jsou dvě uzavřené lomené čáry L_1 a L_2 isotopní v prostoru $\mathbf{E}_3$. Z názoru je např. zřejmé, že čára, na které je uzel, a čára bez uzlu (obr. 128a a b) nejsou isotopní. Jak to však dokázat?

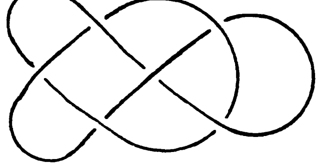


Obr. 128

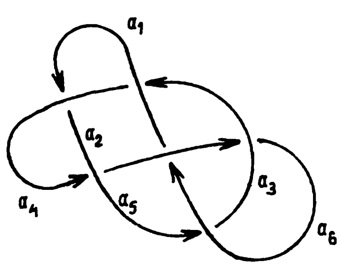


Obr. 129

Úplné řešení problému uzlu není dosud známo. Jsou však známy některé topologické invarianty uzlů, které v řadě případů umožňují uzly vzájemně rozlišovat. Nejjednodušším a nejdůležitějším invariantem uzlu je tzv. *grupa*



Obr. 130

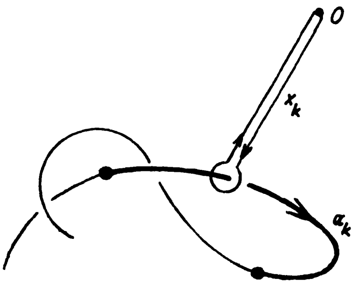


Obr. 131

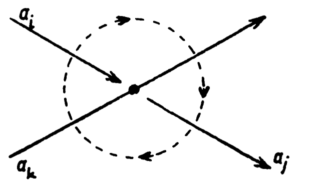
uzlu: je definována jako fundamentální grupa $\mathscr{F}(\mathbf{E}_3 - L)$ komplementu čáry L v prostoru $\mathbf{E}_3$ (tj. jako fundamentální grupa trojrozměrného prostoru, ze kterého jsou vyjmuty body čáry L). Grupu uzlu budeme značit $\mathscr{G}(L)$, tj. $\mathscr{G}(L) =$

$= \mathscr{F}\,(\mathbf{E}_3 - L)$. Jsou-li L_1, L_2 takové uzly, že grupy $\mathscr{G}(L_1)$ a $\mathscr{G}(L_2)$ nejsou isomorfní, pak tyto uzly nejsou isotopní (což vyplývá z toho, že fundamentální grupa je topologickým invariantem).

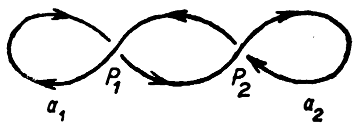
Ukážeme nyní způsob, jakým lze grupu uzlu konkrétně sestrojit. Promítněme naši uzavřenou lomenou čáru L na ,,vodorovnou" rovinu. Křivka, kterou jsme v rovině dostali (průmět uzlu L), může sama sebe protínat; můžeme však předpokládat, že tento průmět nemá kromě dvojných bodů (je-li třeba, můžeme poněkud pozměnit některý článek) jiných singularit (možné singularity jsou znázorněny na obr. 129; na tomtéž obrázku je dole ukázáno, jak je možné tyto singularity odstranit). Budeme tedy předpokládat, že v každém bodě, kde průmět uzlu sám sebe protíná, neprotínají se více než dva články lomené čáry. Na



Obr. 132



Obr. 133



Obr. 134

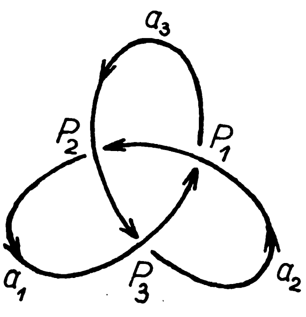
náčrtcích přerušíme vždy ten článek lomené čáry, který leží ,,pod"; ten článek, který leží ,,nad", nebudeme na průměru přerušovat. Místo lomené čáry budeme na náčrtcích kreslit hladkou křivku. Dostaneme tak názorný obrázek prostorové čáry L (obr. 130). Toto ,,schéma uzlu" nazveme *normálním průmětem uzlu.*

