André Allard

Sur la structure des automates probabilistes

Mathematica Slovaca, Vol. 32 (1982), No. 4, 343--348

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136305

Math. Slovaca 32, 1982, No. 4, 343—348

SUR LA STRUCTURE DES AUTOMATES PROBABILISTES

ANDRÉ ALLARD

Un automate probabiliste fini de type Mealy est un système

$$A = \{I, S, O, F\} \tag{1}$$

où I, S, O sont des ensembles finis et représentent respectivement l'alphabet d'entrée, l'ensemble des états et l'alphabet de sortie, tandis que

$$F = \{p_s(s^*|i),\ q_s(o|i) \mid s \in S\} \tag{2}$$

est une famille de probabilités de passage, c'est-à-dire

$$I \xrightarrow{p_s(s^*|i)} S \tag{3}$$

$$I \xrightarrow{q_s(o|i)} O \tag{4}$$

oú $p_s(s^*|i)$ représente la probabilité de passer de l'état $s \in S$ avec la lettre d'entrée i dans l'état $s^* \in S$ au moment suivant, et $q_s(o|i)$ représente la probabilité d'avoir le résultat o à la sortie si à l'entrée nous avions la lettre i et l'état de l'automate était s. Les probabilités de passage (2) caractérisent la structure interne de l'automate. Nous voulons indiquer ici une méthode pour la construction de ces probabilités de passage quand nous avons à notre disposition les répartitions aléatoires à la sortie et sur l'ensemble des états de l'automate et les covariances entre trois variables aléatoires définies sur I, S et respectivement O.

Soit

$$\begin{gathered} r_i^s \geq 0, \quad p_{s^*}^s \geq 0, \quad q_o^s \geq 0 \quad (i \in I,\ s^* \in S,\ o \in O) \\ \sum_{i \in I} r_i^s = \sum_{s^* \in S} p_{s^*}^s = \sum_{o \in O} q_o^s = 1 \end{gathered} \tag{5}$$

trois répartitions de probabilités sur I, S et respectivement O, pour chaque état $s \in S$. Ici r_i^s représente la probabilité d'avoir à l'entrée i si l'état de l'automate était

Travail partiellement subventionné par CRSNGC A-4063.

s, $p^s_{s^*}$ représente la probabilité d'avoir l'état s^* si au moment antérieur l'état de l'automate avait été s, tandis que q^s_o est la probabilite du résultat o à la sortie si l'état de l'automate était s.

Notons

$$\pi^s_{is^*} = p_s(s^*|i)r^s_i \tag{6}$$

$$\theta^s_{io} = q_s(o|i)r^s_i \tag{7}$$

et supposons que

$$p^s_{s^*} = \sum_{i \in I} \pi^s_{is^*} \tag{8}$$

$$q^s_o = \sum_{i \in I} \theta^s_{io} \tag{9}$$

Evidemment la connaissance des probabilités conjointes $\pi^s_{is^*}$ et θ^s_{io} détermine complètement la structure de l'automate probabiliste.

Supposons que nous connaissons seulement les répartitions marginales (5) et les covariances $C(X_s, Y_s)$ et $C(X_s, Z_s)$ entre les variables aléatoires X_s, Y_s et Z_s définies pour chaque $s \in S$ respectivement sur les ensembles I, S et O. Evidemment, il y a plusieurs (même une infinité) de répartitions

$$\pi^s = (\pi^s_{is^*}), \quad \theta^s = (\theta^s_{io}) \tag{10}$$

compatibles avec ces données. Pour choisir, nous appliquons le principe de l'interdépendance minimale de S. Guiaşu (voir [3], [4]). Notons par

$$r^s = (r^s_i), \quad p^s = (p^s_{s^*}), \quad q^s = (q^s_o) \tag{11}$$

S. Guiaşu a introduit la divergence de la répartition aléatoire bi-dimensionnelle π^s, respectivement θ^s, de la probabilité produit $r^s p^s$, qui corresponde à l'indépendance entre l'entrée et les états au moment suivant, respectivement de la probabilité produit $r^s q^s$, qui correspond à l'indépendance entre l'entrée et la sortie, c'est-à-dire

$$W^*(\pi^s ; r^s, p^s) = \sum_{i \in I} \sum_{s^* \in S} \pi_{is^*} \ln \frac{\pi^s_{is^*}}{r_i p^s_{s^*}} \tag{12}$$

respectivement

$$W^*(\theta^s ; r^s, q^s) = \sum_{i \in I} \sum_{o \in O} \theta^s_{io} \ln \frac{\theta^s_{io}}{r^s_i q^s_o}\,. \tag{13}$$

