Ján Mozer

Итерации формулы Римана-Зигеля сохраняюшие множество нулей и кратностей нулей функции $Z(t)$

Mathematica Slovaca, Vol. 44 (1994), No. 2, 213--223

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136609`

Math. Slovaca, **44** (1994), No. 2, 213–223

Mathematica Slovaca
©1994
Mathematical Institute
Slovak Academy of Sciences

Dedicated to Academician Štefan Schwarz
on the occasion of his 80th birthday

ИТЕРАЦИИ ФОРМУЛЫ РИМАНА-ЗИГЕЛЯ СОХРАНЯЮЩИЕ МНОЖЕСТВО НУЛЕЙ И КРАТНОСТЕЙ НУЛЕЙ ФУНКЦИИ $Z(t)$

ЯН МОЗЕР[1]

(*Communicated by Stanislav Jakubec*)

ABSTRACT. The amplitude-frequency iterations of the Riemann-Siegel formula are defined. The set of the zeros of the function $Z(t)$ and the set of their multiplicities are invariant under these iterations.

Введение

В предлагаемой работе изучается бесконечный класс нелинейных колебаний, который порождают итерации формулы Римана-Зигеля

$$Z(t) = 2\cos\vartheta(t) + X(t) + R(t)\,, \tag{1}$$

где

$$X(t) = 2\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\{\vartheta(t) - t\ln n\}\,, \qquad m = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right], \qquad R(t) = O\left(t^{-1/4}\right),$$

$$Z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta(t)}\,\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,t\right), \qquad \vartheta(t) = -\frac{t}{2}\ln\pi + \mathrm{Im}\left\{\ln\Gamma\left(\frac{1}{4} + \mathrm{i}\,\frac{t}{2}\right)\right\}.$$

AMS Subject Classification (1991): Primary 11M06.
Key words: Riemann-Siegel formula, amplitude-frequency iteration, zero of $Z(t)$, multiplicity of the zero of $Z(t)$, Hardy-Littlewood hypothesis.
[1] Supported by Grant GA-SAV 363 .

Итерации соответствуют преобразованиям типа

$$n \to n + f\left[Z(t)\right] \tag{2}$$

($f(u)$ – непрерывная функция) параметров $n = 2, 3, \dots, m$ формулы Римана-Зигеля. Процесс последовательных итераций приводит нас к бесконечному классу преобразований (возмущений) функции $Z(t)$:

$$Z(t) \to Z\left[t, W\big(t, g(t)\big)\right], \qquad t \in (T, T+U), \quad U = T^{1/2+\varepsilon}, \tag{3}$$

где ε – сколь угодно малое положительное число и $g(t) = \big(g_1(t), \dots$ $\dots, g_N(t)\big)$ принадлежит бесконечному классу допустимых вектор-функций.

Основным результатом является теорема: множество состоящее из нулей и кратностей нулей функции $Z(t)$ является инвариантным множеством относительно некоторого бесконечного класса непрерывных преобразований (3).

Дело в том, что возмущение $Z[t, W]$ обладает следующими свойствами:

(а) на объединении малых окрестностей нулей $t = \gamma \in (T, T+U)$ функции $Z(t)$ оно допускает факторизацию

$$Z[t, W] = Z(t) \prod_{r=1}^{N} \big(1 + h_r(t)\big),$$

где $h_r(t)$ – малые слагаемые, т.е. на этом множестве (3) представляет собой преобразование подобия функции $Z(t)$;

(б) $Z[t, W] \neq 0$ на дополнении (относительно $(T, T+U)$) множества из (а).

В работе далее показано, что вопрос о справедливости гипотезы Харди и Литтлвуда (1918 г.) о расстоянии соседних нулей нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)$ связан с вопросом о существовании некоторого «оптимального» возмущения $Z\left[t, W\big(t, \overset{*}{g}(t)\big)\right]$.

