František Kuřina

Shodná zobrazení v prostoru

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 11 (1966), No. 1, 1--13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137059

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XI — ČÍSLO 1

SHODNÁ ZOBRAZENÍ V PROSTORU

FRANTIŠEK KUŘINA, Hradec Králové

ÚVOD

V 5. čísle VII. ročníku Pokroků informoval Vítězslav JOZÍFEK o některých problémech modernizace vyučování geometrii podle pojetí prof. Zofie KRYGOWSKÉ. V jeho článku „Modernizace vyučování geometrii" se mimo jiné zdůrazňují „geometrické transformace jako metodologický prostředek syntézy v kursu geometrie" a „algebraické aspekty při studiu geometrie" (str. 280). Tato hlediska nejsou, jak známo, zcela nová. Připomeňme aspoň jméno Felixe KLEINA a jeho pojetí elementární geometrie jako teorie invariantů jisté grupy zobrazení. Výrazem Kleinových snah zavést transformační pojetí geometrie do středoškolského vyučování byl tzv. MERANSKÝ PROGRAM (1912). Budování geometrie na transformačním pojetí se v německé matematické literatuře spojuje s druhou základní otázkou, s otázkou algebraizace geometrie, a to nikoli algebraizace zprostředkované tradičními prostředky analytické geometrie, ale algebraizace v jistém smyslu přímé. Klasickou knihou tohoto pojetí je patrně učebnice G. THOMSENA, „Grundlagen der Elementargeometrie in Gruppenalgebraischer Behandlung", Hamb. Math. Einzelschriften, 1933. V poslední době vyšlo několik monografií věnovaných těmto otázkám. Bezesporu základním dílem je Fridricha BACHMANNA „Aufbau der Elementargeometrie aus dem Spiegelungsbegriff", Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1959. V tomto spise se buduje elementární geometrie roviny na axiómech, které mají algebraickou formu axiómů jisté grupy (grupy shodností roviny). Souvislost grupově algebraického pojetí geometrie s klasickou elementární geometrií budovanou na Hilbertově soustavě axiómů podává Hanfried LENZ v knize „Grundlagen der Elementarmathematik", Berlin, 1961. Rozšíření na trojrozměrný prostor provádí Joachim AHRENS v článku „Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff", Mathematische Zeitschrift, *71*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1959. Zde se opět axiómaticky (v algebraické podobě) zavádějí tradiční ryze geometrické pojmy jako např. incidence a kolmost.

Cílem mého článku je seznámit čtenáře s bachmannovským kalkylem se souměrnostmi (tedy s algebraizací geometrie, jak jsem se o ní zmínil výše) na problematice klasifikace shodností v trojrozměrném euklidovském prostoru. Vycházím přitom z citovaného článku Ahrensova, předpokládám však tradiční hilbertovský systém axiómů geometrie (např. podle knihy Jana VYŠÍNA, „Soustava axiomů eukleidovské geometrie“, NČSAV, Praha 1959; v dalším budeme tuto knihu citovat heslem Soustava).

ZÁKLADNÍ POJMY

Všechny úvahy článku se týkají trojrozměrného euklidovského prostoru (v dalším stručně prostoru) budovaného na systému axiómů podle citované Vyšínovy Soustavy. Slovem zobrazení budeme rozumět prosté zobrazení prostoru na prostor.

Definice 1. Zobrazení I, ve kterém je libovolný bod prostoru samodružný, se nazývá identitou.

Definice 2. Zobrazení Φ prostoru se nazývá involutorním zobrazením, je-li různé od identity a je-li jeho druhá mocnina identita.

V definici 2 jsme nepřímo vyslovili, že pro skládání zobrazení budeme užívat multiplikativní symboliku. Požadavky definice involutorního zobrazení Φ lze psát ve tvaru

$$\Phi \neq I, \quad \Phi^2 = I.$$

Násobíme-li poslední rovnost zprava zobrazením inverzním k zobrazení Φ (toto zobrazení označíme Φ^{-1}), dostaneme po úpravě

$$\Phi = \Phi^{-1}. \tag{1}$$

Involutorní zobrazení Φ je tedy neidentické zobrazení, které je totožné se zobrazením Φ^{-1} k němu inverzním.

Násobení dvou zobrazení není, jak známo, obecně komutativní. Komutativnost násobení dvou různých involucí však znamená involutornost jejich součinu, jak dokážeme

v pomocné větě 1. *Nechť Φ, Ψ jsou od sebe různé involuce. Součin $\Phi\Psi$ je involucí, právě když je násobení těchto involucí komutativní.*

Důkaz. Podle předpokladu je $\Phi \neq \Psi$. Nechť je $\Phi\Psi$ involucí. Podle definice 2 platí

$$\Phi\Psi \neq I,$$
$$(\Phi\Psi)^2 = (\Phi\Psi)(\Phi\Psi) = I.$$

Násobíme-li druhou rovnost po řadě zprava zobrazeními Ψ^{-1}, Φ^{-1}, dostaneme

$$\Phi\Psi = \Psi^{-1}\Phi^{-1}.$$

Podle (1) tedy platí

$$\Phi\Psi = \Psi\Phi \tag{2}$$

a komutativnost násobení involucí Φ, Ψ je prokázána.

Platí-li (2) a $\Phi \neq \Psi$, odvodíme opět postupným násobením rovnosti (2) zprava zobrazeními Φ, Ψ

$$(\Phi\Psi)^2 = I\,, \quad \Phi\Psi \neq I\,.$$

Součin $\Phi\Psi$ je tedy involuce a pomocná věta 1 je dokázána.

