Pavel Galajda

О применении бесквадратурного метода к решению некоторых функциональных уравнений

Mathematica Slovaca, Vol. 31 (1981), No. 1, 23--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136258

Math. Slovaca 31, 1981, No. 1, 23—38

О ПРИМЕНЕНИИ БЕСКВАДРАТУРНОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПАВЕЛ ГАЛАЙДА

Полное и подробное изложение бесквадратурной номографии для метода выравненных точек, разработано И. А. Вильнером в работах [1]—[9].

В настоящей работе дается теория построения вещественных транспарантных номограмм для системы уравнений рассмотренного ниже типа. Найдены необходимые и достаточные условия для существования требуемой анаморфозы. Эти условия имеют простой практически эффективный характер, т-к требуют лишь вычисления значений исвестных функций и их обыкновенных производных не выше второго порядка. Исследован смешанный бесквадратурно-дифференциальный метод решения функциональных уравнений не только для метода выравненных точек, но и в теории транспарантных номограмм, указанных в морфологической теории д'Оканем, разработанной Маргулисем и практичеки широко и систематически разработанной Г. С. Хованским.

§1. Пусть имеем систему уравнений

$$\begin{gathered} F(z_1; z_2; z_3; z_4; z_5; z_6; z_7; z_8) = 0 \\ \bar{F}(z_1; z_2; z_3; z_4; z_5; z_6; z_7; z_8) = 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

связывающих 8 переменных.

Найдем условия, при выполнении которых система (1.1) имеет своим следствием систему

$$\begin{gathered} f(z_1; z_2) - f(z_3; z_4) = f(z_5; z_6) - f(z_7; z_8), \\ \bar{f}(z_1; z_2) - \bar{f}(z_3; z_4) = \bar{f}(z_5; z_6) - \bar{f}(z_7; z_8), \end{gathered} \tag{1.2}$$

где два последних уравнения независимы.

Уравнения (1.2) изображаются номограммой с двумя бинарными полями

$$\begin{gathered} x_{12} = f_{12}, \quad y_{12} = \bar{f}_{12}; \\ x_{34} = f_{34}, \quad y_{34} = \bar{f}_{34} \end{gathered}$$

в плоскости π и двумя бинарными полями

$$x_{56}=f_{56}, \quad y_{56}=\bar{f}_{56};$$
$$x_{78}=f_{78}, \quad y_{78}=\bar{f}_{78}$$

в плоскости наложения π'.

Отметим, что этот тип номограммы позволяет выполнять над ней, как мы увидим, преобразование вида

$$x'=\alpha x+\beta y+\gamma$$
$$y'=\alpha x+\beta y+\bar{\gamma}\ .$$

Кроме того, очевидно положение плоскости π' на π можно выполнять и другой стороной, т. е. совмещение точки $(z_1; z_2)$ и точки z_{56}, а также точки $(z_3; z_4)$ и точки z_{78} можно заменять обратным и совершенно безразлично какие два поля строить в плоскости π и какие в плоскости π', как и не играет, следовательно, роли, какая из плоскостей считается неподвижной и какая подвижной.

Отсюда видно, что если структура данных зависимостей такова, что указанные свойства с ними несовместимы, то к таким зависимостям рассматриваемая интерпретация неприменима.

Мы предположим — это, конечно, существенное ограничение, — что каждое из уравнений (1.1) удовлетворяет условиям Гурса—Fрмоловой относительно переменных z_5, z_6 и z_7, z_8, т. е.

$$\varphi_{56}=f_{1234}, \quad \psi_{78}=\bar{f}_{1234}. \tag{1.3}$$

Найдем такие функции одного переменного Φ и $\bar{\Phi}$, что

$$\Phi\varphi_{56}-\bar{\Phi}\psi_{78}=\Phi f_{1234}-\bar{\Phi}\bar{f}_{1234}\equiv f_{12}-f_{34}. \tag{1.4}$$

Задача, таким образом, приводится к определению функций Φ и $\bar{\Phi}$ таких, что

$$\begin{aligned}\Phi f_{1234}-\bar{\Phi}\bar{f}_{1234}-\Phi f_{1'2'34}+\bar{\Phi}\bar{f}_{1'2'34}-\\ -\Phi f_{123'4'}+\bar{\Phi}\bar{f}_{123'4'}+\Phi f_{1'2'3'4'}-\bar{\Phi}\bar{f}_{1'2'3'4'}=0.\end{aligned} \tag{1.5}$$

В этом частном случае, когда φ_{56} и φ_{78} функции одного переменного, мы будем иметь вместо двух бинарных полей две шкалы, например z_5 или z_6 и z_7 или z_8.

Естественно тогда перенумировать переменные и считать $\varphi_{56}=z_5$ и $\psi_{78}=z_6$.

Тогда (1.4) перепишется так

$$\begin{gathered}z_5=f_{1234}, \quad z_6=\bar{f}_{1234}\\ \Phi(z_5)-\bar{\Phi}(z_6)=\Phi f_{1234}-\bar{\Phi}\bar{f}_{1234}.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Случай, когда (1.1) приводит к (1.3), т. е. когда имеют место условия

Гурса—Ермоловой по группам переменных (z_5, z_6) и (z_1, z_2, z_3, z_4) или (z_7, z_8) и (z_1, z_2, z_3, z_4) для первого и второго уравнений (1.1), не являются самым общим.

Пусть из (1.1) следует, что

$$z_7 = f_{123456}, \quad z_8 = \bar{f}_{123456}, \tag{1.7}$$

и пусть Φ и $\bar{\Phi}$ — неизвестные функции двух переменных. Тогда из (1.7) получим

$$\begin{aligned} \Phi(z_7\,;\, z_8) &= \Phi(f_{123456}\,;\, \bar{f}_{123456}) \\ \bar{\Phi}(z_7\,;\, z_8) &= \bar{\Phi}(f_{123456}\,;\, \bar{f}_{123456})\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Легко теперь получить функциональное уравнение проблемы общей анаморфозы системы (1.1) в виде системы (1.2).

Мы получим

$$\begin{aligned} &\Phi(f_{123456}\,;\, \bar{f}_{123456}) - \Phi(f_{12345^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{12345^{1}6^{1}}) - \\ &- \Phi(f_{1^{1}2^{1}3^{1}4^{1}56}\,;\, \bar{f}_{1^{1}2^{1}3^{1}4^{1}56}) + \Phi(f_{1^{1}2^{1}3^{1}4^{1}5^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{1^{1}2^{1}3^{1}4^{1}5^{1}6^{1}}) = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} &\Phi(f_{12345^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{12345^{1}6^{1}}) - \Phi(f_{1^{11}2^{11}345^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{1^{11}2^{11}345^{1}6^{1}}) - \\ &- \Phi(f_{123^{11}4^{11}5^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{123^{11}4^{11}5^{1}6^{1}}) + \Phi(f_{1^{11}2^{11}3^{11}4^{11}5^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{1^{11}2^{11}3^{11}4^{11}5^{1}6^{1}}) = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

и аналогичные два уравнения для функции $\bar{\Phi}$ вместо Φ.

