František Machala

Projektive Ebenen mit Homomorphismus und erweiterte lokale Ternärringe

Mathematica Slovaca, Vol. 29 (1979), No. 3, 227--237

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136212

Math. Slovaca 29, 1979, No. 3

PROJEKTIVE EBENEN MIT HOMOMORPHISMUS UND ERWEITERTE LOKALE TERNÄRRINGE

FRANTIŠEK MACHALA

Zu einem Viereck (o, e, u, v) in projektiver Ebene π läßt sich ein Ternärkörper $T_\pi = T(o, e, u, v)$ erklären und zu jedem Ternärkärper T läßt sich umgekehrt eine projektive Ebene π_T konstruieren. Die projektiven Ebenen π, $\pi_{T(o,e,u,v)}$ und die Ternärkörper T, T_{π_T} sind dabei isomorph (vgl. z. B. [4]). In folgender Arbeit werden ähnliche Behauptungen für projektive Ebenen mit Homomorphismus [1] (kurz PK—Ebenen) und erweiterte lokale Ternärringe bewiesen.

Definition 1. *Eine PK—Ebene ist definiert als ein Tripel* $(\pi, \bar{\pi}, \varkappa)$, *wo* $\pi = (P, L, I)$ *eine Inzidenzstruktur,* $\bar{\pi} = (\bar{P}, \bar{L}, \bar{I})$ *eine projektive Ebene,* $\varkappa : \pi \to \bar{\pi}$ *ein Epimorphismus sind, wobei es gilt:*

$$x, y \in P,\ x\varkappa \neq y\varkappa \Rightarrow \exists!\, p \in L;\ x, y\ I\ p. \tag{1}$$

$$x, y \in L,\ x\varkappa \neq y\varkappa \Rightarrow \exists!\, p \in P;\ p\ I\ x, y. \tag{2}$$

Unter einer PK—Ebene werden wir weiter direkt die Inzidenzstruktur π aus Definition 1 verstehen. Die einzige nach (1) durch die Punkte x, y bestimmte Gerade p bezeichnen wir mit $p = xy$. Mit $p = x \Box y$ bezeichnen wir den nach (2) durch die Geraden x, y bestimmten einzigen Punkt. Ein Quadrupel (o, e, u, v) von Punkten der PK—Ebene π heißt ein Viereck, falls keine drei Punkte aus $o\varkappa$, $e\varkappa$, $u\varkappa$, $v\varkappa$ auf einer Geraden in $\bar{\pi}$ enthalten sind. Im folgenden wird stets angenommen, daß in der PK—Ebene π ein Viereck (o, e, u, v) festgewählt ist. Wir setzen dabei $Q = \{x \in P \mid x\ I\ ou\}$, $R' = \{x \in Q \mid x\varkappa = u\varkappa\}$, $R = Q \setminus R'$, $Q_1 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid b \in R' \Rightarrow a \in R'\}$, $Q_2 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid a \in R' \Rightarrow b \in R'\}$.

Wir definieren eine Abbildung $\xi : Q_1 \to P$ durch folgende Vorschriften (P1)—(P3):

(P1) Es sei (x, y) ein beliebiges Paar aus $R \times R$ und setzen wir $w = vy \Box oe$, $s = uw \Box xv$. Dann $s = (x, y)^\xi$.

(P2) Es sei $(x, y) \in R' \times R$. Setzen wir $n = yv \Box oe$, $n_1 = nu \Box ev$, $s = on_1 \Box xv$, so $s = (x, y)^\xi$.

(P3) Es sei $(x, y) \in R' \times R'$. Setzen wir $h = xv \square oe$, $w = yv \square oe$, $w_1 = uw \square ev$, $s = ow_1 \square uh$, so $s = (x, y)^\xi$.

ξ ist eine bijektive Abbildung der Menge Q_1 auf P ([3]).

Ferner definieren wir eine Abbildung $\eta : Q_2 \to L$ durch folgende Vorschriften (L1)—(L3):

(L1) Es sei $(m, k) \in R \times R$. Setzen wir $n = mv \square oe$, $n_1 = nu \square ve$, $p = on_1 \square uv$, $z = vk \square oe$, $q = uz \square ov$, so $r = pq = (m, k)^\eta$.

(L2) Es sei $(m, k) \in R \times R'$. Setzen wir $h = oe \square kv$, $w = uh \square ev$, $q = ow \square uv$, so $r = mq = (m, k)^\eta$.

(L3) Es sei $(m, k) \in R' \times R'$. Setzen wir $h = kv \square oe$, $q = uh \square ov$, so $r = mq = (m, k)^\eta$.

η ist eine bijektive Abbildung der Menge Q_2 auf L ([3]).

Wir bezeichnen $Q' = \{(a, b, c) \in Q \times Q \times Q \mid b \in R' \Rightarrow c \in R'\}$ und definieren eine Abbildung t: $Q' \to Q$ durch

1) Gilt $k \in R$ oder $x, k \in R'$, $m \in R$, so $y = t(x, m, k) \Leftrightarrow (x, y)^\xi \; I \; (m, k)^\eta$.