Hledejme zobrazení inverzní k součinu involucí Φ, Ψ. Z rovnosti $\Phi\Psi(\Phi\Psi)^{-1} = I$ vypočteme $(\Phi\Psi)^{-1} = \Psi^{-1}\Phi^{-1} = \Psi\Phi$.

Tento výsledek lze snadno rozšířit matematickou indukcí na libovolný počet involucí:

Jsou-li $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n$ involuce, platí

$$(\Phi_1\Phi_2\ldots\Phi_n)^{-1} = \Phi_n\Phi_{n-1}\ldots\Phi_1\,. \tag{3}$$

Definice 3. Jsou-li Φ, Ψ libovolná dvě zobrazení prostoru, nazývá se zobrazení $\Phi^{\Psi} = \Psi^{-1}\Phi\Psi$ transformací zobrazení Φ zobrazením Ψ.
Názorný význam definice je zřejmý.

Pomocná věta 2. *Je-li U množina všech samodružných bodů zobrazení Φ, je množina U_1 všech samodružných bodů zobrazení Φ^{Ψ} obrazem množiny U v zobrazení Ψ.*

Důkaz. Nechť X je libovolný bod množiny U, X_1 jeho obraz v zobrazení Ψ. Pak platí v jednotlivých zobrazeních:

$$\begin{aligned}
&\Phi &&: X \to X\,,\\
&\Psi &&: X \to X_1\,,\\
&\Psi^{-1} &&: X_1 \to X\,,\\
&\Psi^{-1}\Phi\Psi &&: X_1 \to X_1\,.
\end{aligned}$$

Obraz X_1 bodu X v zobrazení Ψ je tedy samodružným bodem zobrazení $\Phi^{\Psi} = \Psi^{-1}\Phi\Psi$.

Označíme-li zobrazení $\Psi^{-1}\Phi\Psi = \Omega$, můžeme po úpravě psát $\Phi = \Psi\Omega\Psi^{-1}$. Je-li X_1 libovolný bod množiny U_1, X jeho obraz v zobrazení Ψ^{-1}, platí:

$$\begin{aligned}
&\Omega &&: X_1 \to X_1\,,\\
&\Psi^{-1} &&: X_1 \to X\,,\\
&\Psi &&: X \to X_1\,,\\
&\Phi &&: X \to X\,.
\end{aligned}$$

Každý samodružný bod zobrazení $\Psi^{-1}\Phi\Psi$ vznikl tedy jako obraz jistého samodružného bodu zobrazení Φ a pomocná věta 2 je dokázána.

Pro transformaci zobrazení Φ součinem involucí Ψ, Ω platí

$$\Phi^{\Psi\Omega} = (\Phi^{\Psi})^{\Omega}\,. \tag{4}$$

Podle definice 3 je totiž $\Phi^{\Psi\Omega} = (\Psi\Omega)^{-1}\Phi(\Psi\Omega)$. Protože je podle (3) $(\Psi\Omega)^{-1} = \Omega\Psi$, je $\Phi^{\Psi\Omega} = \Omega\Psi\Phi\Psi\Omega = \Omega^{-1}\Psi^{-1}\Phi\Psi\Omega = \Omega^{-1}\Phi^{\Psi}\Omega = (\Phi^{\Psi})^{\Omega}$, cbd. Vzorec (4) lze rozšířit matematickou indukcí na libovolný počet involucí.

Základní myšlenka algebraizace geometrie, jak jsem se o ní zmínil v úvodu, záleží v tom, že přiřadíme geometrickým útvarům bod, přímka a rovina jistá involutorní zobrazení tak, že geometrické vztahy bude možno formulovat pomocí algebraických vztahů mezi těmito zobrazeními. K tomu nyní přistoupíme.

Definice 4. Je-li A libovolný bod prostoru, nazveme souměrností podle bodu A (středovou souměrností o středu A) zobrazení, ve kterém je bod A samodružný a které libovolnému bodu $X \neq A$ přiřazuje bod X_1 tak, že úsečka XX_1 má střed A.

Definice 5. Je-li a libovolná přímka prostoru, nazveme souměrností podle přímky a (osovou souměrností o ose a) zobrazení, ve kterém je každý bod přímky a samodružný a které libovolnému bodu $X \notin a$ přiřazuje bod X_1 tak, že přímka XX_1 kolmo protíná přímku a v bodě, který je středem úsečky XX_1.

Definice 6. Je-li α libovolná rovina prostoru, nazveme souměrností podle roviny α (rovinovou souměrností o rovině souměrnosti α) zobrazení, ve kterém je každý bod roviny α samodružný a které libovolnému bodu $X \notin \alpha$ přiřazuje bod X_1 tak, že přímka XX_1 protíná kolmo rovinu α v bodě, který je středem úsečky XX_1.

Z definic 2, 4, 5, 6 bezprostředně plyne

pomocná věta 3. *Libovolná středová, osová či rovinová souměrnost je involutorním zobrazením prostoru.*

Přehled o všech samodružných bodech, přímkách a rovinách uvažovaných souměrností uveďme v tabulce I., kterou lze snadno ověřit.

