Rudolf Zimka

Гладкое преобразование аналитической системы дифференциальных уравнений к квазинормальной форме

Mathematica Slovaca, Vol. 35 (1985), No. 1, 9--21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136373

Math. Slovaca 35, 1985, No. 1, 9—21

ГЛАДКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К КВАЗИНОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

РУДОЛЬФ ЗИМКА

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \Xi(\xi, t), \tag{1}$$

где $\Xi(\xi, t) - n+2$ — мерная вещественная вектор-функция векторного аргумента ξ той же размерности и скалярного аргумента t, непрерывная 2π — периодическая по t, аналитическая в области $\|\xi\| < \alpha$, причем $\Xi(0, t) \equiv 0$. Пусть два характеристических показателя системы в вариациях относительно состояния равновесия $\xi = 0$ равны $\pm i\lambda$, λ иррационально, а остальные $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ имеют отрицательные вещественные части (при существовании отрицательных мультипликаторов предполагается π — периодичность системы (1) по t).

Система (1) линейным неособым преобразованием может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= i\lambda x + X(x, y, z_1, \ldots, z_n, t) \\ \dot{y} &= -i\lambda y + Y(x, y, z_1, \ldots, z_n, t) \\ \dot{z}_l &= \varkappa_l z_l + \tau_l z_{l-1} + Z_l(x, y, z_1, \ldots, z_n, t), \quad l = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2}$$

где X, Y, Z_l — ряды по степеням x, y, z_1, …, z_n с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами, сходящиеся в некоторой окрестности начала координат, не содержащие в своих разложениях членов ниже 2-го измерения, τ_l равны либо 0, либо 1, $\tau_1 = 0$.

Поскольку система (1) вещественная, то можно считать, что $y = \bar{x}$ (черта — знак комплексной сопряженности) и Y — комплексно сопряженное к X, т. е. $Y = \bar{X}$.

Методом неопределенных коэффициентов (используется напр. в [4]) докажется

Лемма 1. *Существует формальное преобразование*

$$
\begin{aligned}
&x = u + \varphi(u, v, w_1, \dots, w_n, t)\\
&y = v + \bar{\varphi}(u, v, w_1, \dots, w_n, t)\\
&z_l = w_l + \psi_l(u, v, t), \quad l = 1, \dots, n,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где φ, ψ_l — формальные ряды по степеням u, v, $w_1, \dots, w_n$ (ψ_l не зависят от $w_1, \dots, w_n$) с 2π-периодическими коэффициентами без свободных и линейных членов, приводящее системы (2) к виду

$$
\begin{aligned}
&\dot{u} = i\lambda u + uH(u, v)\\
&\dot{v} = -i\lambda v + v\bar{H}(u, v)\\
&\dot{w}_l = \varkappa_l w_l + \tau_l w_{l-1} + W_l(u, v, w_1, \dots, w_n, t), \quad l = 1, \dots, n,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где H — формальный ряд по степеням u, v с постоянными коэффициентами без свободных членов,

$$W_l(u, v, 0, \dots, 0, t) \equiv 0, \quad l = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Система (4) при условии (5) образует согласно принятой терминологии (смотри [1], [2], [5]) квазинормальную форму. Преобразование (3) называется квазинормализующим преобразованием.

В зависимости от характера ряда H различаются два случая:

1) алгебраический, когда $\mathrm{Re}H = g(uv)^k + \dots$, $g \neq 0$,

2) трансцендентный, когда $\mathrm{Re}H \equiv 0$.

В. В. Басов в [1] показал, что в алгебраическом случае преобразования типа (3) расходятся. Для комплексных аналитических систем расходимость преобразований типа (3) была показана А. Д. Брюном в [4].

В настоящей работе рассматривается алгебраический неустойчивый случай, что соответствует наличию положительной постоянной g. Будет показано, что гладкое преобразование системы (2) к квазинормальной форме существует. В алгебраическом асимптотически устойчивом случае существование гладкого квазинормализующего преобразования было показано в [5].

Лемма 2. *Какое бы ни было целое положительное N, существует преобразование*

$$
\begin{aligned}
&x = u + \varphi(u, v, w_1, \dots, w_n, t)\\
&y = v + \bar{\varphi}(u, v, w_1, \dots, w_n, t)\\
&z_l = w_l + \psi_l(u, v, t), \quad l = 1, \dots, n,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где φ, ψ_l — ряды по степеням u, v, $w_1, \dots, w_n$ с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами (ψ_l не зависят от $w_1, \dots, w_n$) без свободных и линейных членов, сходящиеся в некоторой окрестности начала, причем их разложения по u, v не содержат членов выше $2N$-го измерения, переводящее систему (2) в систему

$$\begin{aligned}&\dot u = i\lambda u + uH(u, v) + U(u, v, w_1, \dots, w_n, t)\\ &\dot v = -i\lambda v + v\bar H(u, v) + \bar U(u, v, w_1, \dots, w_n, t)\\ &\dot w_l = \varkappa_l w_l + \tau_l w_{l-1} + W_l(u, v, w_1, \dots, w_n, t), \quad l = 1, \dots, n,\end{aligned} \tag{7}$$

где $H = \sum_{\sigma=1}^{N-1} \eta_\sigma (uv)^\sigma$, η_σ *— постоянные коэффициенты,* $U(u, v, w_1, \dots, w_n, t)$ *и* $W_l(u, v, 0, \setminus 0, t)$ $(l = 1, \dots, n)$ *не содержат в своих разложениях по* u, v *членов ниже* $2N+1$*-го измерения.*

Существование формального преобразования (6) доказывается стандартным построением метода неопределенных коэффициентов, сходимость ряда φ методом мажорант Коши.

