Mathematica Slovaca

František Husárik

Некоторые симплектические структуры на касательном и кокасательном пространстве

Mathematica Slovaca, Vol. 33 (1983), No. 2, 189--198

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136330

Math. Slovaca 33, 1983, No. 2, 189—198

НЕКОТОРЫЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ И КОКАСАТЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ФРАНТИШЕК ГУСАРИК

Определение симплектического пространства известно из [2]. Пусть M – дифференцируемое многообразие, $\dim M = 2n$. Пусть ω – замкнутая 2-форма, которая в каждой точке многооразия M имеет постоянный класс $2n$. Говорят, что (M, ω)-симплектическое многообразие (пространство), а ω-симплектическая форма на M.

Пусть M – дифференцируемое многообразие. Пусть $\mathscr{L}$: $TM \to T^*M$ – линейный морфизм над id_M. Отношением

$$\omega_{\mathscr{L}}(X, Y) = [\mathscr{L}(X)](Y)$$

определена билинейная форма на M. Наоборот, когда ω – билинейная форма на M, то отношением

$$X \mapsto \mathrm{i}_X\omega, \text{ где } \mathrm{i}_X\omega(Y) = \omega(X, Y)$$

определен линейный морфизм $\mathscr{L}_\omega$: $TM \to T^*M$ над id_M. Когда (x^i, y^j) и (x^i, z_j) – локальные координатные карты на TM и T^*M, тогда морфизм $\mathscr{L}$ в локальных координатацх имеет запись:

$$\bar{x}^i = x^i, \; z_i = A_{ij}(x)y^j \text{ и } \omega_{\mathscr{L}} = A_{ij}(x)\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j.$$

Говорят, что линейный морфизм $\mathscr{L}$: $TM \to T^*M$ над id_M симметрический, когда форма $\omega_{\mathscr{L}}$ симметрическая.

Обозначим $\mathscr{L}^*\lambda$ линейную форму на TM, определенную морфизмом $\mathscr{L}$ и формой Лиувилля $\lambda = z_i\, \mathrm{d}x^i$ на T^*M, т. е.

$$\mathscr{L}^*\lambda(X) = \lambda(T\mathscr{L}X),$$

где $T\mathscr{L}$ – касательное отображение морфизма $\mathscr{L}$.

В координатах $\mathscr{L}^*\lambda = A_{ij}(x)y^j\, \mathrm{d}x^i$.

Если $\mathscr{L}$ регулярный морфизм, то $(TM, \mathrm{d}\mathscr{L}^*\lambda)$ симплектическая структура на TM и морфизм $\mathscr{L}$ является симплектическим отображением симплектических многообразий $(TM, \mathrm{d}\mathscr{L}^*\lambda)$, $(T^*M, \mathrm{d}\lambda)$.

Лемма 1. *Пусть $\bar{V} = y^i\partial\ \partial y^i$ – поле Лиувилля на TM. Тогда на симплектическом многообразии* (TM, $\mathrm{d}\mathcal{L}^*\lambda$) *справедливо*

$$\mathrm{i}_V\,\mathrm{d}\mathcal{L}^*\lambda = \mathcal{L}^*\lambda\,.$$

Доказательство. Как известно, для симплектического многообразия (T^*M, $\mathrm{d}\lambda$) справедливо $\mathrm{i}_V\,\mathrm{d}\lambda = \lambda$, где $V = z_i\partial\ \partial z_i$ – поле Лиувилля на T^*M. Используя локальное координатное выражение, легко установим, что $T\mathcal{L}(\bar{V}) = V$. Поэтому $\mathrm{d}\mathcal{L}^*\lambda(\bar{V}, X) = \mathrm{d}\lambda(T\mathcal{L}\bar{V},\ T\mathcal{L}X)$ и, следовательно, $\mathrm{i}_V\,\mathrm{d}\mathcal{L}^*\lambda(X) = \mathrm{i}_{T\mathcal{L}V}\,\mathrm{d}\lambda(T\mathcal{L}(X)) - \mathrm{i}_V\,\mathrm{d}\lambda(T\mathcal{L}(X)) = \lambda(T\mathcal{L}X) = \mathcal{L}^*\lambda(X)$.