2) Für alle unter 1 nicht angeführten Fälle gilt $x = t(y, m, k) \Leftrightarrow (x, y)^\xi \; I \; (m, k)^\eta$.

Satz 1. *Das Tripel $T(o, e, u, v) = (R, R', t)$, wo R, R', t oben definiert sind, ist ein erweiterter lokaler Ternärring* ([3], *Satz* 3).

Bezeichnen wir $\bar{Q} = \{x\varkappa \in \bar{P} \mid x\varkappa \; \bar{I} \; (ou)\varkappa\}$, $\bar{R} = \bar{Q} \setminus \{u\varkappa\}$, $\bar{Q}_1 = \{(a\varkappa, b\varkappa) \mid (a, b) \in Q_1\}$, $\bar{Q}_2 = \{(a\varkappa, b\varkappa) \mid (a, b) \in Q_2\}$ und setzen wir $(x\varkappa, y\varkappa)^{\bar{\xi}} = (x, y)^\xi \varkappa \; \forall (x\varkappa, y\varkappa) \in \bar{Q}_1$, $(x\varkappa, y\varkappa)^{\bar{\eta}} = (x, y)^\eta \varkappa \; \forall (x\varkappa, y\varkappa) \in \bar{Q}_2$, so ist $\bar{\xi}$ bzw. $\bar{\eta}$ eine bijektive Abbildung der Menge $\bar{Q}_1$ bzw. $\bar{Q}_2$ auf die Menge $\bar{P}$ bzw. $\bar{L}$. Ferner bezeichnen wir $\bar{Q}' = \{(a\varkappa, b\varkappa, c\varkappa) \mid (a, b, c) \in Q'\}$ und erklären wir eine Abbildung $\bar{t}$: $\bar{Q}' \to \bar{Q}$ durch

1) Gilt $k\varkappa \neq u\varkappa$, so $y\varkappa = \bar{t}(x\varkappa, m\varkappa, k\varkappa) \Leftrightarrow (x\varkappa, y\varkappa)^{\bar{\xi}} \; \bar{I} \; (m\varkappa, k\varkappa)^{\bar{\eta}}$.

2) $x\varkappa = \bar{t}(y\varkappa, m\varkappa, u\varkappa) \Leftrightarrow (x\varkappa, y\varkappa)^{\bar{\xi}} \; \bar{I} \; (m\varkappa, u\varkappa)^{\bar{\eta}}$.

Satz 2. *Das Tripel $\bar{T}(o\varkappa, e\varkappa, u\varkappa, v\varkappa) = (\bar{R}, u\varkappa, \bar{t})$ ist ein erweiterter Ternärkörper und es gilt $[t(a, b, c)]\varkappa = \bar{t}(a\varkappa, b\varkappa, c\varkappa) \; \forall (a, b, c) \in Q'$* ([3], *Beweis des Satzes* 3).

Es sei $T = (R, R', t)$ ein erweiterter lokaler Ternärring [2]. Wir bezeichnen $Q = R \cup R'$, $Q_1 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid b \in R' \Rightarrow a \in R'\}$, $Q_2 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid a \in R' \Rightarrow b \in R'\}$. Es seien weiter P_1, L_1 elementfremde Mengen, ξ_1 eine bijektive Abbildung von Q_1 auf P_1 und η_1 eine bijektive Abbildung von Q_2 auf L_1. Wir setzen $(x, y)^{\xi_1} = [x, y] \; \forall (x, y) \in Q_1$, $(m, k)^{\eta_1} = \langle m, k \rangle \; \forall (m, k) \in Q_2$ und erklären eine Inzidenzrelation $I_1 \subset P_1 \times L_1$ durch

1) Gilt $k \in R$ oder $x,\ k \in R',\ m \in R$, dann $[x, y]\ I_1\ \langle m, k\rangle \Leftrightarrow y = t(x, m, k)$.

2) $[x, y]\ I_1\ \langle m, k\rangle \Leftrightarrow x = t(y, m, k)$ in allen in 1 nicht angeführten Fällen.

Das Tripel $\pi_T = (P_1, L_1, I_1)$ stellt eine Inzidenzstruktur dar.

Es seien $\mathcal{T} = (R, t\,|\,R)$ der lokale Ternärring mit maximalem Ideal R_0, $\mathcal{T}' = (R/R_0, t')$ der Restklassen—Ternärkörper und $\bar{T} = (R/R_0, \{R'\}, \bar{t})$ der erweiterte Ternärkörper, die in [2] durch $T = (R, R', t)$ definiert werden. Wir bezeichnen $\bar{Q} = R/R_0 \cup \{R'\}$, $\bar{Q}_1 = \{(\bar{a}, \bar{b})\,|\,(a, b) \in Q_1\}$, $\bar{Q}_2 = \{(\bar{a}, \bar{b})\,|\,(a, b) \in Q_2\}$. Sind $\bar{P}_1, \bar{L}_1$ elementfremde Mengen, $\bar{\xi}_1$ eine bijektive Abbildung von $\bar{Q}_1$ auf $\bar{P}_1$ und $\bar{\eta}_1$ eine bijektive Abbildung von $\bar{Q}_2$ auf $\bar{L}_1$, dann setzen wir $[\bar{x}, \bar{y}] = (\bar{x}, \bar{y})^{\bar{\xi}_1}\ \forall(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Q}_1$, $\langle \bar{m}, \bar{k}\rangle = (\bar{m}, \bar{k})^{\bar{\eta}_1}\ \forall(\bar{m}, \bar{k}) \in \bar{Q}_2$ und erklären eine Inzidenzrelation $\bar{I}_1 \subset \bar{P}_1 \times \bar{L}_1$ durch

1) Gilt $k \notin R'$, so $[\bar{x}, \bar{y}]\ \bar{I}_1\ \langle \bar{m}, \bar{k}\rangle \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k})$.