Чтобы построить квазинормализующее преобразование системы (2), придется привести рассматриваемую систему к более удобному виду. Для того выполним теперь для некоторого целого положительного N в системе (2) преобразование (6) (значение N будет уточнено позже). Тогда из (7) при замене $u = r_0 \exp\{i\varphi_0\}$, $v = r_0 \exp\{-i\varphi_0\}$, $w_j = w_{j0}$ $(j = 1, \dots, n)$ получим систему

$$\begin{aligned}&\dot r_0 = Q(r_0) + R_0(r_0, \varphi_0, w_{10}, \dots, w_{n0}, t)\\ &\dot\varphi_0 = P(r_0) + \Phi_0(r_0, \varphi_0, w_{10}, \dots, w_{n0}, t)\\ &\dot w_{l0} = \varkappa_l w_{1,0} + \tau_l w_{1,0} + \Psi_{l0}(r_0, \varphi_0, w_{10}, \dots, w_{n0}, t), \quad l = 1, \dots, n,\end{aligned} \tag{8}$$

где $Q = gr_0^k + \dots (3 \leqslant k \leqslant 2N-1)$, $P = \lambda + a_l r_0^l + \dots (2 \leqslant l \leqslant 2N-2)$ суть полиномы с постоянными вещественными коэффициентами, R_0, Φ_0, Ψ_{l0} – 2π-периодические по φ_0, t функции, непрерывные по t, аналитические в области B_0:

$$|r_0| < \Delta, \ |w_{j0}| < \Delta (j = 1, \dots, n), \ |\mathrm{Im}\ \varphi_0| < \Omega (\Delta > 0, \Omega > 0),$$

причем $R_0(r_0, \varphi_0, w_{10}, \dots, w_{n0}, t)$, $\Phi_0(r_0, \varphi_0, w_{10}, \dots, w_{n0}, t)$, $\Psi_{l0}(r_0, \varphi_0, 0, \dots, 0, t)$ $(l = 1, \dots, n)$ в своих разложениях по r_0 не содержат членов ниже $2N$-го измерения. В дальнейшем результат аннулирования некритических переменных в функциях будем обозначать индексом (0) наверху. Дополнительно предположим, что R_0, Φ_0, Ψ_{l0} $(l = 1, \dots, n)$ аналитичны также по переменной t в области $|\mathrm{Im}\ t| < \Omega$, причем ряды, представляющие R_0, Φ_0 и Ψ_{l0} $(l = 1, \dots, n)$ сходятся при $|r_0| \leqslant 1$ и при таких r_0

$$|R_0|, |\Phi_0|, |\Psi_{l0}| < 1, \quad l = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Выполнения условия (9) всегда можно добится линейной заменой переменной r_0.

Всюду в дальнейшем рассматриваются только вещественные аналитические функции с одним и тем же периодом 2π по угловой перенной φ и времени t.

Теорема. *Пусть $g>0$. Существует непрерывно дифференцируемое по r_0, аналитическое по $\varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t$ в области B:*

$$0 \leqslant r_0 \leqslant \gamma,\ |w_{j0}|<\gamma\ (j=1, \ldots, n),\ |\operatorname{Im} \varphi_0|<\delta,\ |\operatorname{Im} t|<\delta(\gamma>0,\ \delta>0)$$

преобразование T: $(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}) \to (r, \varphi, w_1, \ldots, w_n)$, приводящее систему (8) к квазинормальной форме

$$\begin{aligned}
&\dot{r}=Q(r)\\
&\dot{\varphi}=P(r)\\
&\dot{w}_l=\varkappa_l w_l+\tau_l w_{l-1}+\Psi_l(r, \varphi, w_1, \ldots, w_n, t), \quad l=1, \ldots, n,
\end{aligned}$$

где $\Psi_l^{(0)} \equiv 0$.

Доказательство. Преобразование T будем строить методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем тождественное преобразование T_0, которое переводит систему (8) при некотором N опять в систему (8) при таком же N. Предположим, что уже проделано s преобразований S_i $(i=0, 1, \ldots, s-1)$, результатом которых является преобразование $T_s=S_0 S_1 \ldots S_{s-1}$

$$\begin{aligned}
&r_s=r_0+F_s(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t)\\
&\varphi_s=\varphi_0+G_s(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t)\\
&w_{ls}=w_{l0}+H_s(r_0, \varphi_0, w_{10}, \ldots, w_{n0}, t), \quad l=1, \ldots, n,
\end{aligned}$$