Легко видеть, что условия (1.9), (1.10) достаточны для того, чтобы функция двух переменных Φ была требуемого вида. Действительно, выражая из (1.10) $\Phi(f_{12345^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{12345^{1}6^{1}})$ и подставляя вместо второго слагаемого уравнения (1.9) (или просто, складывая почленно (1.9) и (1.10) и разрешая относительно $\Phi(f_{123456}\,;\, \bar{f}_{123456})$, мы получим

$$\begin{aligned} \Phi(f_{123456};\, \bar{f}_{123456}) &= \Phi(f_{123^{11}4^{11}5^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{123^{11}4^{11}5^{1}6^{1}}) + \\ &+ \Phi(f_{1^{11}2^{11}345^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{1^{11}2^{11}345^{1}6^{1}}) + \Phi(f_{1^{1}2^{2}3^{1}4^{1}56}\,;\, \bar{f}_{1^{1}2^{1}3^{1}4^{1}56}) - \\ &- \Phi(f_{1^{1}2^{1}3^{1}4^{1}5^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{1^{1}2^{1}3^{1}4^{1}5^{1}6^{1}}) - \Phi(f_{1^{11}2^{11}3^{11}4^{11}5^{1}6^{1}}\,;\, \bar{f}_{1^{11}2^{11}3^{11}4^{11}5^{1}6^{1}}). \end{aligned}$$

и аналогичные равснства для $\bar{\Phi}$.

Фиксируя прозвольные постояннье z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1, z_5^1, z_6^1, z_1^{11}, z_2^{11}, z_3^{11}, z_4^{11} произвольным образом, в частности; полагая $z_1^{11} = z_1^1$, $z_2^{11} = z_2^1$, $z_3^{11} = z_3^1$, $z_4^{11} = z_4$ мы получим с помощью (1.8), что функции $\Phi(f_{123456}\,;\, \bar{f}_{123456})$ и $\bar{\Phi}(f_{123456}\,;\, \bar{f}_{123456})$ будут требуемого вида.

Итак, дело сводится к разысканию общего решения функционального уравнения (1.11), решение которого дает и $\bar{\Phi}$, а согласно (1.8) приводит к требуемому представлению. Разрешимость функционального уравнения (1.11) необходима и достаточна для анаморфозы.

Таким образом, можно сказать, что наиболее общая задача характеризуется общим выражением одной неизвестной функцией Φ от двух аргументов с помощью функционального уравнения (1.11), а частная задача анаморфозы (1.3) или — что по трудности то же самое — анаморфозы (1.6) с двумя шкалами z_5 и z_6 в плоскости π и двумя полями $(z_1; z_2)$ и $(z_3; z_4)$ в плоскости π' приводит к определению двух функций одного аргумента Φ и $\bar{\Phi}$, точнее их обычных производных $\Phi' f_{1234}$ и $\bar{\Phi}' \bar{f}_{1234}$, с помощью функционального уравнения (1.5). К этому решению мы и перейдем.

Применяя смешанный метод, мы будем обозначать условые производные $f_{1^1 2 3^1 4}$, а обычные, например, по z_2 $f^{0\,1\,0\,0}_{1^1 2 3^1 4}$. Это означает, что в частную производную

$$\frac{\partial f_{1234}}{\partial z_2}$$

поставлены вместо z_1 и z_3 соответственно z_1^1 и z_3^1, а $f^{0\,1\,2\,1}_{1^1 2^1 3^1 4}$ означает, что в

$$\frac{\partial^4 f_{1234}}{\partial z_2\, \partial z_3^2\, \partial z_4}$$

вметсо z_1 поставлено z_1^1, вметсто z_2 поставлено z_2^1, вместо z_3 поставлено z_3^1 и т. д. или что тоже заменить в f_{1234} z_1 на z_1^1, z_2 на z_2^1, z_3 на z_3^1, где z_1^1, z_2^1, z_3^1 — новые переменные, затем взяли производную

$$\frac{\partial^4 f_{1^1 2^1 3^1 4}}{\partial z_2^1\, \partial z_3^{12}\, \partial z_4}.$$

Впрочем, нам здесь производные выше первого порядка по каждому аргументу не потребуются. Если же обычных производных нет, то вместо того, чтобы писать $f^{0\,0\,0\,0}_{1^1 2^1 3^1 4}$ мы будем просто писать $f_{1^1 2^1 3^1 4^1}$.

Мы еще условимся, как это принято в теории функциональных уравнений, сложную функцию $\Phi(f_{1234})$ и т. п. писать так: Φf_{1234}.

§**2.** Дифференцируем (1.5) в обычном смысле: по z_1, потом по z_2; по z_3, потом по z_4; по z_1^1, потом по z_2^1; по z_3^1 потом по z_4^1. Мы получим соответственно 4 системы линей‥ых уравнений. Принимая во внимание, что обращение относительно $\Phi' f_{1234}$ и $\bar{\Phi}' \bar{f}_{1234}$ в нуль этих 8 частных производных необходимо и достаточно для постоянства левой части (1.5), а, следовательно, тождественного выполнения необходимого и достаточного условия анаморфозы (1.5) (поскольку, в частности, при $z_1^1 = z_1$, $z_2^1 = z_2$, $z_3^1 = z_3$, $z_4^1 = z_4$ заведемо имеем слева в (1.5) нуль, а, значит и при любых z_1, z_2, z_3, z_4, z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1), мы заключаем, что удовлетворение этим четырем системам уравнений необходимо и достаточно для возможности требуемой анаморфозы. При этом мы получим по паре вырежений для $\Phi' f_{1234}$ и $\bar{\Phi}' \bar{f}_{1234}$. Приравнивая между собой два выражения для $\Phi' f_{1234}$ с одной стороны, а затем два выражения для $\bar{\Phi}' \bar{f}_{1234}$

с другой стороны, мы автоматически получим из этих пар представлений функций $\Phi' f_{1234}$ и $\bar{\Phi}' \bar{f}_{1234}$ необходимые условия разрешимости рассматриваемой анаморфозы как условия тождественности двух видов решений.

Но мы выше отметили, что эти решения для $\Phi' f_{1234}$ и $\bar{\Phi}' \bar{f}_{1234}$ обеспечивают выполнение необходимого и достаточного условия анаморфозы (1.5).

Будут ли эти два условия тождественности двух форм решений необходимыми и достаточными условиями рассматриваемой анаморфозы? Мы позже каснемся этого интересного вопроса.

Здесь же отметим, что из изложенного выше следует важная теорема Колмогорова, что, если условия (1.5) тождественно выполняются для одной системы фиксированных постоянных z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1, то они выполняются и для всякой другой z_1^2, z_2^2, z_3^2, z_4^2.