Remarquons le fait que dans les expressions de W^*, π^s et respectivement θ^s ne sont pas compatibles avec les répartitions marginales r^s et p^s respectivement r^s et q^s. En accordance avec le principe de l'interdépendance minimale quand on connait les covariances $C(X_s, Y_s)$ et respectivement $C(X_s, Z_s)$ nous choisissons les répartitions bi-dimensionnelles π^s et θ^s qui minimisent la divergence W^* de l'indépendance compatible avec les covariances données. Si π^s est compatible avec les répartitions marginales r^s et p^s alors $W^*(\pi^s; r^s, p^s)$ se réduit à l'information mutuelle de Shannon. Dans le cas général, S. Guiaşu a minimisé la variation de l'information $W^*(\pi^s; r^s, p^s)$ quand on remplace la répartition produit $r^s p^s$ par la répartition bi-dimensionnelle π^s, pour choisir la répartition bidimensionnelle π^s la plus proche de l'indépendance, compatible avec ce que nous connaissons sur la dépendance entre l'entrée et les états, c'est-à-dire compatible avec la covariance $C(X_s, Y_s)$. S. Guiaşu a utilisé ce principe comme critère de construction de la plus large (ou la moins restrictive) répartition bi-dimensionnelle compatible avec une covariance.

La solution de ce principe variationnel est

$$\pi^s_{is^*} = \frac{1}{\Phi_s(\beta)} r^s_i p^s_{s^*} \exp\{-\beta(x^s_i - E(X_s))(y^s_{s^*} - E(Y_s))\} \tag{14}$$

où $E(X_s)$ et $E(Y_s)$ sont les valeurs moyennes de premier ordre des variables aléatoires X_s, respectivement Y_s, $\{x^s_i, i \in I\}$ sont les valeurs de la variable aléatoire X_s, $\{y^s_{s^*}, s^* \in S\}$ sont les valeurs de la variable aléatoire Y_s et

$$\begin{aligned}\Phi_s(\beta) = \sum_{i\in I} \sum_{s^*\in S} r^s_i p^s_{s^*} \cdot \\ \cdot \exp\{-\beta(x^s{}_i - E(X_s))(y^s{}_{s^*} - E(Y_s))\}\end{aligned} \tag{15}$$

β étant la solution unique de l'équation

$$\frac{\mathrm{d} \ln \Phi_s(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = -C(X_s, Y_s) \tag{16}$$

Similarement pour la répartition θ^s.

C'est pas facile de résoudre l'équation (16). Pour des raisons pratiques nous appliquons icil'approximation de deuxième ordre en prenant $1 + x + x^2/2$ pour $\exp\{x\}$.

Notons par $V(X_s)$ la variance de la variable aléatoire X_s et par $U(X_s)$ le moment central d'ordre 3.

De (15) nous obtenons

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_s(\beta) = \sum_{i\in I} \sum_{s^*\in S} r^s_i p^s_{s^*} \Big[1 - \beta(x^s_i - E(X_s))(y^s_{s^*} - E(Y_s)) + \\ + \frac{\beta^2}{2}(x^s_i - E(X_s))^2 (y^s_{s^*} - E(Y_s))^2\Big] = 1 + (\beta^2/2) V(X_s) V(Y_s)\end{aligned} \tag{17}$$

et en utilisant (14) on obtient

$$\bar{\pi}^s_{is^*}=\frac{2r^s_ip^s_{s^*}}{2+\beta^2V(X_s)V(Y_s)}\left[1-\beta(x^s_i-E(X_s))(y^s_{s^*}-E(Y))+\right.$$
$$\left.+\frac{\beta^2}{2}(x^s_i-E(X_s))^2(y^s_{s^*}-E(Y_s))^2\right]. \tag{18}$$

Introduisons cette expression dans l'égalité

$$C(X_s,\ Y_s)=\sum_{i\in I}\sum_{s^*\in S}(x^s_i-E(X_s))(y^s_{s^*}-E(Y_s))\pi^s_{is^*} \tag{19}$$

et nous obtenons

$$C(X_s,\ Y_s)=\frac{2}{2+\beta^2V(X_s)V(Y_s)}\left[-\beta V(X_s)V(Y_s)+\frac{\beta^2}{2}\ U(X_s)U(Y_s)\right] \tag{20}$$

équation qui donne deux valeurs réelles pour β dans les conditions

$$V(X_s)V(Y_s)C(X_s,\ Y_s)\neq U(X_s)U(Y_s) \tag{21}$$

et

$$V^2(X_s)V^2(Y_s)-2C(X_s,\ Y_s)[C(X_s,\ Y_s)V(X_s)V(Y_s)-U(X_s)U(Y_s)]\geqslant 0. \tag{22}$$