переводящее в области $B_s (B_s \subset B_0)$ систему (8) в систему

$$\begin{aligned}
&\dot{r}_s=Q(r_s)+R_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t)\\
&\dot{\varphi}_s=P(r_s)+\Phi_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t)\\
&\dot{w}_{ls}=\varkappa_l w_{ls}+\tau_l w_{l-1, s}+\Psi_{ls}(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t),\\
&\quad l=1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{10_s}$$

Введем в рассмотрение последовательности чисел и областей:

$$N_s=2N_{s-1}, \quad s=1, 2, \ldots\ (N_0=N)$$

$$M_s^{(p)}=\{(r_s=x_s+iy_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t): 0<x_s<\Delta_s^{(0)}, |y_s| x_s^{1/2\, N_s},$$

$$|w_{js}|<\Delta_s^{(p)}\ (j=1, \ldots, n), |\operatorname{Im} \varphi_s|<\Omega_s^{(p)}, |\operatorname{Im} t|<\Omega_s^{(p)}\},$$

$$\Delta_s^{(p)}=\frac{\Delta}{4}\left(2+\frac{1}{s+1}-\frac{p}{4(s+1)(s+2)}\right),$$

$$\Omega_s^{(p)}=\frac{\Omega}{4}\left(2+\frac{1}{s+1}-\frac{p}{4(s+1)(s+2)}\right),$$

$$p=0, 1, 2, 3; \quad s=0, 1, 2, \ldots.$$

Пусть выполняются следующие предположения:

I_s: Функции F_s, G_s, H_{ls} $(s \geqslant 1)$ аналитичны в некоторой области $B_s \subset M_0^{(0)} \subset$

B_0. Преобразование T_s имеет обратное на $M_s^{(0)}$, причем $T_s^{-1}M_s^{(0)}\subset B_s$. В области B_s справедливы неравенства:

$$|F_s|,\ |G_s|,\ |H_{ls}|,\ \left|\frac{\partial F_s}{\partial r_0}\right|,\ \left|\frac{\partial G_s}{\partial r_0}\right|,\ \left|\frac{\partial H_{ls}}{\partial r_0}\right|<\sum_{i=0}^{s-1}\Delta^{N_i},\qquad (11_s)$$

$$l=1,\ \ldots,\ n.$$

II_s: Функции R_s, Φ_s, $\Psi_{ls}(s\geqslant 0)$ аналитичны в $M_s^{(0)}$, где справедливы неравенства:

$$|R_s|,\ |\Phi_s|,\ \Psi_{ls}^{(0)}|<|r_s|\exp\left[N_s\left(1+\frac{1}{s+1}\right)\right],\quad l=1,\ \ldots,\ n.\qquad (12_s)$$

функции $\Psi_{ls}^{(1)}=\Psi_{ls}-\Psi_{ls}^{(0)}$ $(l=1,\ \ldots,\ n)$ можно представить в виде

$$\Psi_{ls}^{(1)}=\sum_{i=1}^{n}\psi_{ls}^{(i)}(r_s,\ \varphi_s,\ w_{1s},\ \ldots,\ w_{ns},\ t)w_{is},\qquad (13_s)$$

причем

$$\begin{gathered}|\psi_{l0}^{(i)}|<K\Delta,\\ \psi_{ls}^{(i)}<K\Delta\left(1+\sum_{j=0}^{s-1}\Delta^{N_j}\right),\quad i,\ l=1,\ \ldots,\ n;\ s=1,\ 2,\ \ldots,\end{gathered}\qquad (14_s)$$

K — постоянная.

В основе доказательства теоремы лежит следующее утверждение.

Лемма 3. *Если выполняются условия* I_s—II_s, *то существует преобразование* T_{s+1}:

$$\begin{aligned}r_{s+1}&=r_0+F_{s+1}(r_0,\ \varphi_0,\ w_{10},\ \ldots,\ w_{n0},\ t)\\ \varphi_{s+1}&=\varphi_0+G_{s+1}(r_0,\ \varphi_0,\ w_{10},\ \ldots,\ w_{n0},\ t)\\ w_{l,\,s+1}&=w_{l0}+H_{l,\,s+1}(r_0,\ \varphi_0,\ w_{10},\ \ldots,\ w_{n0},\ t),\\ &\quad l=1,\ \ldots,\ n,\end{aligned}$$

приводящее систему (8) к виду

$$\begin{aligned}\dot r_{s+1}&=Q(r_{s+1})+R_{s+1}(r_{s+1},\ \varphi_{s+1},\ w_{1,\,s+1},\ \ldots,\ w_{n,\,s+1},\ t)\\ \dot\varphi_{s+1}&=P(r_{s+1})+\Phi_{s+1}(r_{s+1},\ \varphi_{s+1},\ w_{1,\,s+1},\ \ldots,\ w_{n,\,s+1},\ t)\\ \dot w_{l,\,s+1}&=\varkappa_l w_{l,\,s+1}+\tau_l w_{l-1,\,s+1}+\\ &\quad+\Psi_{l,\,s+1}(r_{s+1},\ \varphi_{s+1},\ w_{1,\,s+1},\ \ldots,\ w_{n,\,s+1},\ t),\\ &\quad l=1,\ \ldots,\ n,\end{aligned}\qquad (15_{s+1})$$

причем выполняются условия I_{s+1}—II_{s+1}.