2) Gilt $k \in R'$ so $[\bar{x}, \bar{y}]\ \bar{I}_1\ \langle \bar{m}, \bar{k}\rangle \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k})$.

Nach [3], Satz 2, stellt $\pi_{\bar{T}} = (\bar{P}_1, \bar{L}_1, \bar{I}_1)$ eine projektive Ebene dar und nach Beweis des Satzes 5, [3] ist die Abbildung $\varkappa_1 \colon \pi_T \to \pi_{\bar{T}}$ mit $[x, y]\varkappa_1 = [\bar{x}, \bar{y}]$, $\langle m, k\rangle\varkappa_1 = \langle \bar{m}, \bar{k}\rangle$ ein Homomorphismus der Inzidenzstruktur π_T auf $\pi_{\bar{T}}$.

Satz 3. *Das Tripel* $(\pi_T, \pi_{\bar{T}}, \varkappa_1)$ *ist eine PK—Ebene* ([3], *Satz* 5).

Satz 4. *Ist* π *eine PK—Ebene, dann sind* π, $\pi_{T(o,e,u,v)}$ *und* $\bar{\pi}$, $\pi_{\bar{T}(o\varkappa, e\varkappa, u\varkappa, v\varkappa)}$ *isomorph.*

Beweis. Jeder Punkt $s \in P$ läßt sich als $s = (x, y)^{\xi}$ mit $(x, y) \in Q_1$ und jede Gerade $r \in L$ als $r = (m, k)^{\eta}$ mit $(m, k) \in Q_2$ schreiben. Ist $T(o, e, u, v) = (R, R', t)$ der erweiterte lokale Ternärring aus Satz 1 und $\pi_{T(o,e,u,v)} = (P_1, L_1, I_1)$ die PK – Ebene aus Satz 3, dann gilt $P_1 = \{[x, y]\,|\,(x, y) \in Q_1\}$, $L_1 = \{\langle m, k\rangle\,|\,(m, k) \in Q_2\}$. Da ξ bzw. η eine bijektive Abbildung der Menge Q_1 bzw. Q_2 auf die Menge P bzw. L ist, ist die Abbildung φ:

$$(x, y)^{\xi} \mapsto [x, y]\ \forall(x, y) \in Q_1,$$

$$(m, k)^{\eta} \mapsto \langle m, k\rangle\ \forall(m, k) \in Q_2$$

eine bijektive Abbildung der Menge $P \cup L$ auf die Menge $P_1 \cup L_1$.

1) Gilt $k \in R$ oder $x,\ k \in R',\ m \in R$, dann $(x, y)^{\xi}\ I\ (m, k)^{\eta} \Leftrightarrow y = t(x, m, k) \Leftrightarrow [x, y]\ I_1\ \langle m, k\rangle$.

2) Nehmen wir an, daß die Elemente x, m, k die Forderungen aus 1 nicht befriedigen. Dann $(x, y)^{\xi}\ I\ (m, k)^{\eta} \Leftrightarrow x = t(y, m, k) \Leftrightarrow [x, y]\ I_1\ \langle m, k\rangle$.

Die Abbildung φ ist also ein Isomorphismus der Inzidenzstrukturen π und $\pi_{T(o,e,u,v)}$.

Für die projektive Ebene $\bar{\pi} = (\bar{P}, \bar{L}, \bar{I})$ gilt $\bar{P} = \{(x\varkappa, y\varkappa)^{\bar{\xi}} \mid (x\varkappa, y\varkappa) \in \bar{Q}_1\}$ und $\bar{L} = \{(m\varkappa, k\varkappa)\bar{\eta} \mid (m\varkappa, k\varkappa) \in \bar{Q}_2\}$. Erklären wir nach Satz 2 den erweiterten Ternärkörper $\bar{T}(o\varkappa, e\varkappa, u\varkappa, v\varkappa) = (\bar{R}, u\varkappa, \bar{t})$ und zu diesem die projektive Ebene $\bar{\pi}_{\bar{T}(o\varkappa, e\varkappa, u\varkappa, v\varkappa)} = (\bar{P}_1, \bar{L}_1, \bar{I}_1)$, so erhalten wir $\bar{P}_1 = \{[\bar{x}, \bar{y}] \mid (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Q}_1\}$, $\bar{L}_1 = \{\langle \bar{m}, \bar{k} \rangle \mid (\bar{m}, \bar{k}) \in \bar{Q}_2\}$ und die Abbildung $\bar{\varphi}$:

$$(x\varkappa, y\varkappa)^{\bar{\xi}} \mapsto [\bar{x}, \bar{y}],$$

$$(m\varkappa, k\varkappa)^{\bar{\eta}} \mapsto \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$$

ist ein Isomorphismus der projektiven Ebenen $\bar{\pi}$, $\bar{\pi}_{\bar{T}(\varkappa, e\varkappa, u\varkappa, v\varkappa)}$.

