I. Sh. Slavutsky

К оценке регулятора алгебраического поля

Mathematica Slovaca, Vol. 41 (1991), No. 3, 311--314

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136533

Math. Slovaca 41, 1991, No. 3, 311–314

К ОЦЕНКЕ РЕГУЛЯТОРА АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОЛЯ

И. Ш. СЛАВУТСКИЙ

ABSTRACT. By using a result due to R. Zimmert [5] we give a short proof of the theorem: Let k be an algebraic number field of degree $n = s + 2t$ over the rationals with signature $[s, t]$. Denote by $\mathcal{R}$ the regulator of k and by w the number of roots of unity lying in k. Then $\mathcal{R} \geq w \cdot 0,00136 \cdot \exp(0,81s + 0,57t)$.

Ряд авторов ([1]—[4] и другие) неоднократно использовал оценку снизу для регулятора алгебраического поля, вытекающую из неравенства Циммерта [5], в различных вопросах диофантова анализа и алгебраической теории чисел. Ниже показано, как незначительные технические улучшения приемов Циммерта позволяют усилить эту оценку.

Основной результат Циммерта ([5], теорема 3) состоит в доказательстве неравенства для регулятора $\mathcal{R}$ алгебраического поля k степени $s+2t$, где s и t соответственно количество вещественных и пар комплексно сопряженных вложений поля k в поле комплексных чисел. Этому неравенству легко придать вид

$$\frac{\mathcal{R}}{w} \geq \frac{(1+\gamma)(1+2\gamma)}{2}\Gamma(1+\gamma)^{s+t}\Gamma(\tfrac{3}{2}+\gamma)^{t}2^{-(s+t)}\pi^{-t/2}\times$$
$$\times\exp\left\{(-1-\gamma)\left[(s+t)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)+t\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{1+\gamma}\right]\right\}. \quad (1)$$

Здесь w – число корней из 1, содержащихся в поле k, $\gamma > 0$, $\Gamma(z)$ и $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)$ соответственно гамма-функция и ее логарифмическая производная. Следствием неравенства (1) в предположении, что $\gamma = 1$, является оценка Циммерта для регулятора поля

$$\mathcal{R} \geq 0,02w \cdot \exp(0,46s + 0,1t).$$

Попытаемся проанализировать неравенство (1) подробнее с целью установить, какое значение γ оптимизирует для всех фиксированных значений s и t нижнюю границу в неравенствах вида

$$\frac{\mathcal{R}}{w} \geq c_0 \cdot \exp(c_1 s + c_2 t),$$

AMS Subject Classification (1985): Primary 11R27
Key words: Algebraic number field, Regulator, Gamma-function

где c_0, c_1, c_2 — абсолютные положительные постоянные.

Прежде всего неравенство (1) приведем к виду

$$\frac{\mathcal{R}}{w} \geq \frac{(1+\gamma)(1+2\gamma)}{2} \cdot \exp\left\{ s \left[\log\frac{\Gamma(1+\gamma)}{2} - (1+\gamma)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + t \left[\log\frac{\Gamma(1+\gamma)}{2\sqrt{\pi}} + \log\Gamma(\tfrac{3}{2}+\gamma) - (1+\gamma)\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\right)\right] - 3 - \frac{2}{\gamma}\right\}$$

или

$$\frac{\mathcal{R}}{w} \geq \frac{(1+\gamma)(1+2\gamma)}{2} \exp\left(-3-\frac{2}{\gamma}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{ s \left[\log\frac{\Gamma(1+\gamma)}{2} + (1+\gamma)\left(\mathrm{C} + \frac{2}{1+\gamma} - \frac{1+\gamma}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+(1+\gamma)/2)}\right)\right] + \right.$$
$$+ t \left[\log\frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(\frac{3}{2}+\gamma)}{2\sqrt{\pi}} + (1+\gamma)\left(2\mathrm{C} + \frac{2}{1+\gamma} + \frac{2}{2+\gamma} - \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{1+\gamma}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+(1+\gamma)/2)} - \frac{2+\gamma}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+(2+\gamma)/2)}\right)\right]\right\}, \qquad (2)$$

поскольку $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) = -\mathrm{C} - \frac{1}{a} + a\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+a)}$ с постоянной Эйлера $\mathrm{C} = 0,577\ldots$. Далее из формулы Стирлинга

$$\Gamma(1+\gamma) = \gamma^{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma}\sqrt{2\pi\gamma}(1+\varepsilon_\gamma),$$