Дифференцируя (1.9) по z_1, по z_2, по z_3, по z_4, мы получим

$$\Phi^{1\,0}_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} f^{100000}_{123456} + \Phi^{0\,1}_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} \bar{f}^{100000}_{123456} - \Phi^{\vee\,1\,0}_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} f^{100000}_{123456} - \Phi^{\vee\,0\,1}_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} \bar{f}^{100000}_{12345^16^1} = 0 \tag{2.1}$$

Решая указанные в конце предыдущего параграфа четыре системы линейных относительно $\Phi' f_{1234}$ и $\bar{\Phi} \bar{f}_{1234}$ уравнений, мы получим следующие двоякие выражения для неизвестных: (заимствует обозначения §3 работы [1]; условимся обозначать выражения в скобках буквами λ с индексами, причем выражения в скобках, от личающиеся лишь тем, что сходственные члены входят в одном с черточками сверху над λ, а в другом без черточек над λ с сохранением индекса)

$$\begin{aligned} \Phi' f_{1234} &= \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_4}{\lambda_5\lambda_6}\, \Phi' f_{1^12^13^14^1} - \frac{\bar{\lambda}_3\lambda_2 - \bar{\lambda}_1\lambda_4}{\lambda_5\lambda_6}\, \bar{\Phi}\bar{f}_{1^12^13^14^1} \equiv \\ &\equiv \frac{\lambda_7\lambda_8 - \lambda_9\lambda_{10}}{\lambda_{11}\lambda_{12}}\, \Phi' f_{1^12^13^14^1} - \frac{\lambda_7\bar{\lambda}_{10} - \lambda_9\bar{\lambda}_8}{\lambda_{11}\lambda_{12}}\, \bar{\Phi}' \bar{f}_{1^12^13^14^1}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}' \bar{f}_{1234} &= \frac{\lambda_1\bar{\lambda}_4 - \lambda_3\bar{\lambda}_2}{\lambda_5\lambda_6}\, \Phi' f_{1^12^13^14^1} - \frac{\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2}{\lambda_5\lambda_6}\, \bar{\Phi}' \bar{f}_{1^12^13^14^1} \equiv \\ &\equiv \frac{\bar{\lambda}_9\lambda_8 - \bar{\lambda}_7\lambda_{10}}{\lambda_{11}\lambda_{12}}\, \Phi' f_{1^12^13^14^1} - \frac{\bar{\lambda}_9\bar{\lambda}_{10} - \bar{\lambda}_7\bar{\lambda}_8}{\lambda_{11}\lambda_{12}}\, \bar{\Phi}' \bar{f}_{1^12^13^14^1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Условно дифференцируя равенства (2.2) и (2.3) по z_1, z_2, z_3, z_4, т. е. полагая $z_1 = z_1^1$, $z_2 = z_2^1$, $z_3 = z_3^1$, $z_4 = z_4^1$, мы получим, как легко проверить с помощью выражений (3.1) работы [1], важные, очевидно тождественные, равенства

$$\Phi' f_{1^12^13^14^1} = \Phi' f_{1^12^13^14^1} \equiv \Phi' f_{1^12^13^14^1}, \tag{2.2'}$$

$$\bar{\Phi}' \bar{f}_{1^12^13^14^1} = \bar{\Phi}' \bar{f}_{1^12^13^14^1} \equiv \bar{\Phi}' \bar{f}_{1^12^13^14^1}. \tag{2.3'}$$

Важность этого факта заключается в том, что фиксируя условные производные, т. е. придавая z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1 какие — нибудь определенные значения, мы можем в равенствах (2.2) и (2.3) заменить $\Phi' f_{1'2'3'4'}$ и $\bar{\Phi}' \bar{f}_{1'2'3'4'}$ произвольными постоянными α и β. Таким образом, имеем общие решения

$$(2.4)\qquad \Phi' f_{1234} = \alpha \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_4}{\lambda_5\lambda_6} - \beta \frac{\bar{\lambda}_3\lambda_2 - \bar{\lambda}_1\lambda_4}{\lambda_5\lambda_6} \equiv \equiv \alpha \frac{\lambda_7\lambda_8 - \lambda_9\lambda_{10}}{\lambda_{11}\lambda_{12}} - \beta \frac{\lambda_7\bar{\lambda}_{10} - \lambda_9\bar{\lambda}_8}{\lambda_{11}\lambda_{12}},$$

$$(2.5)\qquad \bar{\Phi}' \bar{f}_{1234} = \alpha \frac{\lambda_1\bar{\lambda}_4 - \lambda_3\bar{\lambda}_2}{\lambda_5\lambda_6} - \beta \frac{\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2}{\lambda_5\lambda_6} \equiv \equiv \alpha \frac{\bar{\lambda}_9\lambda_8 - \bar{\lambda}_7\lambda_{10}}{\lambda_{11}\lambda_{12}} - \beta \frac{\bar{\lambda}_9\bar{\lambda}_{10} - \bar{\lambda}_7\bar{\lambda}_8}{\lambda_{11}\lambda_{12}},$$

Следовательно, основные необходимые условия анаморфозируемости запишутся так:

$$(2.6)\qquad P_{1234} \equiv \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_4}{\lambda_5\lambda_6} \equiv \frac{\lambda_7\lambda_8 - \lambda_9\lambda_{10}}{\lambda_{11}\lambda_{12}}, \quad Q_{1234} \equiv \frac{\bar{\lambda}_3\lambda_2 - \bar{\lambda}_1\lambda_4}{\lambda_5\lambda_6} \equiv \frac{\lambda_7\bar{\lambda}_{10} - \lambda_9\bar{\lambda}_8}{\lambda_{11}\lambda_{12}},$$

$$(2.7)\qquad \bar{P}_{1234} \equiv \frac{\lambda_1\bar{\lambda}_4 - \lambda_3\bar{\lambda}_2}{\lambda_5\lambda_6} \equiv \frac{\lambda_8\bar{\lambda}_9 - \bar{\lambda}_7\lambda_{10}}{\lambda_{11}\lambda_{12}}, \quad \bar{Q}_{1234} \equiv \frac{\bar{\lambda}_3\bar{\lambda}_4 - \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2}{\lambda_5\lambda_6} = \frac{\bar{\lambda}_9\bar{\lambda}_{10} - \bar{\lambda}_7\bar{\lambda}_8}{\lambda_{11}\lambda_{12}}.$$

Представляет интерес упрощение этих условий, но мы не будем этим заниматся.

Точный смысл необходимого и достаточного условия анаморфозы (1.5) заключается в том, что если существуют такие функции Φ и $\bar{\Phi}$, что имеет место (1.5), то анаморфоза возможна, т. е. $\Phi f_{1234} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1234}$ имеет вид $f_{12} - f_{34}$.

Но выполнение условий (2.4) и (2.5), хотя необходимо и достаточно для выполнения (1.5) в такой формулировке: если существуют Φ и $\bar{\Phi}$ такие, что имеют место (2.4) и (2.5), то анаморфоза возможна.