Ukážeme nyní jak se dá pomocí normálního průmětu uzlu konstruovat grupa uzlu. Celý průmět je rozdělen na n od sebe oddělených oblouků; tyto oblouky označme $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a odpovídající části čáry L písmeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; orientujme kromě toho čáru L a vyznačme tuto orientaci šipkami na obloucích a_1, $a_2, \ldots a_n$ (obr. 131). Abychom sestrojili příslušnou fundamentální grupu, zvolme v prostoru ,,nad" křivkou L bod o, ze kterého veďme prostorovou křivku (,,smyčku"), jež obepíná oblouk α_k ve směru pravotočivého závitu (obr. 132). Tuto trajektorii označme x_k. Trajektorie $x_k (k = 1, 2, \ldots n)$, přesněji homotopní třídy těchto trajektorií jsou generátory fundamentální grupy $\mathscr{F}(\mathbf{E}_3 - L)$, tj. grupy uzlu: je zřejmé, že libovolná trajektorie v komplementu k L je homotopní s některou kombinací těchto n trajektorií. Zbývá vyjádřit *určující vztahy* mezi těmito generátory.

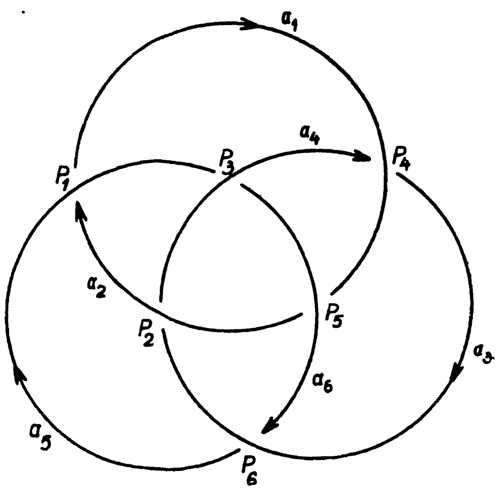
Vyšetřme proto některý dvojný bod průmětu (nechť trajektorie, které se v tomto bodě protínají, jsou označeny tak, jako na obraze 133). Oběhneme nyní dvojný bod po kruhové dráze ve smyslu oběhu hodinových ručiček a sestrojíme jistý výraz takto: vchází-li orientovaný oblouk do kruhu, opatříme jeho znak indexem $+1$ vpravo nahoře, vychází-li z kruhu, opatříme jeho znak indexem -1 vpravo nahoře. Oběhneme takto celou kružnici a vypíšeme zleva doprava upravené znaky všech čtyř oblouků, jejichž společným bodem je dvojný bod průmětu. Tento výraz prohlásíme za jednotku. Např. pro dvojný bod na obr. 133 dostaneme tak $x_i x_k^{-1} x_j^{-1} x_k = 1$. (Není obtížné si z názoru představit, že trajektorie $x_i x_k^{-1} x_j^{-1} x_k$ je skutečně homotopní s jednotkovou trajektorií v $\mathbf{E}_3 - L$.) Takový vztah je možno napsat pro každý dvojný bod průmětu. Lze ukázat, že když napíšeme tyto vztahy pro všechny dvojné body, dostaneme systém určujících vztahů mezi generátory $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Příklady

1. Vyšetřme uzel, jehož průmět je znázorněn na obr. 134. Grupa tohoto uzlu má dva generátory x_1, x_2 (odpovídající obloukům a_1, a_2 na průmětu, mezi nimiž platí dva vztahy (v dvojných bodech P_1, P_2) : $x_1^{-1}x_1x_1x_2^{-1} = 1$, $x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_2 = 1$. Oba tyto vztahy lze redukovat na jeden: $x_1 = x_2$ a fundamentální grupa tohoto uzlu je volnou cyklickou grupou, tj. stejnou grupou jako u kružnice (nezauzlené). To je názorné; z obr. 134 je totiž vidět, že uvažovaný uzel je isotopní s kružnicí.