Den Definitionen von $\bar{\xi}$, $\bar{\varphi}$, φ, $\varkappa_1$ nach gilt für alle Paare $(x, y) \in Q_1$

$$(x, y)^{\xi} \overset{\varkappa}{\mapsto} (x\varkappa, y\varkappa)^{\bar{\xi}} \overset{\bar{\varphi}}{\mapsto} [\bar{x}, \bar{y}],$$

$$(x, y)^{\xi} \overset{\varphi}{\mapsto} [x, y] \overset{\varkappa_1}{\mapsto} [\bar{x}, \bar{y}]$$

und für alle Paare $(m, k) \in Q_2$

$$(m, k)^{\eta} \overset{\varkappa}{\mapsto} (m\varkappa, k\varkappa)^{\bar{\eta}} \overset{\bar{\varphi}}{\mapsto} \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle,$$

$$(m, k)^{\eta} \overset{\varphi}{\to} \langle m, k \rangle \overset{\varkappa_1}{\mapsto} \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle.$$

Daraus folgt $\varkappa\bar{\varphi} = \varphi\varkappa_1$ und das Diagram

$$\begin{array}{ccc} \pi & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & \pi_{T(o,e,u,v)} \\ \varkappa \downarrow & & \downarrow \varkappa_1 \\ \bar{\pi} & \overset{\bar{\varphi}}{\longrightarrow} & \bar{\pi}_{\bar{T}(o\varkappa, e\varkappa, u\varkappa, v\varkappa)} \end{array}$$

ist kommutativ.

Definition 2. *Ein erweiterter lokaler Ternärring $T = (R, R', t)$ heißt normiert (mit hervorragendem Element $u \in R'$), wenn das folgende gilt*

1) a) $t(x, m, o) = m \quad \forall x \in R' \quad \forall m \in R$,
   b) $t(x, o, k) = k \quad \forall x, k \in R'$,
   c) $t(o, m, k) = m \quad \forall m, k \in R'$ *bzw.* $\forall m \in R \quad \forall k \in R'$.

2) *In der Menge R' gibt es ein Element u derart, daß*

   a) $t(u, m, k) = k \quad \forall m \in R \quad \forall k \in R'$ *bzw.* $\forall m, k \in R'$,
   b) $t(u, m, k) = m \quad \forall m, k \in R$,

c) $t(y, m, u) = m \quad \forall y, m \in R$ *bzw.* $\forall y \in R \;\; \forall m \in R'$,
d) $t(y, u, k) \;= k \quad \forall y, k \in R'$ *bzw.* $y = 1, \; k \in R'$,
e) $t(x, 1, u) \;= x \quad \forall x \in R'$.

Satz 5. *Ist $\pi = (P, L, I)$ eine PK—Ebene, dann ist der erweiterte lokale Ternärring $T(o, e, u, v) = (R, R', t)$ normiert (mit hervorragendem Element u).*

Beweis. Wir beweisen, daß $T(o, e, u, v)$ alle Eigenschaften aus Definition 2 befriedigt.

1) a) Es seinen $x \in R'$, $m \in R$. Setzt man $y = t(x, m, o)$ und $s = (x, y)^{\xi}$, $r = (m, o)^{\eta}$, dann $s \; I \; r$. Nach (L1) erhält man $o \; I \; r$, $r\varkappa \neq (ov)\varkappa$ und nach (P2) gilt $s = xv \square r$. Durch Vergleich der Konstruktionen (L1) und (P2) ergibt sich also $m = y$.

b) Es seien $x, k \in R'$. Setzt man $y = t(x, o, k)$ und $s = (x, y)^{\xi}$, $r = (o, k)^{\eta}$, dann $s \; I \; r$. Aus (L2) folgt $o \; I \; r$ und $v\varkappa \; \bar{I} \; r\varkappa$. Nach 2(c), Definition 12, [2] gilt $y \in R'$ und durch Vergleich von (L2) und (P3) ergibt sich $y = k$.

c) α) Es seien $m, k \in R'$. Setzt man $x = t(o, m, k)$, $s = (x, o)^{\xi}$, $r = (m, k)^{\eta}$, so $s \; I \; r$. Aus 2(b), Definition 12, [2] folgt $x \in R'$. Laut (P2) erhält man $s \; I \; ou$ und mithin $s = x$. Laut (L3) gilt dann $s = m$ und daraus ergibt sich $m = x$.

β) Es seien $m \in R$, $k \in R'$. Setzt man $x = t(o, m, k)$ und $s = (x, o)^{\xi}$, $r = (m, k)^{\eta}$, so $s \; I \; r$. Nach (P1) und (P2) gilt $s = x$, woraus nach (L2) $m = x$ folgt.