Но условия (2.6) и (2.7), не содержащие вовсе неизвестных функций Φ и $\bar{\Phi}$, уже только следствия уравнений (2.4) и (2.5), и поэтому априори только необходимые условия для выполнения уравнений (2.4), (2.5), а это равносильно выполнению условия (1.5). Не удалось пока показать, что из условий (2.6) и (2.7) вытекает возможность найти такие функции Φ и $\bar{\Phi}$, чтобы имели место равенства (2.4) и (2.5).

Для этого достаточно было бы, очевидно доказать, что обозначенные нами через P и Q тождественные выражения, стоящие в левых и правых частях каждого из двух равенств (2.6), являются функциями f_{1234}, а обозначенные нами через $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ тождественные выражения, стоящие в левых и правых частях каждого из двух равенств (2.7), являются функциями $\bar{f}_{1234}$.

Пока это не доказано, приходится присоединить к условиям (2.6) и (2.7) эти требования в форме требования, чтобы ранги двух матриц из четырех столбцов и трех строк

$$(2.8)\qquad \left\| \begin{matrix} P_{1234}^{1000} & P_{1234}^{0100} & P_{1234}^{0010} & P_{1234}^{0001} \\ Q_{1234}^{1000} & Q_{1234}^{0100} & Q_{1234}^{0010} & Q_{1234}^{0001} \\ f_{1234}^{1000} & f_{1234}^{0100} & f_{1234}^{0010} & f_{1234}^{0001} \end{matrix} \right\|,$$

$$(2.9)\qquad \left\| \begin{matrix} \bar{P}_{1234}^{1000} & \bar{P}_{1234}^{0100} & \bar{P}_{1234}^{0010} & \bar{P}_{1234}^{0001} \\ \bar{Q}_{1234}^{1000} & \bar{Q}_{1234}^{0100} & \bar{Q}_{1234}^{0010} & \bar{Q}_{1234}^{0001} \\ \bar{f}_{1234}^{1000} & \bar{f}_{1234}^{0100} & \bar{f}_{1234}^{0010} & \bar{f}_{1234}^{0001} \end{matrix} \right\|,$$

были равны, или что тоже, чтобы существовали как функции точки, а не направления, производные

$$(2.10)\qquad \frac{dP_{1234}}{df_{1234}},\quad \frac{dQ_{1234}}{df_{1234}},\quad \frac{d\bar{P}_{1234}}{d\bar{f}_{1234}},\quad \frac{d\bar{Q}_{1234}}{d\bar{f}_{1234}}.$$

Эти условия в принципе проверяемые в форме равенства нулю якобианов второго порядка:

$$(2.11)\qquad \frac{D(P_{1234}\,;\,f_{1234})}{D(z_i\,;\,z_j)}=0;\quad \frac{D(Q_{1234}\,;\,f_{1234})}{D(z_i\,;\,z_j)}=0,$$

$$\frac{D(\bar{P}_{1234}\,;\,\bar{f}_{1234})}{D(z_i\,;\,z_j)}=0;\quad \frac{D(\bar{Q}_{1234}\,;\,\bar{f}_{1234})}{D(z_i\,;\,z_j)}=0,\qquad i<j=1,2,3,4.$$

Вероятнее всего, условия (2.11) независимы от необходимых условий анаморфозы (2.6), (2.7). Для доказательства независимости условий (2.11) от (2.6) и (2.7) достаточно, очевидно, построить пример, когда имеют место (2.6), (2.7) и не имеет место хотя бы одно из условий (2.11).

Независимо, однако, от решения этого вопроса, из вышеизложенного следует, что условия (2.6), (2.7), (2.11) необходимы и достаточны для существования требуемой анаморфозы.

Наши критерии (2.6), (2.7), (2.11) имеют, очевидно, в принципе простой практически эффективный характер, т-к требуют лишь вычисления значений известных функций f_{1234}, $\bar{f}_{1234}$ и их обыкновенных производных не выше второго порядка в (2.11).

Пусть условия (2.11) удовлетворены и, следовательно, существуют такие функции одной переменной P, Q, $\bar{P}$, $\bar{Q}$, что

$$(2.12)\qquad P_{1234}=Pf_{1234},\ Q_{1234}=Qf_{1234},\ \bar{P}_{1234}=\bar{P}\bar{f}_{1234},\ \bar{Q}_{1234}=\bar{Q}\bar{f}_{1234}.$$

Тогда, в силу (2.4), (2.5)

$$\Phi f_{1234}=\alpha\int_{f_{1^12^13^14^1}}^{f_{1234}} Pf_{1234}df_{1234}-\beta\int_{f_{1^12^13^14^1}}^{f_{1234}} Qf_{1234}df_{1234}+\gamma, \tag{2.13}$$

$$\bar\Phi \bar f_{1234}=\alpha\int_{f_{1^12^13^14^1}}^{f_{1234}} \bar P\bar f_{1234}d\bar f_{1234}-\beta\int_{f_{1^12^13^14^1}}^{f_{1234}} \bar Q\bar f_{1234}d\bar f_{1234}+\gamma, \tag{2.14}$$

где f_{1234} *в* (2.13) *и* $\bar f_{1234}$ в (2.14) суть верхние пределы интегралов, а γ и $\bar\gamma$ -произвольные постоянные интегрирования. Нижние пределы можно взять любые.

Мы видим, что функции $\Phi f_{1234}, \bar\Phi\bar f_{1234}$ определны с точностью до афинных преобразований

$$x'=\alpha x-\beta y+\gamma,\quad \bar x'=\alpha\bar x-\beta\bar y+\bar\gamma,$$

где существенно, что коэффициенты при x и $\bar x$, y и $\bar y$ одинаковы, а свободные члены γ и $\bar\gamma$ произвольны.

Подставив (2.13) и (2.14) в (1.5) и разрешив затем уравнение (1.5) относительно $\Phi f_{1234}-\bar\Phi\bar f_{1234}$, мы получим представление этой разности в виде $f_{12}-f_{34}$, а вместе с тем и равенство (1.4) или (1.6) в зависимости от того, рассматривается ли частный случай (1.3) системы (1.1) или случай (1.4).