Tabulka I

	Množina všech samodružných bodů	Množina všech samodružných přímek	Množina všech samodružných rovin
Středová souměrnost o středu A	bod A	trs přímek o středu A	trs rovin o středu A
Osová souměrnost o ose a	přímka a	přímka a, množina všech přímek, které a kolmo protínají	svazek rovin o ose a, množina všech rovin, které kolmo protínají a
Rovinová souměrnost podle roviny α	rovina α	množina všech přímek roviny α, množina všech přímek kolmých k rovině α	rovina α, množina všech rovin kolmých k α

Protože každá z definovaných souměrností je jednoznačně určena množinou svých samodružných bodů, budeme označení této množiny užívat i k označení příslušné souměrnosti.

Tak velká písmena latinské abecedy ($A, B, C, \ldots$) budou znamenat jak body, tak i středové souměrnosti podle těchto bodů, malá písmena latinské abecedy ($a, b, c, \ldots$) budou znamenat jak přímky, tak i osové souměrnosti podle těchto přímek, malá písmena řecké abecedy ($\alpha, \beta, \gamma \ldots$) budou znamenat jak roviny, tak i souměrnosti podle těchto rovin.

Definice 7. Zobrazení prostoru se nazývá shodným zobrazením neboli shodností, jestliže libovolné různé body X, Y převádí v body X_1, Y_1 tak, že úsečka XY je shodná s úsečkou X_1Y_1.

Příklady shodných zobrazení v prostoru zřejmě udávají souměrnosti podle definic 4, 5, 6.

O shodných zobrazeních platí řada vět. Potřebné z nich budeme formulovat jako pomocné věty. Pokud jsou to věty známé, neprovádím jejich důkazy a odkazuji na Soustavu.

Pomocná věta 4. *Každé shodné zobrazení lze rozložit v konečný počet rovinových souměrností* (věta 18, str. 177 Soustavy).

Pomocná věta 5. *Libovolné shodné zobrazení Φ prostoru převádí přímku v přímku, polopřímku v polopřímku, rovinu v rovinu, polorovinu v polorovinu, poloprostor v poloprostor* (věta 15, str. 176).

O určenosti shodného zobrazení platí

pomocná věta 6. *Buďte A, B, C, D a A', K, L, M dvě čtveřice nekomplanárních bodů. Pak existuje jediná shodnost prostoru, která převádí bod A v bod A', polopřímku AB v polopřímku $A'K$, polorovinu ABC v polorovinu $A'KL$ a poloprostor $ABCD$ v poloprostor $A'KLM$.*

Tato věta má pomocný charakter jen vzhledem k cílům našeho článku. Obyčejně se chápe jako axióm (viz axióm S** 3, str. 173).

Závažným důsledkem pomocných vět 2 a 5 je

pomocná věta 7. *Transformací souměrnosti (středové, osové či rovinové) libovolným shodným zobrazením prostoru dostaneme opět souměrnost, a to téhož druhu.*

Podle dohody označovat stejně souměrnost a množinu jejich samodružných bodů (viz výše) budeme symbolem A^Ψ označovat jak středovou souměrnost $A^\Psi = \Psi^{-1}A\Psi$, tak i střed této souměrnosti, tj. podle pomocné věty 2 obraz bodu A ve shodnosti Ψ.

Analogicky symbol a^Ψ znamená jednak osovou souměrnost $\Psi^{-1}a\Psi$, jednak její osu, tj. obraz přímky a ve shodnosti Ψ.

Symbol α^Ψ znamená jednak rovinovou souměrnost $\Psi^{-1}\alpha\Psi$, jednak obraz roviny α ve shodnosti Ψ.

Zkoumejme v dalším otázku, za jaké geometrické situace jsou součiny několika involucí involucemi (neboli podle pomocné věty 1, kdy je násobení involucí komutativní).

a) Nechť α, β jsou libovolné různé rovinové souměrnosti, pro které platí $\alpha\beta = \beta\alpha$. Po vynásobení této rovnosti souměrností α zprava dostáváme $\alpha\beta\alpha = \beta$.

Protože $\alpha = \alpha^{-1}$, je

$$\alpha\beta\alpha = \alpha^{-1}\beta\alpha = \beta^{\alpha}.$$

Platí tedy

$$\beta^{\alpha} = \beta.$$

To znamená, že β je samodružná rovina rovinové souměrnosti α. Protože je $\alpha \neq \beta$, je podle tabulky I $\alpha \perp \beta$.

Je-li $\alpha \perp \beta$, ukážeme, že $\alpha\beta = o$, kde $o = \alpha \cap \beta$. Zvolme čtyři nekomplanární body $A \in o$, $B \in o$, $C \in \alpha\ (C \notin \beta)$, $D \in \beta\ (D \notin \alpha)$. Protože obrazy těchto bodů ve shodnostech $\alpha\beta$ a o splývají, je podle pomocné věty 6 $\alpha\beta = o$. Kolmost rovin α, β je tedy nejen nutná, ale i postačující podmínka involutornosti součinu $\alpha\beta$ a platí

věta 1. *Roviny* α, β *jsou k sobě kolmé, právě když platí:* $\alpha \neq \beta$, $\alpha\beta = \beta\alpha$. *Shodnost* $\alpha\beta$ *je osovou souměrností podle přímky* $o = \alpha \cap \beta$.