2) a) α) Es seien $m \in R$, $k \in R'$. Setzt man $y = t(u, m, k)$ und $s = (u, y)^{\xi}$, $r = (m, k)^{\eta}$, so $s \; I \; r$. Unter Anwendung der Konstruktionen (P2) und (P3) erhält man $s\varkappa = v\varkappa$. Wegen $x = u$ ergibt sich nach (P3) $s = r \square uv$. Aus (L2) und (P3) folgt also $y = k$.

β) Es seien $m, k \in R'$. Setzt man $x = t(u, m, k)$ und $s = (x, u)^{\xi}$, $r = (m, k)^{\eta}$, dann $s \; I \; r$. Aus (L3) folgt $r\varkappa = (uv)\varkappa$ und nach Definition der Menge Q_1 ist $x \in R'$. Wegen $y = u$ gilt nach (P3) $s = r \square uv$ und nach (L3) $x = k$.

b) Es seien $m, k \in R$. Setzt man $y = t(u, m, k)$, $s = (u, y)^{\xi}$, $r = (m, k)^{\eta}$, so $s \; I \; r$. Nach (L1) gilt $v\varkappa$ „non $\bar{I}$“ $r\varkappa$. Aus $x = u$ erhält man nach (P2) $s = r \square uv$ und aus (P2), (L1) folgt $y = m$.

c) α) Es seien $y, m \in R$. Setzt man $x = t(y, m, u)$, $s = (x, y)^{\xi}$, $r = (m, u)^{\eta}$, so $s \; I \; r$. Wegen $y \in R$ gilt $s\varkappa \neq v\varkappa$. Aus $k = u$ folgt nach (L2) $v \; I \; r$ und laut (P1) ergibt sich dann $x = m$.

β) Es seien $y \in R$, $m \in R'$. Setzt man $x = t(y, m, u)$, $s = (x, y)^{\xi}$, $r = (m, u)^{\eta}$, so $s \; I \; r$, $s\varkappa \neq v\varkappa$, $r\varkappa = (uv)\varkappa$. Nach (L3) gilt $v \; I \; r$ und aus (P2) folgt $x = m$.

d) α) Es seien $y, k \in R'$. Setzt man $x = t(y, u, k)$, $s = (x, y)^{\xi}$, $r = (u, k)^{\eta}$, so $s \; I \; r$. Aus (L3) folgt $r\varkappa = (uv)\varkappa$ und $u \; I \; r$. Nach Definition der Menge Q_1 ist $x \in R'$ und laut (P3) gilt $s\varkappa = v\varkappa$. Durch Vergleich von (P3) und (L3) ergibt sich $x = k$.

β) Es seien $y = 1$, $k \in R'$, wo $1 = ou \square ve$. Setzt man $x = t(1, u, k)$, $s = (x, 1)^{\xi}$,

$r=(u, k)$, so $s\ I\ r$. Nach 2(b), Definition 12, [2] gilt $x \in R'$ und aus (L3), (P2) folgt $x=k$.

e) Setzt man $y=t(x, 1, u)$ mit $x \in R'$ und $s=(x, y)^{\xi}$, $r=(1, u)^{\eta}$, so $s\ I\ r$. Nach (L2) ist $r=ev$ und aus $x \in R'$ folgt $s\varkappa=v\varkappa$. Laut (P3) ergibt sich $x=y$.

Satz 6. *$T=(R, R', t)$ sei ein normierter erweiterter lokaler Ternärring (mit hervorragendem Element u) und π_T die durch T konstruierte PK—Ebene. Das Quadrupel $([o, o], [1, 1], [u, o], [u, u])$ ist ein Viereck in π_T und die erweiterten lokalen Ternärringe T, $T([o, o], [1, 1], [u, o], [u, u])$ sind isomorph. Ist $\bar{\pi}_{\bar{T}}$ die durch den erweiterten Ternärkörper $\bar{T}=(R/R_0, \{R'\}, \bar{t})$ konstruierte projektive Ebene und $\bar{T}([\bar{o}, \bar{o}], [\bar{1}, \bar{1}], [\bar{u}, \bar{o}], [\bar{u}, \bar{u}])$ der durch $\bar{\pi}_T$ erklärte erweiterte Ternärkörper, so sind $\bar{T}$ und $\bar{T}([\bar{o}, \bar{o}], [\bar{1}, \bar{1}], [\bar{u}, \bar{o}], [\bar{u}, \bar{u}])$ isomorph.*