Припомним, что гамильтоновой системой симплектической структуры (M, ω) называем поле Y на многообразии M, для которого форма $\mathrm{i}_Y\omega$ замкнута, т. е. $\mathrm{d}\mathrm{i}_Y\omega = 0$, где d – символ внешнего дифференцирования.

Пусть Γ – обобщенная связность на TM, заданная уравнением $\mathrm{d}y^i = a^i_j(x, y)\,\mathrm{d}x^j$. Как известно (см. [1]), существует только одно Γ-горизонтальное поле H на TM, которое является дифференциальным уравнением второго порядка. В координатах

$$H - y^i\partial/\partial x^i + a^i_j(x, y)y^j\partial\ \partial y^i\,.$$

Лемма 2. *Необходимым условим для того, чтобы поле H было гамильтоновой системой симплектическои структуры* (TM, $\mathrm{d}\mathcal{L}^*\lambda$) *является симметричность изоморфизма $\mathcal{L}$.*

Докательство

$$\mathrm{d}\mathcal{L}^*\lambda = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\, y^j\ \mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^i + A\cdot\mathrm{d}y^j\wedge\mathrm{d}x^i$$

$$i_H\,\mathrm{d}\mathcal{L}^*\lambda = \left[\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{kj}}{\partial x^i}\right)y^jy^k + A_{ij}a^j_ky^k\right]\mathrm{d}x^i - A_{ij}y^i\ \mathrm{d}y^j$$

$$\mathrm{d}i_H\,\mathrm{d}\mathcal{L}^*\lambda = \left[\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^u}\ y^jy^k + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^u}\, a^j_k + A_{ij}\ \frac{\partial a^j_k}{\partial x^u}\right)y^k\right]\mathrm{d}x^u\wedge\mathrm{d}x^i +$$

$$+\left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\ y^k + \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i}\right)y^k + A_{is}\ \frac{\partial a^s_k}{\partial y^j}\ y^k + A_{ik}a^k_j\right]\mathrm{d}y^j\wedge$$

$$\wedge\,\mathrm{d}x^i - A_{ij}\ \mathrm{d}y^i\wedge\mathrm{d}y^j \qquad (1)$$

Из этого уже видно, что форма $\mathrm{d}i_H\,\mathrm{d}\mathcal{L}^*\lambda = 0$ для любых двух векторо́в и, следовательно, для любых двух вертикальных векторов только тогда, когда $A_{ij} = A_{ji}$.

Когда морфизм $\mathcal{L}$ регулярныи и симметрический, структура (M, $\omega_\mathcal{L}$) является квази-римановой структорой.

Пусть Γ – линейная связность на TM с уравнением $\mathrm{d}y^k = \Gamma^k_{ij}(x)y^j\,\mathrm{d}x^i$. Абсолютное дифференцирование формы $\omega_\mathcal{L}$ для связности Γ обозначим

$\nabla_\Gamma \omega_{\mathscr{L}}$. Как известно (см. [3]), существует только одна симметрическая линейная связность, называем квази-риманова связность, для которой $\nabla_\Gamma \omega_{\mathscr{L}} = 0$. Тоже известно, что $\nabla_\Gamma \omega_{\mathscr{L}} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} = -A_{sj}\Gamma^s_{kj} - A_{is}\Gamma^s_{kj} \tag{2}$$

Лемма 3. *Если $\mathscr{L}$ – симметрический изоморфизм, то только квази-риманова связность структуры $(M, \omega_{\mathscr{L}})$ является единственной симметрической линейной связностью, для которой форма $\mathrm{d}i_H\, \mathrm{d}\mathscr{L}^*\lambda$ полубазисная.*