Доказательство леммы 3. В системе (10_s) сделаем замены S_s:

$$\begin{aligned} r_{s+1} &= r_s + f_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \dots, w_{ns}, t) \\ \varphi_{s+1} &= \varphi_s + g_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \dots, w_{ns}, t) \\ w_{l,s+1} &= w_{ls} + h_{ls}(r_s, \varphi_s, t), \quad l = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{16}$$

с целью получить систему (15_{s+1}). Пусть функции f_s, g_s, h_{ls} $(l = 1, \dots, n)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered} \frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\partial f_s}{\partial r_s} Q + \frac{\partial f_s}{\partial \varphi_s} P + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial w_{js}} (\varkappa_j w_{js} + \tau_j w_{j-1,s} + \Psi_{js}^{(1)}) = Q' f_s - R_s \\ \frac{\partial g_s}{\partial t} + \frac{\partial g_s}{\partial r_s} Q + \frac{\partial g_s}{\partial \varphi_s} P + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_s}{\partial w_{js}} (\varkappa_j w_{js} + \tau_j w_{j-1,s} + \Psi_{js}^{(1)}) = P' f_s - \Phi_s \\ \frac{\partial h_{ls}}{\partial t} + \frac{\partial h_{ls}}{\partial r_s} Q + \frac{\partial h_{ls}}{\partial \varphi_s} P = \varkappa_l h_{ls} + \tau_l h_{l-1,s} - \Psi_{ls}^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Psi_{ls}^{(0)}}{\partial w_s} h_s, \\ l = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда функции R_{s+1}, Φ_{s+1}, $\Psi_{l,s+1}$ в системе (15_{s+1}) определяются уравнениями:

$$\begin{gathered} R_{s+1}(r_s + f_s, \varphi_s + g_s, w_{1s} + h_{1s}, \dots, w_{ns} + h_{ns}, t) - \\ = Q(r_s) - Q(r_s + f_s) + Q'(r_s) f_s + \frac{\partial f_s}{\partial r_s} R_s + \frac{\partial f_s}{\partial \varphi_s} \Phi_s + \sum_{j-1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial w_{js}} \Psi_{js}^{(0)}, \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} \Phi_{s+1}(r_s + f_s, \varphi_s + g_s, w_{1s} + h_{1s}, \dots, w_{ns} + h_{ns}, t) = \\ = P(r_s) - P(r_s + f_s) + P'(r_s) f_s + \frac{\partial g_s}{\partial r_s} R_s + \frac{\partial g_s}{\partial \varphi_s} \Phi_s + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_s}{\partial w_{js}} \Psi_{js}^{(0)}, \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \Psi_{l,s+1}(r_s + f_s \;\; \varphi_s + g_s, w_{1s} + h_{1s}, \dots, w_{ns} + h_{ns}, t) = \\ = \Psi_{ls} - \Psi_{ls}^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Psi_{ls}^{(0)}}{\partial w_{js}} h_{js} + \frac{\partial h_{ls}}{\partial r_s} R_s + \frac{\partial h_{ls}}{\partial \varphi_s} \Phi_s, \\ l = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{20}$$

Первому уравнению (17) соответствует система дифференциальных уравнений

$$dt = \frac{dr_s}{Q} = \frac{d\varphi_s}{P} = \frac{dw_{js}}{\varkappa_j w \;\; + \tau_j w_{j-1,s} + \Psi_{js}^{(1)}} = \frac{df_s}{Q' f_s - R_s}, \quad j - 1, \dots, n,$$

которую представим в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r_s}=\frac{1}{Q}\\
&\frac{\mathrm{d}\varphi_s}{\mathrm{d}r_s}=\frac{P}{Q}\\
&\frac{\mathrm{d}w_{js}}{\mathrm{d}r_s}=\frac{\varkappa_j}{Q}\,w_{js}+(\tau_j w_{j-1,\,s}+\Psi_{js}^{(1)})\,\frac{1}{Q}\\
&\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}r_s}=\frac{Q'}{Q}\,f_s-\frac{R_s}{Q},\quad j=1,\,\dots,\,n.
\end{aligned}\tag{21}$$

Общее решение первых $n+2$ уравнений в (21) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
&t(r_s)=\int\frac{1}{Q}\,\mathrm{d}r_s+c_t=u(r_s)+c_t\\
&\varphi_s(r_s)=\int\frac{P}{Q}\,\mathrm{d}r_s+c_\varphi=v(r_s)+c_\varphi\\
&w_{js}(r_s)=\zeta_{js}(r_s\,;\,c_1,\,\dots,\,c_n,\,\varphi_s(r_s),\,t(r_s)),\\
&\qquad j=1,\,\dots,\,n.
\end{aligned}\tag{22}$$

Решение $f_s(r_s,\,\varphi_s(r_s),\,w_{1s}(r_s),\,\dots,\,w_{ns}(r_s),\,t(r_s))$ последнего уравнения в (21) возьмем в виде суммы двух функций $f_s=f_s^{(0)}+f_s^{(1)}$, где $f_s^{(0)}$, $f_s^{(1)}$ — решения дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}f_s^{(0)}}{\mathrm{d}r_s}=\frac{Q'}{Q}\,f_s^{(0)}-\frac{R_s^{(0)}}{Q}\\
&\frac{\mathrm{d}f_s^{(1)}}{\mathrm{d}r_s}=\frac{Q'}{Q}\,f_s^{(1)}-\frac{R_s^{(1)}}{Q},\qquad R_s^{(1)}=R_s-R_s^{(0)}.
\end{aligned}\tag{23}$$