Beweis. Es sei $\pi_T=(P_1, L_1, I_1)$ die mit Hilfe des erweiterten lokalen Ternärringes $T=(R, R', t)$ konstruierte PK-Ebene. Dann gilt $P_1 = \{[x, y] \mid (x, y) \in Q_1\}$, $L_1 = \{\langle m, k\rangle \mid (m, k) \in Q_2\}$, wo $Q=R \cup R'$, $Q_1 = \{(a, b) \in Q\times Q \mid b \in R' \Rightarrow a \in R'\}$, $Q_2 = \{(a, b) \in Q \times Q \mid a \in R' \Rightarrow b \in R'\}$. Ist $\bar{\pi}_T = (\bar{P}_1, \bar{L}_1, \bar{I}_1)$ die durch den erweiterten Ternärkörper $\bar{T} = (R/R_0, \{R'\}, \bar{t})$ konstruierte projektive Ebene, so $\bar{P}_1 = \{[\bar{x}, \bar{y}] \mid (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Q}_1\}$, $L_1 = \{\langle \bar{m}, \bar{k}\rangle \mid (\bar{m}, \bar{k}) \in \bar{Q}_2\}$ und die Abbildung $\varkappa_1$ mit $[x, y]\varkappa_1 = [\bar{x}, \bar{y}]\ \forall (x, y) \in Q_1$, $\langle m, k\rangle \varkappa_1 = \langle \bar{m}, \bar{k}\rangle\ \forall (m, k) \in Q_2$ ist ein Epimorphismus von π_T auf $\bar{\pi}_{\bar{T}}$.

I. Wir beweisen, daß das Quadrupel $([o, o], [1, 1], [u, o], [u, u])$ ein Viereck in π_T bildet. Setzen wir voraus, daß z. B. die Punkte $[\bar{o}, \bar{o}]$, $[\bar{1}, \bar{1}]$, $[\bar{u}, \bar{o}]$ auf einer Geraden $\langle \bar{m}, \bar{k}\rangle$ von $\bar{\pi}_{\bar{T}}$ liegen.

a) Ist $k \in R'$, dann, infolge von $[\bar{o}, \bar{o}]\ \bar{I}_1\ \langle \bar{m}, \bar{k}\rangle$, gilt $\bar{o}=\bar{t}(\bar{o}, \bar{m}, \bar{k})$ und nach 11.3 aus Definition 11, [2] ergibt sich darus $\bar{m}=\bar{o}$. Wegen $[\bar{1}, \bar{1}]\ \bar{I}_1\ \langle \bar{m}, \bar{k}\rangle$ gilt $\bar{1}=\bar{t}, (\bar{1}, \bar{m}, \bar{k})$ und daraus $\bar{m}=\bar{1}$, was $\bar{o}\neq\bar{1}$ widerspricht.

b) Nehmen wir $k \in R$, also auch $m \in R$ an. Aus $\bar{o}=\bar{t}(\bar{o}, \bar{m}, \bar{k})$, $\bar{1}=\bar{t}(\bar{1}, \bar{m}, \bar{o})$ erhält man nach (K1), [2] $\bar{k}=\bar{o}$ und $\bar{m}=\bar{1}$. Gleichzeitig, weil $[\bar{u}, \bar{o}]\ \bar{I}_1\ \langle \bar{m}, \bar{k}\rangle$, gilt $\bar{o}=\bar{t}(\bar{u}, \bar{m}, \bar{k})$ und nach 11.2 aus Definition 11, [2] ergibt sich daraus $\bar{o}=\bar{1}$, was wiederum ein Widerspruch ist.

Ganz ähnlich läßt sich in den übrigen Fällen verfahren.

II. Unter Anwendung der Definition 2 stellen wir in π_T die Verbindungsgeraden einiger bedeutenden Punkte und die Schnittpunkte einiger Geraden fest.

1. Es sei $\langle m, k\rangle=[x, o]\,[u, u]$ eine Gerade aus π_T. Ist $k \in R$, dann gilt nach Definition der Menge Q_2 auch $m \in R$ und aus $[u, u]\ I_1\ \langle m, k\rangle$ folgt $u=t(u, m, k)$. Nach 2b) (Definition 2, kurz D2) ergibt sich $m=u$, was aber ein Widerspruch ist. Ist $m \in R$, $k \in R'$ bzw. $m, k \in R'$, so folgt aus der Gleichheit $u=t(u, m, k)$ gemäß 2a), D2 $k=u$. Unserer Voraussetzung nach gilt auch $[x, o]\ I_1\ \langle m, k\rangle$, also $x=t(o, m, u)$ und aus 1c), D2 folgt daraus $m=x$. So ergibt sich $\langle x, u\rangle = [x, o]\,[u, u]\ \forall x \in Q$. In den speziellen Fällen erhält man

$[o, o][u, u] = \langle o, u\rangle, [u, o][u, u] = \langle u, u\rangle$ und $[1, 1][u, u] = [1, o][u, u] = \langle 1, u\rangle$.

2. Wir betrachten die Gerade $\langle m, k\rangle = [o, o][1, 1]$ und nehmen dabei $m, k \in R$ an. Dann gilt $o = t(o, m, k)$, $1 = t(1, m, o)$ und aus (K1), [2] folgt $k = o$, $m = 1$, also $[o, o][1, 1] = \langle 1, o\rangle$. Nach Definition 12, [2] gibt es genau eine Gerade, die durch die Punkte $[o, o]$, $[1, 1]$ geht.