Доказательство. Из (1) вытекает, что форма $\mathrm{d}i_H\, \mathrm{d}\mathscr{L}^*\lambda$ полубазисная, т. е. $\mathrm{d}i_H\, \mathrm{d}\mathscr{L}^*\lambda = 0$, когда по крайней мере один из векторов X, Y вертикальный только тогда, когда $\mathscr{L}$ симметрический и

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} y^k + \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i}\right) y^k + A_{is}\frac{\partial a^s_k}{\partial y^j} y^k + A_{ik} a^k_j = 0 \tag{3}$$

Уравнение (3) в случае, когда Γ – линейная связность. т. е. когда $a^i_j = \Gamma^i_{jk} y^k$, имеет вид

$$\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} + A_{is}\Gamma^s_{kj} + A_{is}\Gamma^s_{jk}\right) y^k = 0$$

и справедливо для любых y^k только тогда, когда

$$A_{is}\left(\Gamma^s_{kj} + \Gamma^s_{jk}\right) = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} \tag{4}$$

Легко установим, что (4) эквивалентно (2), и этим лемма доказана.

Теорема 1. *Если $\mathscr{L}$ – симметрический изоморфизм, то квази-риманова связность структуры $(M, \omega_{\mathscr{L}})$ единственная симметрическая связность, для которой поле H является гамильтоновой системой симплектической структуры $(TM, \mathrm{d}\mathscr{L}^*\lambda)$, и при этом функция $\beta = 1/2\, A_{ij} y^i y^j$ является гамильтонианом системы H.*

Доказательство. Найдём поле $X = y^i \partial/\partial x^i + A^i \partial/\partial y^i$, которое является дифференциальным уравнением 2-ого потядка, так, чтобы $\mathrm{i}_X\, \mathrm{d}\mathscr{L}^*\lambda = -\mathrm{d}\beta$. Вычислением получим:

$$\mathrm{i}_X\, \mathrm{d}\mathscr{L}^*\lambda = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} y^j y^k\, \mathrm{d}x^i - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} y^j y^i\, \mathrm{d}x^k + A_{ij} A^j\, \mathrm{d}x^i - A_{ij} y^i\, \mathrm{d}y^j,$$

$$\mathrm{d}\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} y^i y^j\, \mathrm{d}x^k - A_{ij} y^j\, \mathrm{d}y^i.$$

Сравнивая $i_X\, d\mathscr{L}^*\lambda$ с $d\beta$ получим:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} y^i y^k - \frac{\partial A_{kj}}{\partial x^i} y^j y^k + A_{ij}A^j = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_{kj}}{\partial x^i} y^k y^j$$

$$A_{ij}A^j = \frac{1}{2}\frac{\partial A_{kj}}{\partial x^i} y^k y^j - \frac{1}{2}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} y^j y^k - \frac{1}{2}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} y^k y^j$$

$$A^s = \frac{1}{2} A^{si}\left(\frac{\partial A_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j}\right) y^j y^k$$

Если связность Γ симметрическая и $\mathscr{L}$ – симметрический изоморфизм, то из (4) вытекает, что $\Gamma^s_{kj} y^j y^k = A^s$. Этим мы доказали что $i_X\, d\mathscr{L}^*\lambda = -d\beta$ только тогда, когда поле X является полем H, определенным квази-римановой связностью структуры $(M, \omega_{\mathscr{L}})$. Тогда уже очевидно, что $di_H\, d\mathscr{L}^*\lambda = d(-d\beta) = 0$. Этим теорема доказана.