1. Формулировка теоремы

Достаточно ограничиться например интервалом $(T, T+U)$, $U = T^{1/2+\varepsilon}$, относительно которого справедлива теорема о среднем Харди, Литтлвуда и Ингама:

$$\int_T^{T+U} Z^2(t)\,\mathrm{d}t = U \ln \frac{T}{2\pi} + cU + O\big(T^{1/2+\varepsilon/2}\big)$$

(c – постоянная Эйлера). Пусть

$$g_r(t)\,, \qquad r = 1, \dots, N\,, \quad N = \big[T\psi(T)\big]$$

– непрерывные функции удовлетворяющие условию

$$|g_r(t)| \leqq 1\,, \qquad t \in (T, T+U)\,,$$

и $\psi(T)$ – сколь угодно медленно возрастающая к ∞ функция при $T \to \infty$. Мы положим

$$S_1 = S_1(T) = \big\{t:\ |Z(t)| < 1\big\}\,, \qquad \tilde{Z}_1(t) = \begin{cases} Z(t)\,, & t \in S_1\,, \\ 1\,, & t \in \bar{S}_1\,, \end{cases}$$

$$w_1(t) = \frac{1}{N} g_1(t) \tilde{Z}_1(t)$$

($S_1 \cup \bar{S}_1 = (T, T+U)$) и определим класс функций (см. (1))

$$[Z_1]: \quad Z_1(t) = Z\big[t, w_1(t)\big]$$

$$= 2\cos\vartheta(t) + 2\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{n + w_1(t)}} \cos\big\{\vartheta(t) - t\ln\big(n + w_1(t)\big)\big\} + R(t)\,.$$

Если уже определен класс

$$[Z_r]: \quad Z_r(t) = Z\big[t, W_r(t)\big]\,,$$

$$W_r(t) = \sum_{k=1}^{r} w_k(t)\,, \qquad w_k(t) = \frac{g_k(t)\tilde{Z}_k(t)}{N}\,,$$

то мы положим

$$S_{r+1} = \big\{t:\ |Z_r(t)| < 1\big\}\,, \qquad \tilde{Z}_{r+1} = \begin{cases} Z_r\,, & t \in S_{r+1}\,, \\ 1\,, & t \in \bar{S}_{r+1}\,, \end{cases} \qquad w_{r+1} = \frac{g_{k+1}\tilde{Z}_{k+1}}{N}$$

и определим класс функций

$$[Z_{r+1}]: \quad Z_{r+1}(t) = Z\big[t, W_r(t) + w_{r+1}(t)\big], \qquad t \in (T, T+U).$$

Следовательно, бесконечному классу допустимых векторов $g(t) = \big(g_1(t), \ldots, g_N(t)\big)$ мы сопоставляем последовательность бесконечных классов функций $[Z_1], \ldots, [Z_N]$. Основным для нас будет класс функций ($W_N = W$)

$$Z_N(t) = Z\big[t, W(t)\big], \qquad W(t) = W\big(t, g(t)\big) = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} g_r(t)\tilde{Z}_r(t). \tag{4}$$

где очевидно $|W(t)| \leqq 1$, $t \in (T, T+U)$.

Величины ($\vartheta' \sim \ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}}$)

$$\frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big\{\vartheta(t) - t\ln n\big\} = \vartheta'(t) - \ln n \sim \ln\frac{P}{n};$$

$$P = \sqrt{\frac{T+U}{2\pi}}, \qquad T \to \infty,$$

представляют собой амплитуду и круговую частоту осциллятора Римана

$$\frac{2}{\sqrt{n}}\cos\big\{\vartheta(t) - t\ln n\big\}, \qquad n = 2, \ldots, m.$$

З а м е ч а н и е 1. С точки зрения теоретической радиотехники преобразование (3), (4), сводящееся к изменению амплитуды и частоты осциллятора Римана, естественно назвать амплитудно-частотной модуляцией формулы Римана-Зигеля. Приводят ли итерации $Z\big[t, W\big(t, g(t)\big)\big]$ к динамическому хаосу?