3) Wir setzen $[a, b] = \langle x, u\rangle \Box \langle 1, o\rangle$.

a) Es sei $x \in R$. Sind a, b aus R, dann gilt $a = t(b, x, u)$ und aus 2c), D2 folgt $a = x$. Ferner gilt $b = t(a, 1, o)$ und aus (K1), [2] erhält man $b = a$. Mithin $\langle x, u\rangle \Box \langle 1, o\rangle = [x, x]$.

b) Es sei $x \in R'$. Gilt $a \in R'$, $b \in R$, dann ergibt sich $a = t(b, x, u)$ und aus 2c), D2 folgt $a = x$. Ferner gilt $b = t(a, 1, o)$ und aus 1a), D2 folgt $b = 1$. In diesem Fall ergibt sich also $\langle x, u\rangle \Box \langle 1, o\rangle = [x, 1]$.

4) a) Betrachten wir die Gerade $\langle m, k\rangle = [x, x][u, o]$, wo $x \in R$. Gilt m, $k \in R$, so $o = t(u, m, k)$ und laut 2b), D2 erhält man $m = o$. Weiter ergibt sich $x = t(x, o, k)$ und wegen (K1), [2] folgt $x = k$. Mithin $[x, x][u, o] = \langle o, x\rangle$

b) Wir betrachten die Gerade $[x, 1][u, o] = \langle m, k\rangle$, wo $x \in R'$. Gilt m, $k \in R'$, so $u = t(o, m, k)$ und wegen 1c), D2 folgt $u = m$. Zugleich gilt $x = t(1, u, k)$, nach 2d), D2 erhält man daraus $x = k$ und $[x, 1][u, o] = \langle u, x\rangle$.

5) a) Wir setzen $[x, y] = \langle o, k\rangle \Box \langle 1, u\rangle$, wo $k \in R$. Nehmen wir $x, y \in R$ an, dann $y = t(x, o, k)$ und aus (K1), [2] folgt $y = k$. Wegen $x = t(y, 1, u)$ gilt dann nach 2c), D2 $x = 1$. Mithin $\langle o, k\rangle \Box \langle 1, u\rangle = [1, k]$.

b) Wir setzen $[x, y] = \langle u, k\rangle \Box \langle 1, u\rangle$, wo $k \in R'$. Da $x = t(y, u, k)$, gilt gemäß 2d), D2 $x = k$. Zugleich ist $y = t(x, 1, u)$ und wegen 2e), D2 folgt $y = x$. So ergibt sich $[k, k] = \langle u, k\rangle \Box \langle 1, u\rangle$.

6) a) Es sei $\langle m, k\rangle = [o, o][1, y]$, wo $y \in R$. Gilt $m, k \in R$, so $o = t(o, m, k)$, $y = t(1, m, o)$ und nach (K1), [2] erhält man $k = o$, $y = m$. Daraus ergibt sich $\langle y, o\rangle = [o, o][1, y]$.

b) Es sei $\langle m, k\rangle = [o, o][x, x]$, wo $x \in R'$. Gilt $m \in R$, $k \in R'$, dann $o = t(o, m, k)$ und nach 1c), D2 ist $m = o$. Aus $x = t(x, o, k)$ folgt gemäß 1b), D2 $x = k$ und somit $\langle o, x\rangle = [o, o][x, x]$.

7) Es sei $[x, y]\, I\, \langle u, u\rangle$ mit $x \in R'$. Dann $x = t(y, u, u)$ und nach 2c), 2d), D2 gilt $x = u$.

8) Es sei $[x, y]\, I\, \langle o, u\rangle$.

a) Gilt $x, y \in R$, so $x = t(y, o, u)$ und aus 2c), D2 folgt $x = o$.

b) Gilt $x \in R'$, $y \in R$, so $y = t(x, o, u)$ und aus 1b), D2 folgt $y = u$.

III. Nach Satz 1 erklären wir den zu π_T gehörigen erweiterten lokalen Ternärring $T([o, o], [1, 1], [u, o], [u, u])$. Ist $x \in R$, dann gilt nach (K1), [2] $o = t(x, o, o)$ und deshalb $[x, o]\, I_1\, \langle o, o\rangle$. Ist $x \in R'$, dann gilt nach 1a), D2 $o = t(x, o, o)$ und deshalb $[x, o]\, I_1\, \langle o, o\rangle$. Nehmen wir umgekehrt an, daß $[x, y]\, I_1\, \langle o, o\rangle$. Ist $x \in R$, dann gilt gemäß (K1), [2] $y = t(x, o, o) = o$ und aus

$x \in R'$ folgt nach 1a), D2 wieder $y = t(x, o, o) = o$. Somit erhalten wir die Äquivalenz $[x, y]\, I_1 \langle o, o\rangle \Leftrightarrow y = o$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{Q}$ die Menge aller Punkte der Geraden $\langle o, o\rangle$, d. h. $\mathcal{Q} = \{[x, o] \mid x \in Q\}$ und setzen $\mathcal{R}' = \{[x, o] \mid x \in R'\}$, $\mathcal{R} = \mathcal{Q} \setminus \mathcal{R}' = \{[x, o] \mid x \in R\}$. Die Abbildung $\lambda: x \mapsto [x, o]\ \forall x \in Q$ ist eine bijektive Abbildung der Menge Q auf die Menge $\mathcal{Q}$. Im folgenden schreiben wir einfach $x^\lambda = x'\ \forall x \in Q$, also $x' = [x, o]\ \forall x \in Q$. Wir setzen $e = [1, 1]$, $v = [u, u]$ und $\mathcal{Q}_1 = \{(a', b') \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \mid b' \in \mathcal{R}' \Rightarrow a' \in \mathcal{R}'\}$, $\mathcal{Q}_2 = \{(a', b') \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \mid a' \in \mathcal{R}' \Rightarrow b' \in \mathcal{R}'\}$.