La condition (21) disparaîtra par la suite et la condition (22) est equivalente à la condition

$$\frac{U(X_s)U(Y_s)-\{2(V(X_s)V(Y_s))^3+(U(X_s)U(Y_s))^2\}^{\frac{1}{2}}}{2V(X_s)V(Y)}\leqslant C(X_s,\ Y_s)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{U(X_s)U(Y_s)+\{2(V(X_s)V(Y_s))^3+(U(X_s)U(Y_s))^2\}^{\frac{1}{2}}}{2V(X_s)V(Y_s)}. \tag{23}$$

Pour $\beta=0$ nous obtenons l'indépendance. On obtient une seule valeur pour β à savoir

$$\frac{-V(X_s)V(Y_s)+(J^s_{X,\,Y})^{\frac{1}{2}}}{C(X_s,\ Y_s)V(X_s)V(Y_s)-U(X_s)U(Y_s)} \tag{24}$$

où

$$J^s_{X,\,Y}=(V(X_s)V(Y_s))^2-$$
$$-2C(X_s,\ Y_s)[C(X_s,\ Y_s)V(X_s)V(Y_s)-U(X_s)U(Y_s)] \tag{25}$$

et par la suite

$$\bar{\pi}^s_{is^*}=r^s_ip^s_{s^*}\frac{A^2_s+A_sB_s(x_i-E(X_s))(y^s_{s^*}-E(Y_s))+D_s(x^s_i-E(X_s))^2(y^s_{s^*}-E(Y_s))^2}{A^2_s+V(X_s)V(Y_s)D_s} \tag{26}$$

où

$$\begin{aligned}
A_s&=V(X_s)V(Y_s)C(X_s,\ Y_s)-U(X_s)U(Y_s)\\
B_s&=V(X_s)V(Y_s)-(G_s)^{\frac{1}{2}}\\
D_s&=(V(X_s)V(Y_s))^2-A_sC(X_s,\ Y_s)-V(X_s)V(Y_s)(G_s)^{\frac{1}{2}}\\
G_s&=(V(X_s)V(Y_s))^2-2A_sC(X_s,\ Y_s).
\end{aligned} \tag{27}$$

Alors nous avons démontré le théorème

Théorème. *En utilisant l'approximation de deuxième ordre pour la solution du principe de l'interdépendance minimale compatible avec la covariance $C(X_s, Y_s)$, satisfaisant (23), la probabilité de passage interne de l'automate probabiliste de type Mealy est*

$$\tilde{p}_s(s^*|i) = \frac{\tilde{\pi}^s_{is^*}}{\sum_{s \in S} \tilde{\pi}^s_{is}} \tag{28}$$

où $\tilde{\pi}^s_{is^*}$ est donnée par (26).

Similarement pour la probabilité de passage externe $\tilde{q}_s(o|i)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHUNG K. L.: A Course in Probability Theory. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1974.

[2] GUIAŞU S.: Information Theory with Application. McGraw Hill, New York, London, Düsseldorf, 1977.

[3] GUIAŞU S.: On Entropic Measure of Connection and Interdependence between Subsystems of a Given Large System, The FORMATOR, Symposium on Mathematical Methods for the Analysis of Large-Scale Systems, Liblice, May 1978. Proceedings edited by J. Beneš and L. Bakule, Prague, 1979, 113—124.

[4] GUIAŞU S.—LEBLANC R.—REISCHER C.: On the Principle of Minimum Interpendence (à paraître).

[5] GUIAŞU S.—MARTIN L.—REISCHER C.: On the Structure of Random Modular Network. Journal of Comb. Inform. and System Sciences, 5, 205—214, 1980.

[6] MARTIN L.—REISCHER C.: Sur une application du principe pour minimiser l'interdependance dans les automates probabilistes. Combinatorics 1979, Proceedings edited by M. Deza and I. G. Rosenberg, Annals of Discrete Mathematics, 8, 189—193, 1980.

[7] SALOMAA A.: Theory of Automata. Perganom Press, Oxford, 1969.

[8] STARKE P. H.: Abstract Automata. American Elsevier Publ., London, 1972.

[9] WATANABE S.: Knowing and Guessing. A quantitative study of inference and information. Wiley, New York, 1969.

Reçu le June 19, 1980

Département de Mathematiques
Université du Québec à Trois-Rivières
Trois-Rivières, Qué., Canada
G9A 5H7

О СТРУКТУРЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АВТОМАТОВ

Андрэ Аллард

Резюме

В статье применяется приближение второй степени решения принципа минимальной внутренней зависимости к изучению вероятностных автоматов типа Мили.