Вычисление функций Φf_{1234}и $\bar\Phi\bar f_{1234}$ может быть существенно упрощено так. Пологая в (2.13) и (2.14) слева и справа $z_3=z_3^1$, $z_4=z_4^1$, легко найдем, что

$$\begin{aligned}\Phi f_{123^14^1}&=\alpha\int_{f_{1^12^13^14^1}}^{f_{123^14^1}} Pf_{123^14^1}df_{123^14^1}-\beta\int_{f_{1^12^13^14^1}}^{f_{123^14^1}} Qf_{123^14^1}df_{123^14^1}+\gamma,\\ \bar\Phi\bar f_{123^14^1}&=\alpha\int_{\bar f_{1^12^13^14^1}}^{\bar f_{123^14^1}} \bar P\bar f_{123^14^1}df_{123^14^1}-\beta\int_{\bar f_{1^12^13^14^1}}^{\bar f_{123^14^1}} \bar Qf_{123^14^1}d\bar f_{123^14}+\bar\gamma,\end{aligned} \tag{2.15}$$

Либо же полагая в (2.13) и (2.14) $z_1=z_1^1$, $z_2=z_2^1$ мы найдем

$$\begin{aligned}\Phi f_{1^12^134}&=\alpha\int_{f_{1^12^13^14^1}}^{f_{1^12^134}} Pf_{1^12^134}df_{1^12^134}-\beta\int_{f_{1^12^13^14^1}}^{f_{1^12^134}} Qf_{1^12^134}df_{1^12^134}+\gamma\\ \bar\Phi f_{1^12^134}&=\alpha\int_{f_{1^12^13^14^1}}^{f_{1^12^134}} \bar P\bar f_{1^12^134}d\bar f_{1^12^134}-\beta\int_{1^12^13^14^1}^{f_{1^12^134}} \bar Q\bar f_{1^12^134}d\bar f_{1^12^134}+\gamma\ .\end{aligned} \tag{2.16}$$

Равенства (2.15) или (2.16) по сравнению с (2.13), (2.14) проще для вычислений тем, что функции P, Q, $\bar P$, $\bar Q$, определяемые с помощью равенств (2.12), находятся из более простых уравнений. В этом можно убедиться, вычисляя с помощью формул (2.1) согласно (2.6) и (2.7) функции $P_{123^14^1}$, $Q_{123^14^1}$, $\bar P_{123^14^1}$, $\bar Q_{123^14^1}$, фигурирующие в (2.12) в случае (2.15), и функции $P_{1^12^134}$, $Q_{1^12^134}$, $\bar P_{1^12^134}$, $\bar Q_{1^12^134}$, фигурирующие в (2.12) в случае (2.16).

Тогда соответственно получим

$$(2.15') \qquad P_{123^14^1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_5}, \quad Q_{123^14^1}=\frac{\bar\lambda_3}{\lambda_5}, \quad \bar P_{123^14^1}=\frac{\lambda_3}{\lambda_5}, \quad \bar Q_{123^14^1}=\frac{\bar\lambda_1}{\lambda_5}$$

$$(2.16') \qquad P_{1^12^134}=\frac{\lambda_8}{\lambda_{11}}, \quad Q_{1^12^134}=\frac{\bar\lambda_{10}}{\lambda_{11}}, \quad \bar P_{1^12^134}=\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}}, \quad \bar Q_{1^12^134}=\frac{\bar\lambda_8}{\lambda_{11}}$$

Для вычислнения равенств (2.12) при $z_1=z_1^1$, $z_2=z_2^1$ соответственно при $z_3=z_3^1$, $z_4=z_4^1$, т. е. для существования функций одной переменной P, Q, $\bar P$, $\bar Q$, удовлетворяющих следующим соответствующим частным видам уравнений (2.12):

$$(2.15'') \quad P_{123^14^1}=Pf_{123^14^1}, \quad Q_{123^14^1}=Qf_{123^14^1}, \quad \bar P_{123^14^1}=\bar P\bar f_{123^14^1}, \quad \bar Q_{123^14^1}=\bar Q\bar f_{123^14^1},$$

$$(2.16'') \quad P_{1^12^134}=Pf_{1^12^134}, \quad Q_{1^12^134}=Qf_{1^12^134}, \quad \bar P_{1^12^134}=\bar P\bar f_{1^12^134}, \quad \bar Q_{1^12^134}=\bar Q\bar f_{1^12^134},$$

необходимо и достаточно выполнение следующих следствий совокупности условий ((2.11):

$$(2.15''') \qquad \frac{D(P_{123^14^1}; f_{123^14^1})}{D(z_1; z_2)}=0, \quad \frac{D(Q_{123^14^1}; f_{123^14^1})}{D(z_1; z_2)}=0,$$

$$\frac{D(\bar P_{123^14^1}; \bar f_{123^14^1})}{D(z_1; z_2)}=0, \quad \frac{D(\bar Q_{123^14^1}; \bar f_{123^14^1})}{D(z_1; z_2)}=0,$$

$$(2.16''') \qquad \frac{D(P_{1^12^134}; f_{1^12^134})}{D(z_3; z_4)}=0, \quad \frac{D(Q_{1^12^134}; f_{1^12^134})}{D(z_3; z_4)}=0,$$

$$\frac{D(\bar P_{1^12^134}; \bar f_{1^12^134})}{D(z_3; z_4)}=0, \quad \frac{D(\bar Q_{1^12^134}; \bar f_{1^12^134}}{D(z_3; z_4)}=0.$$

Условия (2.15'''), (2.16''') являются, конечно, следствиями условий (2.11), но, конечно, не наоборот. Мы здесь же отметим, что условия (2.6) и (2.7), если положить $z_3=z_3^1$, $z_4=z_4^1$ либо $z_1=z_1^1$, $z_2=z_2^1$, как легко проверить с помощью (2.1), тождественно удовлетворяются. Следовательно условия анаморфозы свелись бы лишь к (2.15''') либо к (2.16'''), если бы мы, однако, не доказали уже, что условия (2.6) и (2.7) должны удовлетворяться при переменных z_1, z_2, z_3, z_4.

Мы здесь же отметим, что определение функций P, Q, $\bar P$, $\bar Q$ вовсе не является необходимым для вычисления функций

$$(\Phi f_{1234}, \bar\Phi\bar f_{1234}), \quad (\Phi f_{123^14^1}, \bar\Phi\bar f_{123^14^1}), \quad (\Phi f_{1^12^134}, \bar\Phi\bar f_{1^12^134}).$$

Когда условия соответственно (2.11), (2.15'''), (2.16''') выполнены, то мы можем в ((2.13), (2.14)), (2.15), (2.16) выполнить все интеграции как интегрируют полные дифференциалы, заменив согласно соответственно (2.12), (2.15''), (2.16'') стоящие под знаком интегралов функции, выраженные через фигурирующие в правых частях этих ревенств функции P, Q, $\bar{P}$, $\bar{Q}$ равными им левыми частями, одновременно заменив

$$df_{1234},\ df_{123^14^1},\ df_{1^12^134},\ d\bar{f}_{1234},\ d\bar{f}_{123^14^1},\ d\bar{f}_{1^12^134}$$

их резвернутыми выражениями согласно формулам соответственно

$$df_{1234} = f_{1234}^{1000}\,dz_1 + f_{1234}^{0100}\,dz_2 + f_{1234}^{0010}\,dz_3 + f_{1234}^{0001}\,dz_4,$$

$$df_{123^14^1} = f_{123^14^1}^{1000}\,dz_1 + f_{123\,4^1}^{0100},$$

$$df_{1^12^134} = f_{1^12^134}^{0010}\,dz_3 + f_{1^12^134}^{0001}\,dz_4$$

и аналогичными равенствами для функции $\bar{f}$.