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *При всех достаточно больших $T > 0$:*

(a) *множества нулей функций*

$$Z(t), \quad Z\big[t, W\big(t, g(t)\big)\big]; \qquad t \in (T, T+U), \quad U = T^{1/2+\varepsilon}, \tag{5}$$

совпадают для бесконечного класса непрерывных функций W (см. (4)), т.е. нули $t = \gamma \in (T, T+U)$ функции $Z(t)$ являются неподвижными точками непрерывных преобразований (3), (4);

(б) *множества кратностей нулей функций* (5) *совпадают для бесконечного класса непрерывных функций* W, *достаточно гладких в окрестностях нулей функции* $Z(t)$.

Замечание 2. По этой теореме множество нулей функции $Z(t)$, $t \in (T, T+U)$, и множество кратностей нулей являются инвариантами относительно некоторого бесконечного класса преобразований (3), (4).

2. Лемма о разности соседних членов последовательности $Z(t), Z_1(t), \dots, Z_n(t)$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Для любого допустимого фиксированного вектора* $g(t) = \big(g_1(t), \dots, g_N(t)\big)$ *имеет место:*

$$\begin{aligned} &Z_{r+1}(t) - Z_r(t) = \frac{g_{r+1}(t)\tilde{Z}_{r+1}(t)}{\psi(T)} F_r(t, W_r, w_{r+1}), \\ &F_r = O(1), \quad r = 0, 1, \dots, N-1, \qquad T \to \infty; \qquad Z_0(t) = Z(t), \end{aligned} \tag{6}$$

где F_r – *аналитическая функция своих аргументов.*

Доказательство. Используем формулы (см. (1) и п. 1)

$$\begin{aligned} Z_r(t) &= 2\cos\vartheta(t) + 2\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{n+W_r}} \cos\big\{\vartheta(t) - t\ln(n+W_r)\big\} + R(t), \\ Z_{r+1}(t) &= 2\cos\vartheta(t) + 2\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{n+W_{r+1}}} \cos\big\{\vartheta(t) - t\ln(n+W_{r+1})\big\} + R(t), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$W_{r+1} = W_r + w_{r+1}, \qquad w_{r+1} = \frac{1}{N} g_{r+1}(t)\tilde{Z}_{r+1}(t),$$

$$t\ln(n+W_{r+1}) = t\ln(n+W_r) + t\ln\left(1 + \frac{w_{r+1}}{n+W_r}\right) = t\ln(n+W_r) + Y_{n,r},$$

и разложения в ряды. Прежде всего

$$Y_{n,r} = \frac{t w_{r+1}}{n+W_r} F^1_{n,r}\left(\frac{w_{r+1}}{n+W_r}\right) = \frac{g_{r+1}(t)\tilde{Z}_{r+1}(t)}{n\psi} \varphi(t) F^2_{n,r}\left(W_r, \frac{w_{r+1}}{n+W_r}\right),$$

$$\varphi(t) = \frac{t}{T - \dfrac{\alpha}{\psi}}, \quad N = [T\psi] = T\psi - \alpha, \qquad 0 \leqq \alpha < 1,$$

$$\varphi(t) = O(1), \qquad F^2_{n,r} = O(1), \qquad Y_{n,r} = O\left\{\frac{1}{n\psi(T)}\right\}.$$

Далее

$$\cos\{\vartheta - t\ln(n+W_{r+1})\} = \cos\{\vartheta - t\ln(n+W_r) - Y_{n,r}\}$$
$$= \cos\{\vartheta - t\ln(n+W_r)\} + Y_{n,r}\,F^3_{n,r}(t,W_r,w_{r+1}); \qquad F^3_{n,r} = O(1),$$
$$\frac{1}{\sqrt{n+W_{r+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n+W_r}} w_{r+1}F^4_{n,r}(W_r,w_{r+1}), \qquad F^4_{n,r} = O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big).$$

Теперь из (7) следует (6).

Замечание 3. Непрерывные функции $g_1(t),\dots,g_N(t)$ входящие в (6) через посредство W_r, w_{r+1} можно считать и нигде не дифференцируемыми функциями.