Уравнениям (23) удовлетворяют функции

$$f_s^{(0)}(r_s,\,\varphi_s(r_s),\,t(r_s))=-Q(r_s)\int_0^{r_s}\frac{R_s(z,\,\varphi_s(z),\,0,\,\dots,\,0,\,t(z))}{Q^2(z)}\,\mathrm{d}z,\tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&f_s^{(1)}(r_s,\,\varphi_s(r_s),\,w_{1s}(r_s),\,\dots,\,w_{ns}(r_s),\,t(r_s))=\\
&=-Q(r_s)\int_{\Delta_s^{(0)}}^{r_s}\frac{R_s^{(1)}(z,\,\varphi_s(z),\,w_{1s}(z),\,\dots,\,w_{ns}(z),\,t(z))}{Q^2(z)}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}\tag{25}$$

Если вместо $\varphi_s(z)$, $t(z)$, $w_{1s}(z),\,\dots,\,w_{ns}(z)$ в (24) и (25) поставим выражения

$$\begin{aligned}
\varphi_s(z)&=\varphi_s+v(z)-v(r_s)\\
t(z)&=t+u(z)-u(r_s)\\
w_{js}(z)&=\zeta_{js}(z\,;\,\xi_{1s}(r_s,\,\varphi_s,\,w_{1s},\,\dots,\,w_{ns},\,t),\,\dots,\\
&\qquad\xi_{ns}(r_s,\,\varphi_s,\,w_{1s},\,\dots,\,w_{ns},\,t),\,\varphi_s+v(z)-v(r_s),\,t+u(z)-u(r_s)),\\
&\qquad j=1,\,\dots,\,n,
\end{aligned}\tag{26}$$

где $\xi_{1s}, \ldots, \xi_{ns}$ — решения последних n уравнений (22) относительно постоянных $c_1, \ldots, c_n$, тогда функция $f_s = f_s^{(0)} + f_s^{(1)}$ будет удовлетворять системе (17).

Оценим f_s в $M_s^{(1)}$. Поскольку при $(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) \in M_s^{(1)}$ аргументные функции $\varphi_s(z)$, $t(z)$, $w_{1s}(z), \ldots, w_{ns}(z)$, определенные (26), не выходят из области $M_s^{(0)}$, то для оценки $f_s^{(0)}$ и $f_s^{(1)}$ можно применить неравенство (12_s). Из (24) и (25) получим, что в $M_s^{(1)}$

$$|f_s| < a_1 N_s |r_s| \exp \left[N_s \left(1 + \frac{1}{s+1} \right) - m_1 \right], \tag{27}$$

причем положительные постоянные a_1, m_1 не зависят от шага s. В дальнейшем постоянные, не зависящие от шага s, будем обозначать буквами a_i ($i = 2, \ldots, 8$) и m_i ($i = 2, \ldots, 6$).

Функцию g_s, которая должна удовлетворять системе (17), возьмем в виде $g_s = g_s^{(0)} + g_s^{(1)}$, где $g_s^{(0)}$, $g_s^{(1)}$ — решения дифференциальных уравнений

$$\frac{dg_s^{(0)}}{dr_s} = \frac{P'}{Q} f_s^{(0)} - \frac{\Phi_s^{(0)}}{Q},$$

$$\frac{dg_s^{(1)}}{dr_s} = \frac{P'}{Q} f_s^{(1)} - \frac{\Phi_s^{(1)}}{Q}, \quad \Phi_s^{(1)} = \Phi_s - \Phi_s^{(0)}. \tag{28}$$

Уравнениям (28) удовлетворяют функции

$$g_s^{(0)} = \int_0^{r_s} \left(P' f_s^{(0)} - \Phi_s^{(0)} \right) \frac{1}{Q} dz$$

$$g_s^{(1)} = \int_{\Delta_s^{(0)}}^{r_s} \left(P' f_s^{(1)} - \Phi_s^{(1)} \right) \frac{1}{Q} dz.$$

Используя (12) и (27), покажется, что в $M_s^{(2)}$

$$|g_s| < a_2 N_s^2 |r_s| \exp \left[N_s \left(1 + \frac{1}{s+2} \right) - m_2 \right]. \tag{29}$$