Заметим, что при этом в интегралах в равенствах (2.13), (2.14), а также (2.15) и (2.16) верхний предел надо будет заменить точкой соответственно (z_1; z_2; z_3; z_4), (z_1; z_2), (z_3; z_4). Мы, однако, при интегрировании полных дифференциалов, помня это, не будем указывать верхний предел, как и нижний. Мы будем помнить, что нижний предел везде есть либо точка (z_1^1; z_2^1; z_3^1; z_4^1), либо соответствующие ей значения функций $f_{1^12^13^14^1}$ и $\bar{f}_{1^12^13^14^1}$, а верхний либо точка (z_1; z_2; z_3; z_4), либо соответствующие ей значение функций f_{1234} и $\bar{f}_{1234}$. При этом, как легко проверить, $\gamma = \Phi f_{1^12^13^14}$, а $\bar{\gamma} = \bar{\Phi} f_{1^12^13^14^1}$, чем мы и воспользуемся сейчас.

Таким образом, вместо (2.13), (2.14), (2.15) и (2.16) будем иметь другие формулы, которые мы не будем выписовать ввиду их очевидности.

Согласно (1.5), (2.15), (2.16), (2.15'), (2.16'), (2.15''), (2.16'') будем иметь искомое представление, помня, что

$$\gamma = \Phi f_{1^12^13^14^1}, \quad \bar{\gamma} = \bar{\Phi}\bar{f}_{1^12^13^14^1}$$

Получаем:

$$\Phi f_{1234} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1234} = (\Phi f_{123^14^1} - \Phi f_{123^14^1}) + (\Phi f_{1^12^134} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1^12^134}) +$$

$$+ \bar{\Phi}\bar{f}_{1^12^13^14^1} - \Phi f_{1^12^13^14^1} = (\Phi f_{123^14^1} - \bar{\Phi}\bar{f}_{123^14^1}) + (\Phi f_{1^12^134} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1^12^134}) + \bar{\gamma} - \gamma =$$

$$= \left(\alpha\int\frac{\lambda_1}{\lambda_5}\,df_{123^14^1} - \beta\int\frac{\bar{\lambda}_3}{\lambda_5}\,df_{123^14^1} - \alpha\int\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\,d\bar{f}_{123^14^1} + \right.$$

$$\left. + \beta\int\frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_5}\,df_{123^14^1} + \gamma - \bar{\gamma}\right) + \left(\alpha\int\frac{\lambda_8}{\lambda_{11}}\,df_{1^12^134} - \beta\int\frac{\bar{\lambda}_{11}}{\lambda_{11}}df_{1^12^134} - \right.$$

$$-\alpha\int\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}}\,df_{1^1 2^1 34}+\beta\int\frac{\bar{\lambda}_8}{\lambda_{11}}\,d\bar{f}_{1^1 2^1 34}+\gamma-\bar{\gamma}\Big)+\bar{\gamma}-\gamma$$

Или

$$\Phi f_{1234}-\bar{\Phi}\bar{f}_{1234}=\left(\alpha\int\frac{\lambda_1}{\lambda_5}\,df_{123^1 4^1}-\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\,d\bar{f}_{123^1 4^1}+\beta\int-\frac{\bar{\lambda}_3}{\lambda_5}\,df_{123^1 4^1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_5}\,d\bar{f}_{123^1 4^1}+\gamma\right)+\left(\alpha\int-\frac{\lambda_8}{\lambda_{11}}\,df_{1^1 2^1 34}+\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}}\,d\bar{f}_{1^1 2^1 34}+\right.$$
$$\left.+\beta\int\frac{\bar{\lambda}_{10}}{\lambda_{11}}\,df_{1^1 2^1 34}-\frac{\bar{\lambda}_8}{\lambda_{11}}\,d\bar{f}_{1^1 2^1 34}+\bar{\gamma}\right), \tag{2.17}$$

или

$$\Phi f_{1234}-\bar{\Phi}\bar{f}_{1234}=(\alpha\mu_{12}+\beta\nu_{12}+\gamma)-(\alpha\mu_{34}+\beta\nu_{34}+\bar{\gamma}). \tag{2.18}$$

Меняя значения α и β, получим

$$\Phi f_{1234}-\bar{\Phi}\bar{f}_{1234}=(\alpha_1\mu_{12}+\beta_1\nu_{12}+\gamma)-(\alpha_1\mu_{34}+\beta_1\nu_{34}+\bar{\gamma}). \tag{2 19}$$

Уравнения полей $(z_1; z_2)$ и $(z_3; z_4)$ будут

$$x_{12}=\alpha\mu_{12}+\beta\nu_{12}+\gamma,\quad x_{34}=\alpha\mu_{34}+\beta\nu_{34}+\bar{\gamma} \tag{2.20}$$

$$y_{12}=\alpha_1\mu_{12}+\beta_1\nu_{12}+\gamma_1,\quad y_{34}=\alpha_1\mu_{34}+\beta_1\nu_{34}+\bar{\gamma}_1. \tag{2.21}$$

Таким образом номограмма рассматриваемого типа допускает общую шестичленную группу. Эти поля не будут вырождаться, если

$$\frac{D(x_{12}; y_{12})}{D(z_1; z_2)}\not\equiv 0,\quad \frac{D(x_{34}; y_{34})}{D(z_3; z_4)}\not\equiv 0. \tag{2.22}$$

Вырождение в изолированных точках мы не исключаем.

Условия (2.22) дают

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha_1 & \beta_1\end{vmatrix}\neq 0,\quad \begin{vmatrix}\mu_{12}^{10} & \mu_{12}^{01}\\ \nu_{12}^{10} & \nu_{12}^{01}\end{vmatrix}\not\equiv 0,\quad \begin{vmatrix}\mu_{34}^{10} & \mu_{34}^{01}\\ \nu_{34}^{10} & \nu_{34}^{01}\end{vmatrix}\not\equiv 0, \tag{2.23}$$

где выражения для функций μ_{12}, ν_{12}, μ_{34}, ν_{34} непосредственно усматриваются из сравнения (2.18) и (2.17).