3. Доказательство теоремы

(a) Из (6), $r=0$, получаются соотношения:

$$Z_1(t) = Z(t) + \frac{g_1(t)\tilde{Z}_1(t)}{\psi t}F_0 = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\psi}\Big)\Big\}Z(t), \qquad t\in S_1(T) \tag{8}$$

и (поскольку $|Z(t)|\geqq 1$ для $t\in\bar{S}_1(T)$)

$$|Z_1(t)| \geqq |Z(t)| - \frac{A}{\psi} \geqq 1 - \frac{A}{\psi} > 0, \qquad t\in\bar{S}_1(T).$$

Отсюда следует, что множества нулей функций $Z(t)$, $Z_1(t)$ совпадают в интервале $(T,T+U)$.

Далее, из соотношений ((6), $r=1$)

$$\begin{aligned} Z_2(t) &= \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\psi}\Big)\Big\}Z_1(t), && t\in S_2(T), \\ |Z_2(t)| &\geqq 1-\frac{A}{\psi} > 0, && t\in\bar{S}_2(T), \end{aligned} \tag{9}$$

следует совпадение множеств нулей функций $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, т.е. совпадение множеств нулей функций $Z(t)$, $Z_2(t)$ в интервале $(T,T+U)$.

Продолжая это рассуждение мы в конечном счете получаем, что множества нулей функций $Z(t)$, $Z_N(t) = Z\big[t,W\big(t,g(t)\big)\big]$ совпадают в интервале $(T,T+U)$.

Замечание 4. Справедлива следующая формула (см. Лемму, ср. (8), (9))

$$\begin{gathered}Z\big[t, W\big(t, g(t)\big)\big] = Z(t) \prod_{r=1}^{N} \big(1 + h_r(t)\big), \qquad t \in \bigcap_{r=1}^{N} S_r, \\ h_r(t) = \frac{g_r(t) Z_{r-1}(t)}{\psi(T)} = O\Big(\frac{1}{\psi}\Big).\end{gathered} \tag{10}$$

(б) Пусть

$$\mu = \mu(T) = \max_{\gamma \in (T, T+U)} \{n(\gamma)\}.$$

Так как $n(\gamma) = O(\ln \gamma)$ (см. [4; стр. 209]), то $\mu < A \ln(2T) < A_1 \ln T$. Пусть $L = [A_1 \ln T] + 1$. Далее мы предположим, что функция $g_r(t)$ – L раз непрерывно дифференцируема. Теперь для нуля $\gamma \in (T, T+U)$ кратности $n(\gamma)$ из соотношений

$$Z(\gamma) = Z'(\gamma) = \cdots = Z^{(n(\gamma)-1)}(\gamma) = 0, \qquad Z^{(n(\gamma))}(\gamma) \neq 0,$$

по формуле (10) получаются соотношения

$$Z[\gamma, W] = Z'[\gamma, W] = \cdots = Z^{(n(\gamma)-1)}[\gamma, W] = 0, \qquad Z^{(n(\gamma))}[\gamma, W] \neq 0.$$

Замечание 5. Часть (а) теоремы справедлива и для бесконечного подкласса непрерывных нигде не дифференцируемых функций $g_1(t), \ldots, g_N(t)$.

4. Связь между теоремой и гипотезой Харди и Литтлвуда о нулях нечетного порядка функции $\zeta\Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,t\Big)$

Пусть $\gamma' < \gamma''$ – соседние нули нечетного порядка функции $\zeta\Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,t\Big)$. Харди и Литтлвуд [1; стр. 125] сделали следующее замечание ($N_0(T)$ обозначает число нулей функции $\zeta\Big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,t\Big)$, $t \in (0, T\rangle$):

«Мы надеялись показать, модифицируя наше доказательство, что $N_0(T) = \Omega\big(T^{1-\delta}\big)$. Но наши попытки в этом направлении до сих пор были не удачными.»

Из контекста следует (см. [1; стр. 125, 177–184], ср. [3]), что Харди и Литтлвуд стремились доказать следующую оценку

$$\gamma'' - \gamma' < A(\delta)(\gamma')^{\delta}, \qquad \gamma' \to \infty\,, \tag{11}$$

где δ – сколь угодно малое положительное число.