где $\varepsilon_\gamma \to 0$ при $\gamma \to \infty$, следует, что для достаточно больших значений γ коэффициенты при s и t в неравенстве (2) становятся отрицательными (при s, например, для $\gamma \geq 2$, как показывают подсчеты), а при $\gamma \to 0$ ясно, что $\exp(-3-2/\gamma) \to 0$ и, следовательно, $c_0 \to 0$. Поиски компромиссного решения (найти "достаточно большие" значения c_1 и c_2 при "не очень маленьком" коэффициенте c_0) в интервале $]0,2[$ приводят к значению $\gamma = 1/2$ в отличие от выбора Циммерта $\gamma = 1$. В таком случае из соотнощения (2) с помощью неравенств

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n(n+3/4)]^{-1} < \sum_{n\leq 8}[n(n+3/4)]^{-1} + \pi^2/6 - \sum_{n<8} n^{-2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}[n(n+5/4)]^{-1} < \sum_{n\leq 8}[n(n+5/4)]^{-1} + 1 - \sum_{n<8}[n(n+1)]^{-1}$$

непосредственными подсчетами получается

Теорема. Для регулятора $\mathcal{R}$ алгебраического поля k с количеством w корней из единицы и степени $s+2t$, где s и t соответсвенно количество вещественных и количество пар комплексно сопряженных вложений поля k в поле комплексных чисел, справедлива оценка

$$\frac{\mathcal{R}}{w} \geq 0,00136 \exp(0,81s + 0,57t). \tag{3}$$

Приведем полезные для приложений конкретизации.

Следствие 1. Регулятор вполне вещественного поля степени $s > 1$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{R} \geq 0,003 \exp(0,75s) \tag{4}$$

Следствие 2. Если $k = \mathbb{Q}(\zeta_f)$ — круговое поле, порожденное корнем степени $f = p^\ell$ из единицы, p — простое нечетное число, $\ell \in \mathbf{N}$, $\mathcal{R}$ — регулятор поля k, то

$$\mathcal{R} \geq 0,003f \cdot \exp(\varphi(f)/4) \tag{5}$$

или

$$\mathcal{R} \geq 0,02f \cdot \exp(\varphi(f)/5), \quad \varphi(f) \geq 22. \tag{6}$$

Укажем на одно из возможных приложений. Если подсчитать значения постоянных в известных оценках сверху для произведения L-функций Дирихле $\prod_\chi L(1|\chi)$, где χ — неглавные характеры группы характеров поля (эти константы, как известно, эффективны, см., например, работы [6]–[8]), то полученные выше оценки (3)–(6) для регуляторов поля дадут возможность обычными приемами оценить число классов дивизоров соответствующего поля.

REFERENCES

[1] EVERTSE, J. H.: Upper Bound for the Numbers of Solutions of Diophantine Equations. Math. Centre Tracts, Amsterdam, 1983.

[2] СЛАВУТСКИЙ, И. Ш.: Среднее значение L-функций и число классов кругового поля. Аналитическая теория чисел и теория функций. 7. Зап. научн. семин. ЛОМИ т. 154 (1986), 136–143.

[3] QUÊME, R.: Majorations du nombre de classes. C. R. Acad. Sci. Paris 307 (1988), No.6, 199–202.

[4] СЛАВУТСКИЙ, И. Ш.: L-функции и число классов круговых полей. Успехи Мат. Наук т. 43 (1988), вып. 5, 215–216.

[5] ZIMMERT, R.: Ideale kleiner Norm in Idealklassen und Regulatorabschätzung. Invent. Math. 62 (1981), 367–390.

[6] TATUZAWA, T.: On the product of $L(1|\chi)$. Nagoya Math. J. 5 (1953), 105–111.

[7] LEPISTÖ, T.: Two remarks concerning Dirichlet's L-functions and the class number of the cyclotomic field. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. IA (1968), No. 433.

[8] ЛАВРИК, А. Ф.—ЕДГОРОВ, 17.: О произведении числа классов дивизоров на регулятор полей алгебраических чисел. Известия АН УзССР (1975), № 2, 77–79.

Received June 29, 1989

195257 Ленинград
ул. Вавиловых, дом 4
кор. 1, кв. 159
СССР