Obr. 135



Obr. 136

2. Průmět prostého uzlu (obr. 123) je znázorněn na obr. 135. Vztahy mezi generátory x_1, x_2, x_3 (ve dvojných bodech P_1, P_2, P_3) jsou tvaru

$$x_2x_1x_3^{-1}x_1^{-1} = 1\ , \quad x_3x_2x_1^{-1}x_2^{-1} = 1\ , \quad x_1x_3x_2^{-1}x_3^{-1} = 1\ .$$

Tyto vztahy lze snadno zjednodušit: položíme-li $x_1 = x$ a $x_2 = y$, dostaneme ze druhého vztahu $x_3 = yxy^{-1}$ a první (i třetí) vztah lze pak upravit na $xyx = yxy$. Grupa vyšetřovaného uzlu je tedy grupou se dvěma generátory x, y a určujícím vztahem $xyx = yxy$.

Dá se ukázat, že tato grupa je nekomutativní a proto samozřejmě není isomorfní s nekonečnou cyklickou grupou. Uzel na obr. 123 není tedy isotopní s kružnicí (nemůže být rozvázán aniž bychom přeřezali nit).

3. Tyto úvahy mohou být beze změny přeneseny na složitější uzly, které jsou utvořeny z několika prostých uzavřených křivek, vzájemně propletených. Omezíme se na rozbor uzlu, který je utvořen ze tří kružnic, spojených tak, jak znázorňuje obr. 136 (je samozřejmé, že kružnice mohou zaujmout v prostoru

tuto polohu jen tehdy, jsou-li poněkud deformovány). „Roztrhneme-li" kteroukoli z těchto kružnic, ostatní dvě již nebudou vzájemně „propleteny." Neporušíme-li však žádnou ze tří kružnic, nelze útvar „rozebrat," čili uzel není isotopní se třemi oddělenými kružnicemi.

K důkazu tohoto tvrzení stačí ukázat, že grupa tohoto uzlu *není isomorfní s volnou grupou se třemi generátory* (neboť grupa uzlu, tvořeného třemi oddělenými kružnicemi, je volnou grupou se třemi generátory). Grupa uzlu podle obr. 136 má 6 generátorů $a_1, \dots, a_6$, vázaných 6 vztahy (pro dvojné body $P_1, \dots, P_6$). Tyto vztahy mají, jak se lze snadno přesvědčit, tvar:

$$a_1^{-1}a_5^{-1}a_2a_5 = 1\,, \quad a_4^{-1}a_2a_3a_2^{-1} = 1\,,$$
$$a_4^{-1}a_6^{-1}a_4a_5 = 1\,, \quad a_1a_3^{-1}a_1^{-1}a_4 = 1\,,$$
$$a_1a_6^{-1}a_2^{-1}a_6 = 1\,, \quad a_6a_3a_5^{-1}a_3^{-1} = 1\,.$$

Položíme-li $a_1 = x$, $a_3 = y$, $a_5 = z$, dostaneme s použitím prvního, čtvrtého a šestého vztahu

$$a_2 = zxz^{-1}\,, \quad a_4 = xyx^{-1}\,, \quad a_6 = yzy^{-1}\,,$$

načež

$$xyx^{-1}zx = yzy^{-1}xy = zxz^{-1}yz\,.$$

Grupa uzlu vyznačeného na obr. 136 má tři generátory x, y, z, vyhovující třem uvedeným vztahům. Zbývá dokázat, že grupa s n generátory s aspoň jedním netriviálním určujícím vztahem není isomorfní s volnou grupou s n generátory. Toto tvrzení se dokazuje (důkaz není jednoduchý) v teorii grup.

DODATEK

Základní pojmy teorie grup

Grupou se jak známo nazývá libovolná množina $\mathbf{G}$ prvků, v níž je definována operace, přiřazující každým dvěma prvkům a, b z $\mathbf{G}$ prvek z $\mathbf{G}$, který se označuje ab, tak, aby byly splněny požadavky:

1. Pro libovolné tři prvky a, b, c z $\mathbf{G}$ platí $(ab)c = a(bc)$ (asociativní zákon),

2. v $\mathbf{G}$ existuje prvek e (někdy označovaný 1), zvaný jednotkový prvek nebo krátce jednotka, takový, že pro každý prvek a z $\mathbf{G}$ platí

$$ae = ea = a\,,$$

3. ke každému prvku a z $\mathbf{G}$ existuje v $\mathbf{G}$ tzv. inversní prvek, označovaný a^{-1}, pro který platí

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e\,.$$

Takto zavedenou operaci nazýváme grupovou operací nebo grupovým násobením.