Libovolnou osovou souměrnost o *lze psát ve tvaru* $o = \alpha\beta$, *kde* α, β *jsou rovinové souměrnosti podle navzájem kolmých rovin* α, β *svazku* $\{o\}$. *Jednu z nich lze volit ve svazku* $\{o\}$ *libovolně, druhá je jednoznačně určena.*

Před zkoumáním involutornosti součinu tří rovinových souměrností dokážeme

pomocnou větu 8. *Samodružnými body shodnosti* $\alpha\beta\ (\alpha \neq \beta)$ *jsou všechny body průniku* $\alpha \cap \beta$ *a žádné jiné.*

Je-li $\alpha\beta \neq \beta\alpha$, $\alpha \cap \beta = o$, *má shodnost* $\alpha\beta$ *jedinou samodružnou přímku* o.

Důkaz. Že každý bod průniku $\alpha \cap \beta$ je samodružný, je zřejmé. Ukažme, že jiné samodružné body shodnost $\alpha\beta$ mít nemůže. Pro samodružný bod A shodnosti $\alpha\beta$ platí $A^{\alpha\beta} = A$, tj. podle definice 3 $(\alpha\beta)^{-1}A\alpha\beta = A$. Podle (3) dostaneme po úpravě $A^{\alpha} = A^{\beta}$. Je-li $A^{\alpha} = A_1 \neq A$, $A^{\beta} = A_1$, je $\alpha = \beta$ ve sporu s předpokladem. Možnost $A^{\alpha} = A^{\beta} = A$ znamená $A \in \alpha \cap \beta$, a prvá část věty je tedy dokázána.

Nechť přímka p je samodružnou přímkou shodnosti $\alpha\beta$. Potom platí $p^{\alpha\beta} = p$. Analogicky jako v předchozím odstavci dospějeme ke vztahu $p^{\alpha} = p^{\beta}$. Buď je $p^{\alpha} = p^{\beta} = p$, nebo je $p^{\alpha} = p^{\beta} = p_1 \neq p$. V prvém případě máme podle tabulky I možnosti

1) $p \in \alpha$,
2) $p \perp \alpha$,
3) $p \in \beta$,
4) $p \perp \beta$.

Možnosti 1, 3 dávají výsledek $p = o$, možnost 1, 4 a 2, 3 znamenají $\alpha \perp \beta$, a nemohou tedy v důsledku předpokladu $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ nastat. Možnosti 2, 4 jsou vyloučeny předpokladem $\alpha \cap \beta = o$.

V druhém případě je α rovina, která půlí úhel nebo pás přímek p, p_1 a je kolmá k jejich rovině. Protože i β má tuto vlastnost, musí být buď $\alpha = \beta$, nebo $\alpha \perp \beta$; druhý případ je tedy vyloučen.

Důsledkem právě dokázané pomocné věty je tvrzení:

Rovnost $\alpha\beta = \gamma$ *není pro žádné tři roviny možná.*

Zobrazení $\alpha\beta$ je totiž buď identita, nebo má podle pomocné věty 8 přímku či prázdnou množinu samodružných bodů, γ má rovinu samodružných bodů.

b) Hledejme nutné a postačující podmínky involutornosti součinu tří různých rovinových souměrností.

Nechť pro roviny α, β, γ platí: $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma$,

$$\alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha . \tag{5}$$

Buď nemají žádné dvě z rovin α, β, γ společnou přímku (náležejí tedy nevlastnímu svazku), nebo existuje společná přímka, např. $a = \alpha \cap \beta$. Potom platí $a^\alpha = a$, $a^\beta = a$, $a^{\alpha\beta} = a$. Podle (4) tak dostaneme $a^{\alpha\beta\gamma} = (a^{\alpha\beta})^\gamma = a^\gamma$. Označíme-li $a^\gamma = a_1$, je $a^{\alpha\beta\gamma} = a_1$. Z (5) plyne $a^{\alpha\beta\gamma} = a^{\gamma\beta\alpha} = a_1$. Podle (4) platí $a^{\gamma\beta\alpha} = (a^\gamma)^{\beta\alpha} = a_1^{\beta\alpha} = a_1$.

Je-li $\alpha\beta \neq \beta\alpha$, je podle pomocné věty 8 $a_1 = a$. Platí tedy $a^\gamma = a$. Podle tabulky I to znamená buď $a \in \gamma$, nebo $a \perp \gamma$. Je-li $a \perp \gamma$, existuje bod $P \in \alpha \cap \gamma$, $P \notin a$ tak, že platí

$$P^{\alpha\beta\gamma} = (P^\beta)^\gamma .$$

Protože je $a \perp \gamma$, je $\beta \perp \gamma$ a pro obraz $P_1 = P^\beta$ platí

$$P_1^\gamma = P_1 .$$

Je tedy $P^{\gamma\beta\alpha} = (P^\beta)^\alpha = P_1^\alpha = P_1$. Podle tabulky I to znamená $P_1 \in \alpha$. Podle definice 5 je přímka PP_1 kolmá k rovině β, a tedy $\alpha \perp \beta$ ve sporu s předpokladem $\alpha\beta \neq \beta\alpha$. Musí tedy nastat případ $a \in \gamma$.

Je-li $\alpha\beta = \beta\alpha$, je $\alpha\beta = a$ podle části a) a vztah (5) lze psát ve tvaru

$$a\gamma = \gamma a .$$

To znamená $a\gamma a = \gamma$ čili $\gamma^a = \gamma$.

Podle tabulky I je buď $a \in \gamma$, nebo $a \perp \gamma$. Prvá možnost vede k výsledku, který jsme už odvodili, druhá říká, že roviny α, β, γ jsou po dvou k sobě kolmé.