Функции h_{ls} ($l = 1, \ldots, n$) в (16) должны удовлетворять системе

$$Q \frac{dh_{ls}}{dr_s} = \varkappa_l h_{ls} + \tau_l h_{l-1,s} - \Psi_{ls}^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Psi_{ls}^{(0)}}{\partial w_{js}} h_{js}, \tag{30}$$

$$l = 1, \ldots, n.$$

Система (30) имеет единственное в начало идущее решение, которое представим в виде

$$h_{ls} = \int_0^{r_s} \exp \left(\int_z^{r_s} \frac{\varkappa_l}{Q_l} d\varepsilon \right) \left(\tau_l h_{l-1,s} - \Psi_{ls}^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Psi_{ls}^{(0)}}{\partial w_{js}} h_{js} \right) \frac{1}{Q} dz,$$

$$l = 1, \ldots, n.$$

Отсюда, используя (12_s)—(14_s), неравенство Коши и лемму Гронуолла, учитывая, что τ_l $(l=1, \ldots, n)$ и Δ можно взять сколь угодно малые, получим для функций h_{ls} $(l=1, \ldots, n)$ в области $M_s^{(2)}$ оценку:

$$|h_{ls}|<a_3|r_s| \exp\left[N_s\left(1+\frac{1}{s+1}\right)-m_3\right], \quad l=1, \ldots, n.$$

Из (27), (29) и последнего неравенства получаем, что решение f_s, g_s, h_{1s}, …, h_{ns} системы (17) удовлетворяет в $M_s^{(2)}$ неравенству

$$|f_s|,\ |g_s|,\ |h_{ls}|<a_4 N_s^2|r_s| \exp\left[N_s\left(1+\frac{1}{s+1}\right)-m_4\right], \quad l=1, \ldots, n. \tag{31}$$

Поскольку функции f_s, g_s, h_{1s}, …, h_{ns} аналитичны в $M_s^{(2)}$, то с помощью оценки Коши найдем, что в $M_s^{(3)}$

$$\left|\frac{\partial f_s}{\partial \varphi_s}\right|, \left|\frac{\partial f_s}{\partial w_{js}}\right|, \left|\frac{\partial f_s}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial g_s}{\partial \varphi_s}\right|, \left|\frac{\partial g_s}{\partial w_{js}}\right|, \left|\frac{\partial g_s}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial h_{ls}}{\partial \varphi_s}\right|, \left|\frac{\partial h_{ls}}{\partial_t}\right|<$$

$$<a_5(s+1)(s+2)N_s^2|r_s| \exp\left[N_s\left(1+\frac{1}{s+1}\right)-m_4\right], \quad j, l=1, \ldots, n. \tag{32}$$

Далее, из (17) на основании (12_s)—(14_s), (31)—(32) получаем, что в $M_s^{(3)}$

$$\left|\frac{\partial f_s}{\partial r_s}\right|, \left|\frac{\partial g_s}{\partial r_s}\right|, \left|\frac{\partial h_{ls}}{\partial r_s}\right|<a_6(s+1)(s+2)N_s^2|r_s| \exp\left[N_s\left(1+\frac{1}{s+1}\right)-m_5\right], \quad l=1, \ldots, n. \tag{33}$$

Так как величины справа в (31) сколь угодно малы по сравнению с расстояниями между границами $M_s^{(3)}$ и $M_{s+1}^{(0)}$, то

$$M_{s+1}^{(0)} \subset S_s M_s^{(3)}. \tag{34}$$

Используя формулу Тейлора, оценку Коши и неравенства (12_s), (31)—(33), получим из (18)—(20), что в $M_{s+1}^{(0)}$

$$|R_{s+1}|, |\Phi_{s+1}|, \Psi_{l,s+1}^{(0)}|<a_7(s+1)(s+2)N_s^4|r_s| \exp\left[2N_s\left(1+\frac{1}{s+1}\right)-m_6\right], \quad l=1, \ldots, n. \tag{35}$$

Поскольку якобиан преобразования S_s в силу (32), (33) отличен в $M_s^{(3)}$ от нуля, то из (34) следует, что обратное преобразование

$$\begin{aligned} r_s &= r_{s+1}+U_s(r_{s+1}, \varphi_{s+1}, w_{1,s+1}, \ldots, w_{n,s+1}, t)\\ \varphi_s &= \varphi_{s+1}+V_s(r_{s+1}, \varphi_{s+1}, w_{1,s+1}, \ldots, w_{n,s+1}, t)\\ w_{ls} &= w_{l,s+1}+W_{ls}(r_{s+1}, \varphi_{s+1}, w_{1,s+1}, \ldots, w_{n,s+1}, t),\\ & \quad l=1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{36}$$

определено и аналитично в $M_{s+1}^{(0)}$. В $M_s^{(3)}$

$$f_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) + U_s(r_s + f_s, \varphi_s + g_s, w_{1s} + h_{1s}, \ldots, w_{ns} + h_{ns}, t) = 0$$

Отсюда в силу (31) и (34) имеем, что в $M_{s+1}^{(0)}$

$$|U_s| < a_4 N_s^2 |r_s| \exp\left[N_s\left(1 + \frac{1}{s+1}\right) - m_4\right].$$

Из (35) получаем, используя (31), (36) и (37), что в $M_{s+1}^{(0)}$

$$|R_{s+1}| < |r_{s+1}| \exp\left[N_{s+1}\left(1 + \frac{1}{s+2}\right)\right].$$

Тем самым доказано первое неравенство (12_{s+1}). Остальные неравенства (12_{s+1}) доказываются аналогично.