После этого написать выражения для двух якобианов (2.23) не представляет никакого труда. Можно их написать в форме:

$$\begin{vmatrix}\frac{\lambda_1}{\lambda_5}f_{123^1 4^1}^{1000}-\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\bar{f}_{123^1 4^1}^{1000}; & \frac{\lambda_1}{\lambda_5}f_{123^1 4^1}^{0100}-\frac{\lambda_3}{\lambda_5}\bar{f}_{123^1 4^1}^{0100}\\ -\frac{\bar{\lambda}_3}{\lambda_5}f_{123^1 4^1}^{1000}+\frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_5}\bar{f}_{123^1 4^1}^{1000}; & -\frac{\bar{\lambda}_3}{\lambda_5}f_{123^1 4^1}^{0100}+\frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_5}\bar{f}_{123^1 4^1}^{0100}\end{vmatrix}\equiv \tag{2.24}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_5} & -\dfrac{\lambda_3}{\lambda_5} \\ -\dfrac{\bar\lambda_3}{\lambda_5} & \dfrac{\bar\lambda_1}{\lambda_5} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f^{1000}_{123^14^1} & f^{1000}_{123^14^1} \\ f^{0100}_{123^14^1} & \bar f^{0100}_{123^14^1} \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Или, используя предпоследнюю формулу (2.1), получим

$$\frac{\lambda_1\bar\lambda_1 - \lambda_3\bar\lambda_3}{\lambda_5^2}\mu_1 \not\equiv 0 \tag{2.24'}$$

Условие (2.24) с помощью (2.1) можно заменить более простым

$$\frac{-\bar\lambda_5(f^{0010}_{1^12^13^14^1}\ \bar f^{0001}_{1^12^13^14^1} - f^{0001}_{1^12^13^14^1}\ \bar f^{0010}_{1^12^13^14^1})\mu_1}{\lambda_5^2} \not\equiv 0, \tag{2.24''}$$

где в скобках есть значение $\bar\lambda_5$, являющимся согласно (2.1) лишь функцией z_1 и z_2 при $z_1 = z_1^1$, $z_2 = z_2^1$, отличие от нуля которого всегда можно обеспечить, если только

$$\mu_1\bar\lambda_5 \not\equiv 0. \tag{2.24'''}$$

Так просто выглядит условие невырождаемости поля (z_1, z_2) в двухпараметрическую шкалу. Аналогично мы получим

$$\begin{vmatrix} \dfrac{-\lambda_8}{\lambda_{11}} f^{0010}_{1^12^134} + \dfrac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}} \bar f^{0010}_{1^12^134} & \dfrac{-\lambda_8}{\lambda_{11}} f^{0001}_{1^12^134} + \dfrac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}} \bar f^{0001}_{1^12^134} \\ \dfrac{\bar\lambda_{10}}{\lambda_{11}} f^{0010}_{1^12^134} - \dfrac{\bar\lambda_8}{\lambda_{11}} \bar f^{0010}_{1^12^134} & \dfrac{\bar\lambda_{10}}{\lambda_{11}} f^{0001}_{1^12^134} - \dfrac{\bar\lambda_8}{\lambda_{11}} \bar f^{0001}_{1^12^134} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \dfrac{-\lambda_8}{\lambda_{11}} & \dfrac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}} \\ \dfrac{\bar\lambda_{10}}{\lambda_{11}} & \dfrac{-\bar\lambda_8}{\lambda_{11}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f^{0010}_{1^12^134} & \bar f^{0010}_{1^12^134} \\ f^{0001}_{1^12^134} & \bar f^{0001}_{1^12^134} \end{vmatrix} \not\equiv 0. \tag{2.25}$$

Или, используя последнюю формулу (2.1), получим

$$\frac{\lambda_8\bar\lambda_8 - \lambda_{10}\bar\lambda_{10}}{\lambda_{11}^2}\mu_2 \not\equiv 0. \tag{2.25'}$$

Условие (2.25′) с помощью (2.1) можно записать более простым

$$\frac{-\bar\lambda_{11}(\bar f^{1000}_{1^12^13^14^1}\ f^{0100}_{1^12^13^14^1} - f^{1000}_{1^12^13^14^1}\ \bar f^{0100}_{1^12^13^14^1}}{\lambda_{11}^2}\mu_2 \not\equiv 0, \tag{2.25''}$$

где в скобках есть значение $\bar{\lambda}_{11}$, являющимся лишь функцией z_3 и z_4 при $z_3 = z_3^1$, $z_4 = z_4^1$, отличие от нуля которого всегда можно обеспечить, если только

$$(2.25''') \qquad \mu_2 \bar{\lambda}_{11} \not\equiv 0.$$

Так просто выглядит условие невырождимости поля $(z_3; z_4)$ в двухпараметрическую шкалу.

Эти последние исследования полей $(z_1; z_2)$ и $(z_3; z_4)$ существенно важные для нас тем, чо они выявили ограничения, которым необходимо подвергнуть условные дифференцирования или, что то же самое априори, произвольные постоянные значения z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1, фигурирующие во всех формулах, можно выбрать совершенно произвольно, лишь бы не выполнялись неравенства (2.24''') и (2.25''') и, как видно из формул (2.4), (2.5), чтобы

$$(2.26) \qquad \lambda_5 \lambda_6 \lambda_{11} \lambda_{12} \not\equiv 0$$

Имея ввиду выражение μ_1 и μ_2 через λ_6 и λ_{12} (см. два последних равенства (2.1)), мы видим, что необращение в нуль μ_1 и μ_2 в (2.24''') и (2.25''') вытекает из неравенства (2.26). Далее, так как $\lambda_5 = \lambda_{12}(z_3 = z_3^1; z_4 = z_4^1)$; и $\lambda_{11} = \lambda_6(z_1 = z_1^1; z_2 = z_2^1)$, то возможность удовлетворения неравенства (2.26) вытекает из неравенства

$$(2.27) \qquad \lambda_6 \lambda_{12} \not\equiv 0.$$

Поскольку это обеспечивает возможность выбора таких $z_1 = z_1^1$, $z_2 = z_2^1$, $z_3 = z_3^1$, $z_4 = z_4^1$, что $\mu_1 \mu_2 \not\equiv 0$, то к (2.27) согласно (2.24'''), (2.25''') остается добавить требование

$$(2.28) \qquad \bar{\lambda}_5 \bar{\lambda}_{11} \not\equiv 0.$$

Это всегда можно будет обеспечить, так как из (2.1) видно, что

$$(2.29) \qquad \lambda_5 = \lambda_{12}(z_3 = z_3^1; z_4 = z_4^1), \quad \bar{\lambda}_{11} = \bar{\lambda}_6(z_1 = z_1^1; z_2 = z_2^1) : \bar{\lambda}_6 \bar{\lambda}_{12} \not\equiv 0.$$

И так, условие невырождаемости полей есть

$$(2.30) \qquad \lambda_6 \bar{\lambda}_6 \lambda_{12} \bar{\lambda}_{12} \not\equiv 0$$

Точнее: при условиях (2.30) существуют постоянные z_1^1, z_1^1, z_3^1, z_4^1 такие, что если выполнены необходимые и достаточные условия анаморфозы (2.6), (2.7) и (2.11), то существует требуемого вида номограмма с невырождающимся полями. Если же $\bar{\lambda}_6 \bar{\lambda}_{12} \equiv 0$, но имеет место (2.27), то будем иметь номограмму с одним или двумя вырождающимися полями в зависимости от того, будет ли: 1) $\bar{\lambda}_6 \equiv 0$, $\bar{\lambda}_{12} \not\equiv 0$ (поле $(z_3; z_4)$ вырождается в двух параметрическую шкалу согласно (2.25''')); 2) $\bar{\lambda}_6 \not\equiv 0$, $\bar{\lambda}_{12} \equiv 0$ (поле $(z_1; z_2)$ вырождается в двухпараметрическую шкалу согласно (2.24''')); 3) $\bar{\lambda}_6 \equiv 0$, $\bar{\lambda}_{12} \equiv 0$ (оба поля вырождаются в двухпараметрические шкалы).