Замечание 6. Оценка (11) – это гипотеза Харди и Литтлвуда о нулях нечетного порядка функции $\zeta\Big(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,t\Big)$.

Пусть (см. (1), (4))

$$X\big[t, W\big(t, g(t)\big)\big] = 2\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{n+W}}\cos\big\{\vartheta(t) - t\ln(n+W)\big\}$$

и $\big\{t_\nu(\tau)\big\}$ – семейство последовательностей (см. [2]) удовлетворяющее условию

$$\vartheta\big[t_\nu(\tau)\big] = \pi\nu + \tau\,, \qquad \nu = 1, 2, \dots\,, \quad \tau \in \langle -\pi, \pi\rangle\,,$$

где $t_\nu(0) = t_\nu$ и τ – локальная координата точки из окрестности t_ν.

Связь между гипотезой Харди и Литтлвуда и свойствами бесконечного класса возмущений $Z\big[t, W\big(t, g(t)\big)\big]$ формулы Римана-Зигеля фиксирует следующее следствие.

Следствие. *Если существует вектор* $\overset{*}{g}(t) = \big(\overset{*}{g}_1(t), \dots, \overset{*}{g}_N(t)\big)$ *и значения* $\bar{\tau}_\nu \in \big\langle -\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\big\rangle$ *такие, что*

$$\begin{aligned} &\sum_{T \leqq t_{2\nu} \leqq T+H} X\big[t_{2\nu}(\bar{\tau}_{2\nu}), \overset{*}{W}\big(t_{2\nu}(\bar{\tau}_{2\nu})\big)\big] = O\Big(\frac{H\ln T}{\psi}\Big)\,, \\ &\sum_{T \leqq t_{2\nu+1} \leqq T+H} X\big[t_{2\nu+1}(\bar{\tau}_{2\nu+1}), \overset{*}{W}\big(t_{2\nu+1}(\bar{\tau}_{2\nu+1})\big)\big] = O\Big(\frac{H\ln T}{\psi}\Big)\,, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\overset{*}{W}(t) = W\big(t, \overset{*}{g}(t)\big)$, $H = T^{\delta/2}$, *то справедлива гипотеза Харди и Литтлвуда* (11).

Замечание 7. *Нерегулярное поведение бесконечного множества траекторий* $X = X\big[t, W\big(t, g(t)\big)\big]$, $t \in (T, T+U)$, *делает правдоподобным справедливость условий* (12).

Доказательство. Так как (см. (1))

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} Z\big[t_\nu(\bar\tau_\nu), \overset{*}{W}\big(t_\nu(\bar\tau_\nu)\big)\big]$$
$$= 2\sum_{t_\nu}(-1)^\nu \cos\bar\tau_\nu + \sum_{t_\nu} X\big[t_\nu(\bar\tau_\nu), \overset{*}{W}\big(t_\nu(\bar\tau_\nu)\big)\big] + O\big(T^{-1/4} H \ln T\big),$$
$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} (-1)^\nu Z\big[t_\nu(\bar\tau_\nu), \overset{*}{W}\big(t_\nu(\bar\tau_\nu)\big)\big]$$
$$= 2\sum_{t_\nu} \cos\bar\tau_\nu + \sum_{t_\nu}(-1)^\nu X\big[t_\nu(\bar\tau_\nu), \overset{*}{W}\big(t_\nu(\bar\tau_\nu)\big)\big] + O\big(T^{-1/4} H \ln T\big),$$

то (см. (12))

$$\begin{aligned} &\sum_{T \leqq t_{2\nu} \leqq T+H} Z\big[t_{2\nu}(\bar\tau_{2\nu}), \overset{*}{W}\big(t_{2\nu}(\bar\tau_{2\nu})\big)\big] = 2\sum_{t_{2\nu}} \cos\bar\tau_{2\nu} + O\Big(\frac{H\ln T}{\psi}\Big), \\ &\sum_{T \leqq t_{2\nu+1} \leqq T+H} Z\big[t_{2\nu+1}(\bar\tau_{2\nu+1}), \overset{*}{W}\big(t_{2\nu+1}(\bar\tau_{2\nu+1})\big)\big] \\ &\qquad = -2\sum_{t_{2\nu+1}} \cos\bar\tau_{2\nu+1} + O\Big(\frac{H\ln T}{\psi}\Big). \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку

$$\cos\bar\tau_\nu \geqq \cos\Big(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\Big) = \sin\varepsilon,$$