Пусть p – проекция расслоения $p\colon T^*M \to M$ и пусть $\varphi\colon M \to T^*M$ – сечение. Тогда каноническим вертикальным параллелизмом, который определен идентификацией $\mathrm{I} T_h T^*_{ph} M \equiv T^*_{ph} M$, определено вертикальное векторное поле Z_φ на T^*M. В координатах, если

$$\varphi\colon \bar{x}^i = x^i, \ \ z_i = \varphi_i(x), \ \text{то}$$

$$Z_\varphi = \varphi_i(x)\partial/\partial z_i .$$

Вертикальные векторные поля на T^*M, определенные предыдущей конструкцией, будем называть полями типа b^v.

Пусть T^*X – поле на T^*M, которое является продолжением поля X на M при помощи продолжающего функтора T^* из категории локальных дифеоморфозмов многообразий в категорию векторных расслоений.

Если $X = a^i(x)\partial/\partial x^i$, то

$$T^*X = a^i(x)\partial/\partial x^i - \frac{\partial a^j}{\partial x^i} z_j \partial/\partial z_i$$

Теорема 2. *Пусть Y – проектирующее поле на T^*M nad polem X на M. Тогда поле Y является гамильтоновой системой симплектической структуры $(T^*M, d\lambda)$ тогда и только тогда, когда существует поле Z_φ типа b^v так, что*

$$Y = T^*X + Z_\varphi ,$$

где φ – замкнутая форма Пфаффа на M.

Доказательство. Пусть $Y = a^i(x)\partial/\partial x^i + A_i(x, z)\partial/\partial z_i$. Тогда $i_Y\, d\lambda = A_i\, dx^i - a^i\, dz_i$ и

$$di_Y\, d\lambda = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i + \frac{\partial A_i}{\partial z_j} dz_j \wedge dx^i - \frac{\partial a^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dz_i .$$

Следовательно, $\mathrm{d}i_Y\,\mathrm{d}\lambda=0$ только тогда, когда

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j}=\frac{\partial A_j}{\partial x^i},\quad \frac{\partial A_i}{\partial z_j}=-\frac{\partial a^j}{\partial x^i}$$

Так как функции a^j зависят только от $(x^1, \ldots, x^n)$, то

$$A_i=-\frac{\partial a^j}{\partial x^i}z_j+\varphi_i(x) \tag{5}$$

и следовательно, $Y=T^*X+Z_\varphi$. Следует ещё указать, что форма $\varphi(x)=\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x^i$ замкнута, т. е. $\mathrm{d}\varphi=0$. Если рассмотрим (5), то условие $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ справедливо только тогда, когда

$$-\frac{\partial^2 a^j}{\partial x^i\,\partial x^k}z_j+\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k}=-\frac{\partial^2 a^j}{\partial x^k\,\partial x^i}z_j+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^i}$$

Из этого можно вывести, что

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^i}$$

и этим теорема доказана.

Лемма 4. *Для любово проектирующего поля $У$, которое является гамильтоновой системой симплектической структуры $(T^*M, \mathrm{d}\lambda)$, spravedlivo*

$$i_Y\,\mathrm{d}\lambda=-\mathrm{d}(\lambda(Y))+T^*p(\varphi),$$

где φ замкнутая форма на M, определенная полем $У$, и $T^*p(\varphi)$ форма на T^*M.

Доказательство. Пусть $Y=T^*X+Z_\varphi$. Легко установим, что $\lambda(T^*X)=\lambda(Y)$. Поэтому $i_Y\,\mathrm{d}\lambda = i_{T^*X+Z_\varphi}\,\mathrm{d}\lambda = i_{T^*X}\,\mathrm{d}\lambda + i_{Z_\varphi}\,\mathrm{d}\lambda = -\mathrm{d}(\lambda(T^*X)) + i_{Z_\varphi}\mathrm{d}z_i\wedge\mathrm{d}x^i = -\mathrm{d}(\lambda(Y)) + \varphi_i(x)\,\mathrm{d}x^i = -\mathrm{d}(\lambda(Y)) + T^*p(\varphi)$, где T^*p – кокасательное отображение проекции расслоения p: $T^*M\to M$.