Tím jsme dokázali:

Jsou-li α, β, γ po dvou od sebe různé roviny a $\alpha\beta\gamma$ je involucí, nastane nutně jedna z těchto možností:

1. α, β, γ náleží vlastnímu svazku,
2. α, β, γ náleží nevlastnímu svazku,
3. α, β, γ náleží trsu a jsou po dvou k sobě kolmé.

Ukažme, že každá z těchto podmínek je postačující podmínkou involutornosti součinu $\alpha\beta\gamma$.

1. Nechť roviny α, β, γ náleží témuž vlastnímu svazku o ose o. Označme obraz roviny α ve shodnosti $\alpha\beta\gamma$ α_1. Rovina α_1 zřejmě patří svazku $\{o\}$. Volme body

$A \in o$, $B \in o$, $(A \neq B)$, $C \in \alpha$, $(C \notin \alpha_1)$, $D \notin \alpha$. Ve shodnosti $\alpha\beta\gamma$ přejde $A \to A$, $B \to B$, $C \to C_1 \in \alpha_1$, $D \to D_1$. Existuje rovina δ, která půlí úhel polorovin ABC, ABC_1. V rovinové souměrnosti δ platí:

$$A \to A\,,$$
$$B \to B\,,$$
$$\text{polopřímka } AB \to \text{polopřímky } AB\,,$$
$$\text{polorovina } ABC \to \text{poloroviny } ABC_1\,.$$

Jestliže převádí δ i poloprostor $ABCD$ do poloprostoru ABC_1D_1, platí podle pomocné věty 6 $\alpha\beta\gamma = \delta$ a shodnost $\alpha\beta\gamma$ je involuce.

Kdyby přešel poloprostor $ABCD$ v rovinové souměrnosti δ do poloprostoru k ABC_1D_1 opačného, přešel by poloprostor $ABCD$ do poloprostoru ABC_1D_1 v zobrazení $\alpha\delta$. Podle pomocné věty 6 by tedy platilo $\alpha\beta\gamma = \alpha\delta$. To by znamenalo $\beta\gamma = \delta$. Tento výsledek však nemůže nastat podle důsledku pomocné věty 8.

Náleží-li tedy roviny α, β, γ témuž svazku, je $\alpha\beta\gamma$ involucí.

2. Jestliže roviny α, β, γ náleží témuž nevlastnímu svazku, lze ukázat analogicky jako v případě 1., že $\alpha\beta\gamma = \delta$. (Rovina δ půlí ovšem vrstvu $\alpha\alpha_1$.)

3. Nechť roviny $\alpha\beta\gamma$ náleží trsu $\{A\}$ a jsou po dvou k sobě kolmé. Zvolme čtyři nekomplanární body A, $B \in \alpha \cap \beta$, $C \in \beta \cap \gamma$, $D \in \alpha \cap \gamma$. Zřejmě jak středová souměrnost A, tak i shodnost $\alpha\beta\gamma$ převádí body A, B, C, D do týchž obrazů A, B_1, C_1, D_1 a podle pomocné věty 6 je $\alpha\beta\gamma = A$. I v tomto případě je součin $\alpha\beta\gamma$ involucí.

Shrnutím předchozích výsledků dostáváme

větu 2. *Roviny α, β, γ náleží témuž svazku (vlastnímu či nevlastnímu), právě když platí $\alpha\beta\gamma = \delta$. Rovina δ náleží svazku rovin α, β, γ.*

a **větu 3.** *Roviny α, β, γ náleží témuž trsu a jsou po dvou k sobě kolmé, právě když platí $\alpha\beta\gamma = A$. Bod A je střed trsu.*

Libovolnou středovou souměrnost A lze psát ve tvaru $A = \alpha\beta\gamma$, kde α, β, γ jsou po dvou k sobě kolmé roviny trsu $\{A\}$. Dvě z nich lze volit v trsu $\{A\}$ k sobě kolmo libovolně, třetí je jednoznačně určena.

Jak involutornost součinu dvou rovinových souměrností v případě a), tak involutornost součinu tří rovinových souměrností v případě b) vedly k vyjádření jistých geometrických vztahů algebraicky. Vedeni těmito výsledky probereme involutornost součinu dalších involucí.

c) Nechť a, b jsou různé osové souměrnosti, pro které platí $ab = ba$. Po úpravě dostaneme odtud $b^a = b$, tj. b je samodružná přímka osové souměrnosti a. Podle tabulky I to znamená, že přímka b kolmo protíná přímku a.

Tato podmínka je skutečně i postačující podmínkou involutornosti součinu ab. Označme rovinu přímek a, b α a rozložme souměrnosti a, b podle věty 1. Pro součin ab tak dostaneme

$$ab = (\beta\alpha)\,(\alpha\gamma) = \beta(\alpha\alpha)\gamma = \beta\gamma = c\,,$$

kde $c = \beta \cap \gamma$, $c \perp \alpha$.

Platí tedy

věta 4. *Přímky a, b jsou k sobě kolmé různoběžné přímky, právě když platí $ab = c$. Přímka c prochází společným bodem přímek a, b a je kolmá k jejich rovině.*

d) Nechť A, α jsou středová a rovinová souměrnost, pro které platí $A\alpha = \alpha A$. Výsledek $\alpha^A = \alpha$ znamená podle tabulky I $A \in \alpha$. Tato podmínka je i postačující podmínkou involutornosti součinu $A\alpha$. Rozložíme-li A podle věty 3, máme

$$A\alpha = (\beta\gamma\alpha)\alpha = \beta\gamma = a\,.$$

Přímka a je podle věty 1 kolmá k rovině α a prochází bodem A.
Tím je dokázána

věta 5. *Bod A je incidentní s rovinou α, právě když platí $A\alpha = a$. Přímka a prochází bodem A a je k rovině α kolmá.*

e) Nechť a, α jsou osová a rovinová souměrnost, pro které platí $a\alpha = \alpha a$. Po úpravě máme výsledek $\alpha^a = \alpha$, který podle tabulky I znamená buď $a \in \alpha$, nebo $a \perp \alpha$. Každá z těchto podmínek je postačující podmínkou involutornosti součinu $a\,\alpha$.