Перейдем к доказательству (13_{s+1}) и (14_{s+1}). По определению

$$\Psi_{l,s+1}^{(1)} = \Psi_{l,s+1} - \Psi_{l,s+1}^{(0)}.$$

В силу (20) и представления (13_s) получаем

$$\Psi_{l,s+1}^{(1)}(r_s + f_s, \varphi_s + g_s, w_{1s} + h_{1s}, \ldots, w_{ns} + h_{ns}, t) -$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\psi_{ls}^{(i)}(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) w_{is} - \psi_{ls}^{(i)}(r_s, \varphi_s, -h_{1s}, \ldots, -h_{ns}, t)(-h_{is})] +$$

$$+ \frac{\partial h_{ls}}{\partial r_s} [R_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) - R_s(r_s, \varphi_s, -h_{1s}, \ldots, -h_{ns}, t)] +$$

$$+ \frac{\partial h_{ls}}{\partial \varphi_s} [\Phi_s(r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}, t) - \Phi_s(r_s, \varphi_s, -h_{1s}, \ldots, -h_{ns}, t)],$$

$$l = 1, \ldots, n.$$

Отсюда, применив лемму Адамара и подставляя вместо $r_s, \varphi_s, w_{1s}, \ldots, w_{ns}$ соответствующее им выражения (36), получим представление (13_{s+1}):

$$\Psi_{l,s+1}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \psi_{l,s+1}^{(i)}(r_{s+1}, \varphi_{s+1}, w_{1,s+1}, \ldots, w_{n,s+1}, t) w_{i,s+1},$$

где

$$\psi_{l,s+1}^{(i)} = \psi_{ls}^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} h_{ks} \int_0^1 \frac{\partial \psi_{ls}^{(k)}}{\partial w_{is}} dz + \frac{\partial h_{ls}}{\partial r_s} \int_0^1 \frac{\partial R_s}{\partial w_{is}} dz +$$

$$+ \frac{\partial h_{ls}}{\partial \varphi_s} \int_0^1 \frac{\partial \Phi_s}{\partial w_{is}} dz, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{38}$$

Из (38) на основании (12_s), (31)—(33), используя оценку Коши, найдем, что для коэффициентов

$$\psi^{(i)}_{l,\,s+1} \text{ в } M^{(0)}_{s+1}$$

справедливо неравенство (14_{s+1}). Тем самым показано выполение условия II_{s+1}.

Положим теперь $T_{s+1} = T_s S_s$, т. е.

$$\begin{aligned} F_{s+1} &= F_s + f_s(r_0 + F_s,\ \varphi_0 + G_s,\ w_{10} + H_{1s},\ \ldots,\ w_{n0} + H_{ns},\ t) \\ G_{s+1} &= G_s + g_s(r_0 + F_s,\ \varphi_0 + G_s,\ w_{10} + H_{1s},\ \ldots,\ w_{n0} + H_{ns},\ t) \\ H_{l,\,s+1} &= H_{ls} + h_{ls}(r_0 + F_s,\ \varphi_0 + G_s,\ t), \quad l = 1,\ \ldots,\ n. \end{aligned} \tag{39}$$

Пусть далее

$$B_{s+1} = T_s^{-1} M_s^{(3)}. \tag{40}$$

Так как в силу (34)

$$S_s^{-1} M^{(0)}_{s+1} \subset M_s^{(3)} \subset M_s^{(0)},$$

а по I_s

$$T_s^{-1} M_s^{(0)} \subset B_s,$$

то

$$T^{-1}_{s+1} M^{(0)}_{s+1} \subset T_s^{-1} M_s^{(3)} = B_{s+1} \subset T_s^{-1} M_s^{(0)} \subset B_s.$$

В области B_{s+1} в силу (31) и (40) получим:

$$\begin{gathered} |f_s(r_0 + F_s,\ \varphi_0 + G_s,\ w_{10} + H_{1s},\ \ldots,\ w_{n0} + H_{ns},\ t)| < \\ < a_8 N_s^2 |r_0 + F_s| \exp\left[N_s\left(1 + \frac{1}{s+1}\right) - m_4\right]. \end{gathered} \tag{41}$$

Поскольку $B_{s+1} \subset M_0^{(0)}$ и в $M_0^{(0)}$

$$|r_0| < \frac{7}{8}\,\Delta,$$

то из (41) в силу (11_s) имеем

$$|f_s(r_0 + F_s,\ \varphi_0 + G_s,\ w_{10} + H_{1s},\ \ldots,\ w_{n0} + H_{ns},\ t)| < \Delta^{N_s}.$$

Следовательно, в B_{s+1} в силу (11_s) и полученной оценки

$$|F_{s+1}| \leqslant |F_s| + |f_s| < \sum_{i=0}^{s-1} \Delta^{N_i} + \Delta^{N_s} = \sum_{i=0}^{s} \Delta^{N_i}.$$

Далее, из (39) имеем

$$\frac{\partial F_{s+1}}{\partial r_0}=\frac{\partial F_s}{\partial r_0}+\frac{\partial f_s}{\partial r_s}\left(1+\frac{\partial F_s}{\partial r_0}\right)+\frac{\partial f_s}{\partial \varphi_s}\frac{\partial G_s}{\partial r_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_s}{\partial w_{js}}\frac{\partial H_{js}}{\partial r_0}.$$

Отсюда в силу (11_s), (32), (33) получаем, что в B_{s+1}

$$\left|\frac{\partial F_{s+1}}{\partial r_0}\right|<\sum_{i=0}^{s}\Delta^{N_i}.$$

Остальные неравенства (11_{s+1}) доказываются аналогично. Тем самым доказано выполнение условия I_{s+1}, и, значит, вся лемма 3.