Пусть Γ – обобщенная сваэностьь на T^*M. Тогда абсолютным дифференцированием линейной формы γ на M для связности Γ (см. [4]) называем отображение ∇^Γ_γ: $TM\to VT^*M$, определеное отношением $\nabla^\Gamma_\gamma(X) = \nabla^\Gamma_X\gamma = v_\Gamma T\gamma(X)$, где v_Γ – морфизм связности Γ, т. е. v_Γ: $TT^*M\to VT^*M$. В координатах, если $\mathrm{d}z_i=a_{ij}(x, z)\,\mathrm{d}x^j$ – уравнение связности Γ, то координатным выражением морфизма связности является

$$\begin{aligned} v_\Gamma:\ &\bar{x}^i = x^i\\ &\bar{z}_j=z_j\\ &\bar{\tau}_j=\tau_j-a_{ij}(x, z)\xi^i, \end{aligned}$$

где $(x^i, z_j, \xi^i, \tau_j)$ – локальные координаты на TT^*M.

Если сечение $\gamma\colon M\to T^*M$ имеет координатное выражение

$$\gamma : \bar{x}^i = x^i \quad z_i = \gamma_i(x),$$

то, используя каноническую идентификацию $\mathrm{I}V_{\gamma(m)}T_m^*M\to T_m^*M$, получим отображение $\mathrm{I}\nabla_\gamma^\Gamma\colon TM\to T^*M$, которое в координатацх имеет запись:

$$\bar{x}^i = x^i, \quad z_i = \left(\frac{\partial\gamma_i}{\partial x^j} - a_{ij}(x,\, z_i = \gamma_i)\right)y^j.$$

Линейный морфизм $\mathrm{I}\nabla_\gamma^\Gamma$ будем обозначать $\mathscr{L}_\gamma^\Gamma\colon TM\to T^*M$ и билинейную форму на M, определенную морфизмом $\mathscr{L}_\gamma^\Gamma$, будем обозначать ω_γ. Обозначим

$$A_{ij} = \frac{\partial\gamma_i}{\partial x^j} - a_{ij}(x,\, \gamma_i).$$

Тогда $\omega_\gamma = A_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$. Говорят, что сечение γ Γ-регулярное, или же Γ-симметрическое, когда форма ω_γ регулярна, или же симметрическа.

Если γ Γ-регулярное, то $(TM,\, \mathrm{d}(\mathscr{L}_\gamma^\Gamma)^*\lambda)$ является симплектическая структура, симплектически изоморфна с $(T^*M,\, \mathrm{d}\lambda)$.

Пусть γ Γ-регулярное. Пусть $\mathscr{S}$ – векторное поле на M, для которого справедливо $\mathscr{L}_\gamma^\Gamma(\mathscr{S}) = \gamma$. Используя продолжающий функтор T и T^*, получим поля $T\mathscr{S}$ и $T^*\mathscr{S}$. Из теоремы 2 уже известно, что поле $T^*\mathscr{S}$ является гамильтоновой системой симплетической структуры $(T^*M,\, \mathrm{d}\lambda)$.

Теорема 3. *Поле $T\mathscr{S}$ является гамильтоновой системой симплектической структуры $(TM,\, \mathrm{d}(\mathscr{L}_\gamma^\Gamma)^*\lambda)$ тогда и только тогда, когда*

$$T\mathscr{L}_\gamma^\Gamma(T\mathscr{S}) = T^*\mathscr{S}$$

Доказательство. Так как симплектические структуры $(TM,\, \mathrm{d}(\mathscr{L}_\gamma^\Gamma)^*\lambda)$ и $(T^*M,\, \mathrm{d}\lambda)$ симплектически изоморфны, то доказательство теоремы эквивалентно доказательству того, что поле $T\mathscr{L}_\gamma^\Gamma(T\mathscr{S})$ является гамильтоновой системой симплектической структуры $(T^*M,\, \mathrm{d}\lambda)$. В координатах поле $\mathscr{S} = A^{ik}\gamma_k\partial/\partial x^i$, где A^{ik} – обратная матрица для матрицы A_{ij}. Тогда