Je-li $a \in \alpha$, rozložíme a podle věty 1 a máme

$$a\alpha = (\beta\alpha)\alpha = \beta\,.$$

Rovina β prochází přímkou a a je k rovině α kolmá.

Je-li $a \perp \alpha$, dává rozklad a na rovinové souměrnosti výsledek

$$a\alpha = \beta\gamma\alpha = A,$$

neboť roviny β, γ, α splňují požadavky věty 3.

Platí tedy

věta 6. *Přímka a je incidentní s rovinou α, právě když platí $a\alpha = \beta$. Rovina β prochází přímkou a a je k rovině α kolmá.*

Přímka a je kolmá k rovině α, právě když platí $a\alpha = A$. Pro bod A platí $A = a \cap \alpha$.

f) Nechť a, A jsou osová a středová souměrnost, pro které platí $aA = Aa$. Výsledek $A^a = A$, který dostaneme po úpravě, znamená podle tabulky I, že $A \in a$. Tato podmínka je i postačující podmínkou involutornosti součinu aA. Podle věty 3 rozložíme A tak, aby $\alpha\beta = a$ a aby γ protínala a kolmo v bodě A. Potom je

$$aA = aa\gamma = \gamma$$

a zobrazení aA je involucí.

Tím jsme dokázali

větu 7. *Bod A a přímka a jsou incidentní, právě když platí $aA = \gamma$. Rovina γ protíná kolmo přímku a v bodě A.*

Souvislost geometrických a algebraických vztahů, které jsou obsahem předchozích vět, shrňme v tabulku II:

Tabulka II

Geometrický vztah		Algebraické vyjádření
$A \in a$	$\Leftrightarrow$	$aA = Aa$
$A \in \alpha$	$\Leftrightarrow$	$A\alpha = \alpha A$
$a \in \alpha$	$\Leftrightarrow$	$a\alpha = \beta$
$\alpha \perp \beta$	$\Leftrightarrow$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
$a \perp \alpha$	$\Leftrightarrow$	$a\alpha = A$
a kolmo protíná b	$\Leftrightarrow$	$ab = ba$
α, β, γ náleží svazku	$\Leftrightarrow$	$\alpha\beta\gamma = \delta$
α, β, γ jsou po dvou k sobě kolmé	$\Leftrightarrow$	$\alpha\beta\gamma = A$

KLASIFIKACE SHODNÝCH ZOBRAZENÍ PROSTORU

Podle pomocné věty 4 lze každou shodnost prostoru vyjádřit jako součin konečného počtu rovinových souměrností. Pro provedení klasifikace shodností bude účelné ukázat, že počet rovinových souměrností z rozkladu lze redukovat na čtyři. Odvoďme nyní několik pomocných vět, které dovolí provést příslušnou redukci.

Z věty 2 bezprostředně vyplývá

pomocná věta 9.

Jsou dány roviny α, β *a bod* X. *Existuje rovina* ξ *incidentní s bodem* X *a rovina* η *tak, že platí* $\alpha\beta = \xi\eta$.

Pomocná věta 10. *Jsou-li* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *čtyři roviny trsu o středu* S, *existují roviny* ξ, η *tohoto trsu tak, že platí* $\alpha\beta\gamma\delta = \xi\eta$.

Důkaz. a) Jestliže roviny $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ náleží témuž svazku, platí podle věty 2 $\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\beta\gamma)\delta = \xi\delta$.

b) Jestliže roviny $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nenáleží témuž svazku, náleží dvěma různým vlastním svazkům (neboť mají společný bod S). Osu svazku rovin α, β označme a, osu svazku rovin γ, δ označme b. Přímky a, b jsou zřejmě různé, a určují tedy jedinou rovinu; označme ji ω. Rovina ω náleží jak svazku $\{a\}$, tak i svazku $\{b\}$; podle věty 2 platí $\alpha\beta\omega = \xi$, $\omega\gamma\delta = \eta$. Pro součin $\alpha\beta\gamma\delta$ tak dostáváme

$$\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\beta\omega)(\omega\gamma\delta) = \xi\eta\,.$$

Pomocná věta 11. *Součin libovolných pěti rovinových souměrností je roven součinu jistých tří rovinových souměrností.*

Důkaz. Označme Φ součin libovolných pěti rovinových souměrností $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ a zvolme v rovině α bod S. Podle pomocné věty 9 platí

$$\beta\gamma = \beta_1\gamma_1, \quad S \in \beta_1\,,$$

$$\gamma_1\delta = \gamma_2\delta_1, \quad S \in \gamma_2 ,$$
$$\delta_1\varepsilon = \delta_2\varepsilon_1, \quad S \in \delta_2 .$$