Platí-li pro libovolné dva prvky a a b grupy $\mathbf{G}$ vztah

$$ab = ba \quad \text{(komutativní zákon)},$$

říkáme, že $\mathbf{G}$ je *komutativní grupa* nebo Abelova grupa. V opačném případě říkáme, že grupa $\mathbf{G}$ je *nekomutativní*. Je-li počet prvků grupy konečný, nazýváme grupu *konečnou*; skládá-li se z nekonečně mnoho prvků, říkáme, že je *nekonečná*.

Z definice grupy vyplývá, že s každým prvkem a patří do grupy i každý člen posloupnosti prvků $aa = a^2$, $a^2a = a^3$, $a^3a = a^4$, ... atd. Skládá-li se grupa **G** jen z prvků uvedené posloupnosti (při tom lze ovšem jednotku e také vyjádřit jako mocninu a, např. $a^n = e$), nazývá se *cyklická grupa*; nejmenší přirozené číslo n, pro něž $a^n = e$, se nazývá *řádem cyklické grupy*. Cyklická grupa řádu n obsahuje zřejmě právě n prvků, totiž prvky $a, a^2, a^3, \ldots, a^n = e$. Takovouto grupou je např. grupa n-tých odmocnin (komplexních) z jedné, nebo grupa zbytkových tříd modulo n (kde za grupovou operaci považujeme sčítání zbytkových tříd). Mezi cyklické grupy počítáme i tzv. *nekonečnou cyklickou grupu*, skládající se ze všech celistvých (tj. nezáporných i záporných mocnin prvků a); při tom klademe $a^0 = e$. Příkladem takové grupy je aditivní grupa celých čísel (kde grupovou operací je sčítání celých čísel).

O cyklické grupě říkáme také, že je vytvořena některým svým prvkem a. Obecně říkáme, že grupa je vytvořena svými prvky $a, b, c, \ldots$, jestliže každý prvek této grupy lze vyjádřit součinem prvků $a, b, c \ldots$ a prvků k nim inversních, např.

$$x = acb^{-1}aac^{-1}bbb = acb^{-1}a^2c^{-1}b^3 .$$

Prvky $a, b, c, \ldots$ nazýváme *generátory grupy*. Daná grupa může ovšem mít rozličné systémy generátorů, např. množina všech prvků dané grupy tvoří systém generátorů.

Systémem generátorů grupa zřejmě ještě není určena. Např. za systém generátorů cyklické grupy lze považovat jeden vhodný prvek. K tomu, aby byla určena, je kromě systému generátorů třeba udat ještě vztahy mezi generátory (tzv. *určující vztahy*); tyto vztahy lze např. vyjádřit rovnostmi mezi součiny generátorů a prvků k nim inversních (např. $ab^2c^{-2}b^2 = ba^{-2}c^3b$), anebo tak, že vyznačíme všechny ty součiny generátorů a prvků k nim inversních, které se rovnají jednotce (např. $ab^2c^{-2}bc^{-3}a^2b^{-1} = 1$). *Systémem generátorů a určujícími vztahy je grupa úplně určena*; prvky grupy lze považovat za „kombinace" generátorů (za „slova," považujeme-li generátory za „písmena" nějaké „abecedy"). Při tomto v těchto „kombinacích" nebo „slovech" lze vždy vynechat takové části těchto „kombinací", které podle určujících vztahů jsou rovny jednotce, a také ty jejich části, které jsou tvaru aa^{-1} nebo tvaru $a^{-1}a$. Jestliže v grupě nejsou postulovány určující vztahy, nazýváme ji *volnou grupou*. Nekonečná cyklická grupa je např. volnou grupou s jedním generátorem. Cyklická grupa řádu n není volnou grupou; je to grupa s jedním generátorem a a jedním určujícím vztahem $a^n = 1$.

Přeložili Jiří Fábera
a Jiří Gregor