$$T\mathscr{S} = A^{ik}\gamma_k\partial/\partial x^i + \frac{\partial(A^{ik}\gamma_k)}{\partial x^j}\, y^j\partial/\partial y^i$$

$$T^*\mathscr{S} = A^{ik}\gamma_k\partial/\partial x^i - \frac{\partial(A^{ik}\gamma_k)}{\partial x^j}\, z_i\partial/\partial z_j$$

$$T\mathscr{L}_\gamma^\Gamma(T\mathscr{S}) = A^{ik}\gamma_k\partial/\partial x^i + \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}\, y^j A^{ku}\gamma_u + A_{ij}\,\frac{\partial(A^{jk}\gamma_k)}{\partial x^s}\, y^s\right)\partial/\partial z_i$$

Поле $T\mathscr{L}_\gamma^\Gamma(T\mathscr{S})$ проектирующее над полем $\mathscr{S}$ и поэтому из теоремы 2 вытекает, что оно является гамильтоновой системой симплектической структуры

$(T^*M, \mathrm{d}\lambda)$ тогда и только тогда, когда существует поле Z_φ типа b^v, определенное замкнутой формой φ на M так, что

$$T\mathcal{L}^{\Gamma}_{\gamma}(T\mathcal{S}) = T^*\mathcal{S} + Z_\varphi \tag{6}$$

В координатах (6) имеет вид

$$\left(\frac{\partial A_{is}}{\partial x^k} A^{ku}\gamma_u + A_{ij}\frac{\partial (A^{jk}\gamma_k)}{\partial x^s}\right)y^s = -\frac{\partial (A^{uk}\gamma_k)}{\partial x^i} A_{us}y^s + \varphi_i(x) \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что $\varphi_i(x) = 0$, и этим теорема доказана.

Конструкцией полей T^*X на T^*M и любой точкой $h \in T^*M$ определено отображение $\varphi_h\colon (J^1TM)_{ph} \to T_hT^*M$ следующим образом: Пусть $u \in (J^1TM)_{ph}$. Существует локальное векторное поле $X\colon M \to TM$ так, что $j^1_{ph}X = u$. Положим $\varphi_h(u) = T^*X(h)$. В координатах, пусть $h = (x^i, z_i)$, тогда $\varphi_h\colon (x^i, a^i, a^i_j) \to (x^i, z_i, a^i, -a^i_j z_i)$. Пусть Γ – обобщенная связность на TM, т. е. $\Gamma\colon TM \to J^1TM$. Тогда $\varphi_h \circ \Gamma\colon T_{ph}M \to T_hT^*M$. В координатах, пусть $\Gamma\colon (x^i, y^i) \to (x^i, y^i, y^i_j = a^i_j(x, y))$. Тогда для $h = (x^i, z_i)$ имеем

$$\varphi_h \circ \Gamma\colon (x^i, y^i) \to (x^i, z_i, y^i, -a^i_j(x, y)z_i).$$

Из этого вытекает:

Лемма 5. *Отображениями $\varphi_h \circ \Gamma$ определена на T^*M связность тогда и только тогда, когда связность Γ линейна.*

Доказательство. Отображения $\varphi_h \circ \Gamma$ являются линейными тогда и только тогда, когда $a^i_j(x, y) = \Gamma^i_{jk}(x)y^k$. Из этого вытекает утверждение.

В случае, когда Γ линейная связность на TM, связность на T^*M, порождаемую отображениями $\varphi_h \circ \Gamma$, будем обозначать $T^*\Gamma$. В координатах, если

$\mathrm{d}y^i = \Gamma^i_{jk}y^k\,\mathrm{d}x^j$ — уравнения связности Γ, то

$\mathrm{d}z_{j} = -\Gamma^i_{jk}z_i\,\mathrm{d}x^k$ — уравнения связности $T^*\Gamma$.