Pro Φ tak dostaneme $\Phi = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \alpha\beta_1\gamma_2\delta_2\varepsilon_1$. Protože α, β_1, γ_2, δ_2 náleží trsu $\{S\}$, je podle pomocné věty 10 $\alpha\beta_1\gamma_2\delta_2 = \varrho\sigma$ a

$$\Phi = \varrho\sigma\varepsilon_1 .$$

Věta 8. *Libovolnou shodnost prostoru lze vyjádřit ve tvaru součinu nejvýše čtyř rovinových souměrností.*

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Věta je zřejmě splněna, je-li $\Phi_1 = \alpha$, $\Phi_2 = \alpha\beta$, $\Phi_3 = \alpha\beta\gamma$, $\Phi_4 = \alpha\beta\gamma\delta$. Předpokládejme, že platí pro jisté n. Dokážeme, že platí i pro $n + 1$. Nechť $\Phi_{n+1} = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\alpha_{n+1}$. Podle indukčního předpokladu je součin $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ roven součinu nejvýše čtyř rovinových souměrností. Je-li tento počet menší než čtyři, je tvrzení věty pro Φ_{n+1} správné. Je-li $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, aplikujeme na shodnost $\Phi_{n+1} = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\alpha_{n+1}$ pomocnou větu 11 a dostáváme rovněž tvrzení věty.

Analogicky lze dokázat

pomocnou větu 12. *Lze-li shodnost Φ_1 vyjádřit ve tvaru součinu sudého počtu rovinových souměrností, lze ji vyjádřit ve tvaru součinu čtyř rovinových souměrností.*

Lze-li shodnost Φ_2 vyjádřit ve tvaru součinu lichého počtu rovinových souměrností, lze ji vyjádřit ve tvaru součinu tří rovinových souměrností.

Pomocná věta 13. *Libovolná shodnost Φ_1, kterou lze vyjádřit ve tvaru součinu sudého počtu rovinových souměrností, je různá od každé shodnosti Φ_2, kterou lze vyjádřit ve tvaru součinu lichého počtu rovinových souměrností.*

Důkaz. Podle pomocné věty 12 platí $\Phi_1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\Phi_2 = \beta_1\beta_2\beta_3$. Z rovnosti $\Phi_1 = \Phi_2$ dostaneme po úpravě $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_3 = \beta_1\beta_2$. Podle pomocné věty 11 je $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_3 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Proto platí $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\beta_2\beta_1 = \mathrm{I}$. Opětovaná redukce levé strany podle pomocné věty 11 znamená, že existují roviny δ_1, δ_2, δ_3 tak, že platí $\delta_1\delta_2\delta_3 = \mathrm{I}$ neboli $\delta_1\delta_2 = \delta_3$. Taková rovnost však není možná podle důsledku pomocné věty 8.

Pomocná věta 11 zaručuje smysl

definice 8. Shodnost, kterou lze vyjádřit ve tvaru součinu sudého počtu rovinových souměrností, se nazývá shodností přímou. Shodnost, kterou lze vyjádřit ve tvaru součinu lichého počtu rovinových souměrností, se nazývá shodností nepřímou.

Pro nepřímé shodnosti platí důležitá

věta 9. *Libovolnou nepřímou shodnost Φ lze vyjádřit ve tvaru součinu souměrnosti podle přímky a souměrnosti podle roviny.*

Důkaz. Podle pomocné věty 12 je $\Phi = \alpha\beta\gamma$. Zvolme v rovině γ bod P. Podle pomocné věty 9 platí $\Phi = \alpha_1\beta_1\gamma$ tak, že $P \in \beta_1$. Roviny γ, β_1 patří tedy jistému vlastnímu svazku o ose h. V tomto svazku existuje rovina $\lambda \perp \alpha_1$. Shodnost Φ můžeme pak vyjádřit podle vět 1 a 2 ve tvaru

$$\Phi = \alpha_1(\lambda\lambda)\,\beta_1\gamma = (\alpha_1\lambda)\,(\lambda\beta_1\gamma) = p\varepsilon .$$

Pomocná věta 14. *Protínají-li přímky a, b, c kolmo přímku p, existuje přímka d, která rovněž přímku p kolmo protíná tak, že platí abc = d.*

Důkaz. Sestrojme roviny α, β, γ svazku $\{p\}$, které po řadě obsahují přímky a, b, c a roviny α_1, β_1, γ_1 nevlastního svazku, které rovněž obsahují po řadě přímky a, b, c a jsou kolmé k přímce p. Z konstrukce je zřejmé, že libovolná rovina vlastního svazku $\{p\}$ je kolmá k libovolné rovině uvažovaného nevlastního svazku. Proto platí podle věty 1: $\alpha_1\beta = \beta\alpha_1$, $\beta_1\gamma = \gamma\beta_1$, $\alpha_1\gamma = \gamma\alpha_1$. Pro součin abc dostaneme tak po úpravě $abc = (\alpha\alpha_1)(\beta\beta_1)(\gamma\gamma_1) = (\alpha\beta\gamma)(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$. Podle věty 2 však je $\alpha\beta\gamma = \delta, \alpha_1\beta_1\gamma_1 = \delta_1$. Zřejmě je $\delta \perp \delta_1$ a $abc = \delta\delta_1 = d$. Přímka d přitom kolmo protíná přímku p.