то из (13) получаются неравенства

$$\begin{aligned} &\sum_{T \leqq t_{2\nu} \leqq T+H} Z\big[t_{2\nu}(\bar\tau_{2\nu}), \overset{*}{W}\big] \geqq \frac{\sin\varepsilon}{2\pi} H \ln T + O\Big(\frac{H\ln T}{\psi}\Big), \\ &\sum_{T \leqq t_{2\nu+1} \leqq T+H} Z\big[t_{2\nu+1}(\bar\tau_{2\nu+1})\, \overset{*}{W}\big] \leqq -\frac{\sin\varepsilon}{2\pi} H \ln T + O\Big(\frac{H\ln T}{\psi}\Big). \end{aligned} \tag{14}$$

Далее из (14) следует, что интервал $\big(T, T + T^{\delta/2}\big)$ содержит нуль $t = \bar\gamma$ нечетного порядка функции $Z\big[t, W\big(t, \overset{*}{g}(t)\big)\big]$. Теперь в силу теоремы $\bar\gamma$

является нулем нечетного порядка и для функции $Z(t)$. Отсюда уже следует справедливость оценки (11).

З а м е ч а н и е 8. В связи с методом доказательства следствия можно сформулировать более сильную чем (11) гипотезу:

$$\gamma'' - \gamma' < \psi(\gamma') \ln \gamma' .$$

З а м е ч а н и е 9. Можно задать вопрос о справедливости более сильного чем (12) условия

$$\sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H} X^2\big[t_\nu(\bar{\tau}_\nu),\, \overset{*}{W}\big(t_\nu(\bar{\tau}_\nu)\big)\big] = O\Big(\frac{H \ln T}{\psi}\Big) .$$

5. Заключительные замечания

Преобразование (3), (4) соответствующее преобразованию (2) параметров $n = 2, 3, \ldots, m$ формулы Римана-Зигеля, можно обобщить например следующим образом:

$$\begin{aligned} &Z(t) \to Z\big[t, W_1\big(t, g(t)\big), \ldots, W_m\big(t, g(t)\big)\big] \\ &= 2\cos\vartheta(t) + 2\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{n + W_n(t)}} \cos\big\{\vartheta(t) - t\ln\big(n + W_n(t)\big)\big\} + R(t) , \end{aligned}$$

где ($|W(t)| \leqq 1$)

$$W_n(t) = n^{1/2-\varepsilon} W(t) ; \qquad |W_n(t)| \leqq n^{1/2-\varepsilon}, \quad t \in (T, T+U) .$$

Вот еще одна модификация

$$\bar{W}_n(t) = a_n W(t) , \qquad 0 \leqq |a_n| \leqq n^{1/2-\varepsilon} ;$$

возмущение $Z[t, \bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_m]$ при любом фиксированном $t \in (T.T+U)$ является теперь функцией $m-1$ переменных $a_2, a_3, \ldots, a_m$.

Литература

[1] HARDY, G. H.—LITTLEWOOD, J. E.: *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes*, Acta Math. **41** (1918), 119–196.

[2] МОЗЕР, Я.: *Новые следствия из формулы Римана-Зигеля*, Acta Arith. **42** (1982), 1–10.

[3] МОЗЕР, Я.: *Задача Харди-Литтлвуда и гипотеза Линделефа*, Acta Math. Univ. Comenian. **46–47** (1985), 49–62.

[4] ТИТЧМАРШ, Е. К.: *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, Москва, 1953.

received July 28, 1993

Department of Mathematical Analysis
Faculty of Mathematics and Physics
Comenius University
Mlynská dolina
SK-842 15 Bratislava
Slovakia