Остается открытым вопрос определятся ли с помощью (2 15′) или (2 16′) при выполнении (2.6) и (2.7) те же самые функции P, Q, $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ как и при общем подходе к их определению с помощью (2.12).

Если бы это оказалось так, то необходимые и достаточные условыя анаморфозы (2.6), (2.7), (2.17) заменились бы более простыми условиями (2.6), (2.7), (2.15‴) либо равносильными им в этом предположении у ловиями (2.6), (2.7), (2.16‴), а само вычисление функ ций $\Phi f_{12\ 4}$, $\Phi\bar{f}_1$ с помощью (2.13) и (2.14) заменилось бы более простым в силу (2.15′) или (2 16′) вычислением с помощью равенств соответственно (2 15) или (2.16). Вероятно это так и есть.

Но этот анализ не входит в задачи этой статьи, цель которой показать значение смешанного метода бесквадратурной анаморфозы для решения систем функциональных уравнений, встречающихся не толь о в ме оде выравненных точек, но и в транспарантной номографии.

Это тем более стоило сделать, положив тем самым начало соответст у-ющим исследованиям, потому что в книге [11], посвященнои своду результа-г в в области функциональных уравнений, помимо других практиков, ничего е говорится о функциональных уравнениях транспарантной номографии и не рассматривается важный бесквадратурный и смешанный методы решения функциональных уравнений.

В этом методе попрежнему остается важнейшеи нерешенной задачей указание эффективного критерия зависимых однозначных недифференцируемых функций.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе выведены условия, при выполнении которых система (1 1) имеет своим следствием систему (1.2) и изображается номограммой с двумя бинарными полями Найдены функции Φ и $\bar{\Phi}$ удовлетворяющие уравнению (1.5) Получены функциональные уравнения (1.9) и (1.10) проблемы общей анаморфозы. Эти условия достаточны для того, чтобы функция двух переменных Φ была требуемого вида. Далее дело сводится к разысканию общего решения функционального уравнения (1.11), резрешимость которого необходима и достаточна для анаморфозы.

Общие решения (2.4) и (2.5) исследованы смешанным бесквадратурно-дифференциальным методом в теории транспарантных номограмм. Условия (2.4) и (2.5) необходимы и достаточны для выполнения (1.5), но условия (2.6) и (2.7), не содержащие неизвестных функций Φ и $\bar{\Phi}$, только необходимые условия. Не удалось пока показать, что из условий (2 6) и (2.7) вытекает нахождение функций Φ и $\bar{\Phi}$, чтобы имели место равенства (2 4) и (2.5). Поэтому, пока это не доказано, нужно к условиям (2.6) и (2.7) присоединить требования, чтобы ранги двух матриц (2.8) и (2.9) были равны, или что тоже, чтобы существовали как функции точки, а не направления, поизводные (2.10), проверяемые во форме (2.11). Тогда искомые функции Φ и $\bar{\Phi}$ найдутся интегрированием уравнений в полных дифференциалах (2.2), (2.3). Искомое представление (1.4) мы получим, разрешая уравнение (1.5) относительно $\Phi f_{1234} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1234}$. Показано тоже упрощение вычисления функций Φf_{1234} и $\bar{\Phi}\bar{f}_{1234}$. После интегрирования уравнений (2.2) и (2.3) получим (2.19) и уравнения полей (2.20) и (2.21). Таким образом, номограмма рассматриваемого типа допускает общую шестичленную группу. Далее выведено условие (2.30) невыроджимости полей и разобраны его особые случаи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ВИЛЬНЕР, И. А.: Бесквадратурная номография и номографирование в комплексных проективных плоскостях, Труды четвертого Всесоюзного Математического съезда изд. »Наука«, Ленинград (1964), 186—194.

[2] ВИЛЬНЕР, И. А.: Бесквадратурная номография. Алгебраическая номография и проблема анаморфозы функций в двух мерной плоскости при $n = 6$ переменных, Часть I, II, Mat. časop. SAV, 17 (1967) № 3, 169—205, № 4, 266—281.

[3] ВИЛЬНЕР, И. А.: Алгебраическое решение проблемы анаморфозы функций в инвариантной форме, ДАН, т. 90, № 1, (1953), 5—8.

[4] ВИЛЬНЕР, И. А.: Топология и геометрия пространства мнимой анаморфозы, УМН, (1958), Т 8 в. 4 (82) 173—178.

[5] ВИЛЬНЕР, И. А.: Бесквадратурное номографирование обобщенной функции К. Я. Залта, Ученые записки Латв Гос. университета, Рига, (1956), Т. 28, в. 4, 131—139.

[6] ВИЛЬНЕР, И. А : О линейной зависимости функций и методе условных производных в бесквадратурной номографии, Сборник статей ВЗПИ, 7 (1954), 105—128.

[7] ВИЛЬНЕР, И. А.: Бесквадратурное представление в виде определителя Массо в многомер-ом пространстве недифференцируемых и дифференцируемых функций многих перемен-ны в инвариантной форме, Сборник статей ВЗПИ, 9, (1955), 84—115.

[8] ВИЛЬНЕР, И. А.: Проблема общей анаморфозы в пространстве и на плоскости, ее алгебраизация и стереоскопическая номография, Сборник статей ВЗПИ, 21 (1958), 98—118.

[9] ВИЛЬНЕР, И А.: Проблема анаморфозы, ДАН СССР, (1951), т. 77, №2, 177—180.

[10] ХОВАНСКИЙ, Г. С. Основы номографии, Москва (1976) 1—351.

[11] ACZÉL, I.: Vorlesung n über Functionalgleichungen und ihre Anwendungen, Berlin (1961).

[12] ГАЛАИДА, П : Единственность анаморфозы функций в невырожденном случае, Mat. Čas. SAV, 23 (1973) 106—114.

[13] ГАЛАЙДА, П.: О зависимости функций, принцип инвариантности и решение задач в виде номографируемых суперпозиций, Nomografický zborník, VŠT — Košice, (1970), 53—84.

[14] ГАЛАЙДА, П.: Алгебраизация и дифференциализация критериев представимости зависимостей в виде номографируемых суперпозиций, Nomografický zborník, VŠT — Košice, (1970), 85—115

[15] ГАЛАЙДА, П.: Решение функциональных уравнений номографии необходимые и достаточные условия при алгебраизации критериев, Nomografický zborník, VŠT — Košice, (1970), 116—137.

[16] ГАЛАЙДА, П.: N-функциональные уравнения и проблема общей анаморфозы многих переменных, L'analyse numérique et la theorie de l'pproximation, Tome 5, (1976), 145—158.

Поступило 15. 9. 1977

Katedra matematickej informatiky EF
Vysokej školy technickej
Zbrojnícka 3
040 01 Košice