O přímých shodnostech dokážeme

větu 10. *Libovolnou přímou shodnost Φ lze vyjádřit ve tvaru součinu souměrností podle dvou přímek.*

Důkaz. Shodnost Φ vyjádříme postupně ve tvaru součinu osových souměrností:

a) podle tří přímek a, b, c, z nichž dvě jsou různoběžné,

b) podle tří přímek n, o, p, z nichž dvě (např. n, o) jsou různoběžné a dvě (např. o, p) kolmo protínají jistou přímku,

c) podle dvou přímek g, h.

a) Podle pomocné věty 12 je $\Phi = \alpha\beta\gamma\delta$. Podle věty 9 je $\alpha\beta\gamma = a\varepsilon$ a pro Φ dostáváme $\Phi = a\varepsilon\delta$. Libovolným bodem $O \in a$ sestrojme nejprve podle pomocné věty 9 rovinu ε_1 tak, aby $\Phi = a\varepsilon_1\delta_1$, a dále rovinu $\lambda \perp \varepsilon_1, \delta_1$. Potom platí podle věty 1 $\Phi = a\varepsilon_1(\lambda\lambda)\,\delta_1 = a(\varepsilon_1\lambda)(\lambda\delta_1) = abc$, kde $b = \varepsilon_1\lambda$, $c = \lambda\delta_1$. Různoběžné přímky a, b incidentní s bodem O určují jistou rovinu ω.

b) Bodem O veďme jednak přímku l, která kolmo protíná přímku c, jednak rovinu $\pi \perp l$. Roviny π, ω mají společný bod O, a jsou tedy buď různoběžné, nebo splývají. V prvém případě existuje přímka $m = \pi \cap \omega$, $m \perp l$ a podle pomocné věty 14 platí $abm = n\,(O \in n)$. Dále je podle věty 4 $ml = o$, $lc = p$. Pro Φ tak máme $\Phi = abc = (abm)(ml)(lc) = nop$. Přitom n, o jsou různoběžné, o, p protínají l kolmo.

V případě $\pi = \omega$ je $a, b \perp l$ a tvrzení věty ověříme přímo podle pomocné věty 14.

c) Kolmice q k přímkám n, l v bodě O splňuje spolu s přímkami o, p předpoklady pomocné věty 14, a proto platí $qop = h$. Podle věty 4 je $nq = g$ a pro Φ máme výsledek

$$\Phi = nop = (nq)(qop) = gh\,.$$

Množina G všech shodností prostoru se rozpadá podle pomocné věty 13 na disjunktní podmnožiny: množinu G_p všech shodností přímých a množinu G_n všech shodností nepřímých.

Množinu G_p rozdělme na podmnožiny

G_1 (množina obsahující shodnost $\Phi_1 = gh = \mathrm{I}$, $g = h$),
G_2 (množina obsahující shodnosti $\Phi_2 = gh$, $g \parallel h$, $g \neq h$),
G_3 (množina obsahující shodnosti $\Phi_3 = gh$, g je různoběžná s h),
G_4 (množina obsahující shodnosti $\Phi_4 = gh$, g je mimoběžná s h).

Množinu G_n rozdělme na podmnožiny

G_5 (množina obsahující shodnosti $\Phi_5 = p\varepsilon = \alpha$, podle věty 6, je-li $p \in \varepsilon$),
G_6 (množina obsahující shodnosti $\Phi_6 = p\varepsilon$, je-li $p \parallel \varepsilon$, $p \notin \varepsilon$),
G_7 (množina obsahující shodnosti $\Phi_7 = p\varepsilon$, je-li p různoběžná s ε).

Z diskuse o samodružných bodech shodností z jednotlivých podmnožin vyplývá, že jsou tyto podmnožiny po dvou disjunktní. Proto má smysl

definice 9. Jsou-li g, h rovnoběžné různé přímky, nazývá se shodnost gh posunutím v prostoru.

Jsou-li g, h různoběžné přímky, nazývá se shodnost gh otočením kolem přímky v prostoru.

Jsou-li g, h mimoběžné přímky, nazývá se shodnost gh šroubovým pohybem v prostoru.

Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou ε, ve které neleží, nazývá se shodnost $p\varepsilon$ posunutou souměrností v prostoru.

Je-li přímka p různoběžná s rovinou ε, nazývá se shodnost $p\varepsilon$ otočenou souměrností v prostoru.

Výsledky předchozích úvah shrňme ve

větu 11. *Existuje sedm druhů shodností v prostoru.*

Přímé shodnosti jsou: 1. *identita,*
2. *posunutí v prostoru,*
3. *otočení kolem přímky v prostoru,*
4. *šroubový pohyb.*

Nepřímé shodnosti jsou: 5. *souměrnost podle roviny,*
6. *posunutá souměrnost,*
7. *otočená souměrnost.*

Tradiční názvy jednotlivých druhů shodností souvisí ovšem s jejich vlastnostmi. Toto detailní zkoumání nebudeme provádět. Z věty 11 rovněž snadno vyplývá, že involutorní shodnosti podle definic 4, 5, 6 jsou všechny možné involutorní shodnosti prostoru. Souměrnost podle přímky patří mezi otočení v prostoru, souměrnost podle bodu je otočenou souměrností.

Expozimetr s hledáčkem

vyrábí japonská firma Minolta. Expozimetr má zorný úhel 9° a hodí se zejména pro snímky proti světlu. Má odporovou fotonku z CdS, možnost měření barevné teploty, zařízení pro zkoušení vlastní baterie, velký rozsah použitelnosti. Stojí podle toho — 55 dolarů.

Sk

Fotografickou emulzi s deriváty polyvinylchloridu

místo želatiny vyvinuli leningradští vědci. Je průhlednější a trvanlivější než želatinová a snese zpracování ve vroucích roztocích; zpráva se však nezmiňuje o její citlivosti.

Sk