Γ-симметрическим и Γ-регулярным сечением определена квази-риманова связность $\varkappa$ структуры (M, ω_γ), для которой символы Кристоффеля вытекают из условия (4) и

$$\Gamma^u_{is} = \frac{1}{2} A^{uk}\left(\frac{\partial A_{is}}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^s} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial x^i}\right) \tag{8}$$

Теорема 4. *Пусть сечение $\gamma\colon M \to T^*M$ Γ-симметрическое и Γ-регулярное и пусть γ – замкнутая форма на M. Тогда поле $T\mathcal{L}^{\Gamma}_{\gamma}(T\mathcal{S})$ является гамильтоновой системой структуры $(T^*M, \mathrm{d}\lambda)$ тогда и только тогда, когда горизонтальные подпространства, определенные связностью $T^*\varkappa$, которая индуцирована квази-римановой связностью $\varkappa$ структуры (M, ω_γ), являются касательными подпространствами подмногообразия $\gamma(M) \subset T^*M$.*

Доказательство. В случае, когда $\varphi_i(x)=0$, отношение (7) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial A_{is}}{\partial x^k} A^{ku}\gamma_u + A_{ij} \frac{\partial A^{jk}}{\partial x^s} \gamma_k + A_{ij}A^{jk} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x^s} + \frac{\partial A^{uk}}{\partial x^i} \gamma_k A_{us} +$$

$$+ A^{uk} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x^i} A_{us} = 0.$$

Из условия $A_{is}A^{sk} = \delta_i^k$ вытекает

$$\frac{\partial A_{is}}{\partial x^u} A^{sk} + A_{is} \frac{\partial A^{sk}}{\partial x^u} = 0.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial A_{is}}{\partial x^k} A^{ku} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^s} A^{ju} + A_{js} \frac{\partial A^{ju}}{\partial x^i}\right)\gamma_u + \frac{\partial \gamma_i}{\partial x^s} +$$

$$+ A_{us}A^{uk} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x^i} = 0.$$

В случае, когда γ Γ-симметрическое сечение, последнее уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial A_{is}}{\partial x^k} - \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^s} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial x^i}\right) A^{ku}\gamma_u + \frac{\partial \gamma_i}{\partial x^s} + \frac{\partial \gamma_s}{\partial x^i} = 0.$$

Если используем (8), то получим

$$2\Gamma^u_{is}\gamma_u + \frac{\partial \gamma_i}{\partial x^s} + \frac{\partial \gamma_s}{\partial x^i} = 0.$$

В случае, когда γ – замкнутая форма, наконец получим

$$-\Gamma^u_{is}\gamma_u = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x^s}. \tag{9}$$

Связность $T^*\varkappa$ на T^*M определена уравнением

$$\mathrm{d}z_i = -\Gamma^u_{is} z_u \,\mathrm{d}x^s \tag{10}$$

Сравнением отношеный (9) и (10) теорема доказана.

Пусть γ: $M \to T^*M$ – замкнутая 1-форма на M. Тогда $T^*p(\gamma)$ тоже замкнутая 1-форма на T^*M. Пусть Z_γ: $T^*M \to VT^*M$ – вертикальное векторное поле на T^*M, определенное каноническим вертикальным параллелизном на T^*M.

Лемма 6. *В симплектической структуре* $(T^*M, \mathrm{d}\lambda)$ *справедливо*

$$\mathrm{i}_{Z_\gamma}\,\mathrm{d}\lambda = T^*p(\gamma).$$

Доказательство. $Z_\gamma = \gamma_i \partial/\partial z_i$, $T^*p(\gamma) = \gamma_i\, \mathrm{d}x^i$, тогда $\mathrm{i}_{Z_\gamma}\, \mathrm{d}\lambda = \gamma_i\, \mathrm{d}x^i$. И этим лемма доказана.