Для системы (8) условие I_0 тривиально, а условие II_0 выполняется в силу свойства функций R_0, Φ_0, Ψ_{l0} и предложения (9). Это дает нам в лемме 3 базу для индукции по s. Устремим s к бесконечности. Неравенства (11_s) нам обеспечивают равномерную сходимость функций F_s, G_s, H_{ls} и их производных по r_0 на множестве $B_\infty=\lim\limits_{s\to\infty} B_s$. Переходя в (40) к нпределу, получим $T_\infty B_\infty=M_\infty$, где

$$M_\infty=\left\{(r_\infty,\ \varphi_\infty,\ w_{1\infty},\ \dots,\ w_{n\infty},\ t)\colon 0<r_\infty<\frac{\Delta}{2},\right.$$

$$\left.|w_{j\infty}|<\frac{\Delta}{2}\ (j=1,\ ..,\ n),\ |\mathrm{Im}\ \varphi_\infty|<\frac{\Omega}{2},\ |\mathrm{Im}\ t|<\frac{\Omega}{2}\right\}.$$

Если положим

$$F_\infty=\lim_{s\to\infty}F_s,\quad G_\infty=\lim_{s\to\infty}G_s,\quad H_{l\infty}=\lim_{s\to\infty}H_{ls}\quad (l=1,\ \dots,\ n),$$

то преобразование T_∞ задается формулами

$$\begin{aligned}
r_\infty&=r_0+F_\infty(r_0,\ \varphi_0,\ w_{10},\ \dots,\ w_{n0},\ t)\\
\varphi_\infty&=\varphi_0+G_\infty(r_0,\ \varphi_0,\ w_{10},\ \dots,\ w_{n0},\ t)\\
w_{l\infty}&=w_{l0}+H_{l\infty}(r_0,\ \varphi_0,\ w_{10},\ \dots,\ w_{n0},\ t),\quad l=1,\ \dots,\ n,
\end{aligned}$$

где функции F_∞, G_∞, $H_{l\infty}$ непрерывно дифференцируемы по r_0 и аналитичны по φ_0, w_{10}, ..., w_{n0}, t в области B_∞. Характер функций F_∞, G_∞, $H_{l\infty}$ позволяет нам доопределить их в точке $r_0=0$ следующим образом:

$$F_\infty(r_0=0)=G_\infty(r_0=0)=H_{l\infty}(r_0=0)\equiv 0,\quad l=1,\ \dots,\ n.$$

Тогда на множестве $B'=B_\infty\bigcup\{r_0=0\}$ преобразование T_∞ в силу (12_s) и свойства функций R_0, Φ_0, $\Psi_{l0}^{(0)}$ в точке $r_0=0$ приводит систему (8) к виду

$$\begin{aligned}
\dot r_\infty&=Q(r_\infty)\\
\dot\varphi_\infty&=P(r_\infty)\\
\dot w_{l\infty}&=\varkappa_l w_{l\infty}+\tau_l w_{l-1,\infty}+\Psi_{l\infty}(r_\infty,\ \varphi_\infty,\ w_{1\infty},\ \dots,\ w_{n\infty},\ t),\quad l=1,\ \dots,\ n,
\end{aligned}$$

где $\Psi_{l\infty}^{(0)}\equiv 0$.

Множество B, требуемое в теореме содержится в множестве B'. Теорема, таким образом, доказана.

Замечание 1. Требование иррациональности λ, существенное только для леммы 2, можно ослабить, потребовав лишь

$$q\lambda + p \neq 0$$

при q, p — целых, $0 < q \leq 2N + 1$, при этом в автономном случае λ может быть любым вещественным числом.

Замечание 2. Приведенная теорема содержит результат Ю. Н. Бибикова, который в работе [3] показал существование гладкого преобразования приводящего систему (2) к нормальной форме на инвариантной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] БАСОВ, В. В.: Формальная и аналитическая эквивалентность вещественных систем дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, т. 13, №6, 1977, 981—991.

[2] БИБИКОВ, Ю. Н.: Об устойчивости периодических движений в трансцендантных критических случаях. Дифференциальные уравнения, т. 6, №11, 1970.

[3] БИБИКОВ, Ю. Н.: Об одном критическом случае в теории устойчивости движения. Дифференциальные уравнения, т. 9, №12, 1973, 2123—2135.

[4] БРЮНО, А. Д.: Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Труды Моск. матем. об-ва, т. 25, 1971; т. 26, 1972.

[5] ЗИМКА, Р.: О существовании гладкого преобразования системы дифференциальных уравнений к квазинормальной форме. Вестник Ленинграгдкого университета, №19, 1977, 22—27.

Postúpilo 21. 12. 1981

Katedra riadenia
Fakulta ekonomiky služieb a cestovného ruchu VŠE
Tajovského 8
975 90 Banská Bystrica