Пусть γ Γ-симметрическая форма на M. Обозначим

$$\beta = \frac{1}{2} A^{ij} z_i z_j$$

функцию на T^*M, определенную формой $\omega_\gamma = A_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$. Тогда

$$\mathrm{d}\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} z_i z_j\, \mathrm{d}x^k + A^{ij} z_i\, \mathrm{d}z_j.$$

Пусть F – векторное поле на T^*M, для которого $\mathrm{i}_F\, \mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\beta$. Если $F = a^i(x, z)\partial/\partial x^i + A_i(x, z)\partial/\partial z_i$, то $\mathrm{i}_F\, \mathrm{d}\lambda = A_i\, \mathrm{d}x^i + a^i\, \mathrm{d}z_i$. Поэтому

$$A_k = \frac{1}{2} \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} z_i z_j, \quad a^i = -A^{ij} z_j.$$

Припомним, что F является геодезическим потоком финслеровой структуры, определенной функцией β на T^*M (см. [2]).

Теорема 5. *Пусть γ Γ-регулярная и Γ-симметрическая замкнутая форма на M. Тогда*

$$[Z_\gamma, F] = -T^*\mathcal{S}$$

Доказательство.

$$[Z_\gamma, F] = [\gamma_i \partial/\partial z_i, \quad -A^{ij} z_i \partial/\partial x^j + \frac{1}{2} \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} z_i z_j \partial/\partial z_k] =$$

$$= -A^{ij}\gamma_i \partial/\partial x^j + \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} \gamma_i z_j \partial/\partial z_k + \frac{\partial \gamma_k}{\partial x^i} A^{ij} z_j \partial/\partial z_k =$$

$$= -A^{ij}\gamma_i \partial/\partial x^j + \left(\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} \gamma_i z_j + A^{ij} z_j \frac{\partial \gamma_i}{\partial x^k}\right)\partial/\partial z_k = -T^*\mathcal{S}.$$

Когда (M, ω) симплектическая структура, то известно, что скобка Пуассона $(\alpha, \beta) = L([X_\alpha, X_\beta])$. При этом L – изоморфизм $L\colon TM \to T^*M$, где $L(X_\alpha) = \alpha$, $L(X_\beta) = \beta$ и $L(X) = \mathrm{i}_X\omega$.

Лемма 7. *В симплектической структуре* $(T^*M, \mathrm{d}\lambda)$ для скобки Пуассона $(T^*p(\gamma), \mathrm{d}\beta)$ *в случае, когда γ Γ-регулярная и Γ-симметрическая замкнутая форма на M, справедливо*

$$(T^*p(\gamma), \mathrm{d}\beta) = \mathrm{d}(\lambda(T^*\mathcal{S})).$$

Доказательство. Из леммы 7 вытекает, что $\mathrm{i}_{Z_\gamma}\, \mathrm{d}\lambda = T^*p(\gamma)$ а по предположению $\mathrm{i}_F\, \mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\beta$. Тогда используя теорему 5 и лемму 4, получим:

$$(T^*p(\gamma),\ \mathrm{d}\beta) = \mathrm{i}_{[Z_\gamma, F]}\,\mathrm{d}\lambda = -\mathrm{i}_{T^*\mathscr{S}}\,\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}(\lambda(T^*\mathscr{S}))\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] DEKRÉT, A.: On a horizontal structure on differentiable manifolds, Mathematica Slovaca 27, No. 1, 25—32.

[2] ГОДБИЙОН, К.: Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, «Мир», Москва, 1973.

[3] ХЕЛГАСОН, С.: Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, «Мир», Москва, 1964

[4] KOLÁŘ, I.: Connections in 2-fibred manifolds, Seminar on differential geometry and its applications.

Поступило 27. 3. 1981

Katedra matematiky a fyziky
Vysoká škola lesnícka a drevárska
Šturova 4
960 53 Zvolen