Wir betrachten nun die Abbildung $\xi: \mathcal{Q}_1 \to P_1$, die mit Hilfe des Viereckes (o', e, u', v) durch die Vorschriften (P1)—(P3) bestimmt ist.

Ad (P1) Es seien $x', y' \in \mathcal{R}$. Dann $w = vy' \square o'e$, $s = u'w \square x'v$ und $s = (x', y')^\xi$. Nach 1, Teil II unseres Beweises gilt $vy' = \langle y, u\rangle$ und $x'v = \langle x, u\rangle$. Gemäß 2 ergibt sich $o'e = \langle 1, o\rangle$, gemäß 3a) $w = [y, y]$ und nach 4a) folgt $u'w = \langle o, x\rangle$. Mithin gilt $s = \langle o, x\rangle \square \langle x, u\rangle = [a, b]$. Sind a, b aus R, dann $b = t(a, o, y)$ und laut (K1), [2] ist $b = y$. Zugleich gilt $a = t(b, x, u)$, nach 2c), D2 folgt daraus $a = x$ und somit $s = (x', y')^\xi = [x, y]$.

Ad (P2) Es seien $x' \in \mathcal{R}'$, $y' \in \mathcal{R}$. Dann $n = y'v \square o'e$, $n_1 = nu' \square ev$, $s = o'n_1 \square x'v$ und $s = (x', y')^\xi$. Nach 1, 2, 3a) gilt $n = [y, y]$, nach 4a) und 1 erhält man $nu' = \langle o, y\rangle$, $ev = \langle 1, u\rangle$ und nach 5a) gilt $n_1 = [1, y]$. Aus 6a) folgt $o'n_1 = \langle y, o\rangle$ und daraus $s = \langle y, o\rangle \square \langle x, u\rangle = [a, b]$. Gilt $a \in R'$, $b \in R$, dann $b = t(a, y, o)$ und wegen 1a), D2 folgt $b = y$. Zugleich gilt $a = t(b, x, u)$ und nach 2c), D2 ist $a = x$. Daraus erhält man $s = (x', y')^\xi = [x, y]$.

Ad (P3) Es seien $x', y' \in \mathcal{R}'$. Dann $h = x'v \square o'e$, $w = y'v \square o'e$, $w_1 = u'w \square ev$, $s = o'w_1 \square u'h$ und $s = (x', y')^\xi$. Nach 3b) gilt $h = \langle x, u\rangle \square \langle 1, o\rangle = [x, 1]$, $w = \langle y, u\rangle \square \langle 1, o\rangle = [y, 1]$, nach 4b) $u'w = \langle u, y\rangle$ und nach 5b) $w_1 = \langle u, y\rangle \square \langle 1, u\rangle = [y, y]$. Nach 6b) ergibt sich $o'w_1 = \langle o, y\rangle$ und nach 4b) $u'h = \langle u, x\rangle$. Es gilt also $s = \langle o, y\rangle \square \langle u, x\rangle = [a, b]$ und daraus $b = t(a, o, y)$, $a = t(b, u, x)$. Gemäß 1b), 2d), D2 ergibt sich $b = y$, $a = x$ und folglich $s = (x', y')^\xi = [x, y]$.

Wir bestimmen die Abbildung $\eta: \mathcal{Q}_2 \to L_1$ durch die Vorschriften (L1)—(L3).

Ad (L1) Es seien $m', k' \in \mathcal{R}$. Dann $n = m'v \square o'e$, $n_1 = nu' \square ve$, $p = o'n_1 \square u'v$, $z = vk' \square oe'$, $q = u'z \square o'v$ und $r = pq = (m', k')^\eta$. Es gilt $n = [m, m]$, $n_1 = [1, m]$ und nach 6a) ergibt sich $o'n_1 = \langle m, o\rangle$. Setzt man $p = [x, y] = \langle m, o\rangle \square \langle u, u\rangle$, dann $x \in R'$ und nach 7 ist $x = u$. Weiter gilt $y = t(u, m, o)$ und wegen 1a), D2 folgt daraus $y = m$. Mithin erhält man $p = [u, m]$. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich $z = [k, k]$ und $u'z = \langle o, k\rangle$. Setzt man $q = [x, y] = \langle o, k\rangle \square \langle o, u\rangle$, so gilt nach 8 $x = o$ und daraus $y = t(o, o, k) = k$. So ergibt sich $q = [o, k]$ und $r = [u, m]\,[o, k] = \langle a, b\rangle$. Ist $a, b \in R$, so $m = t(u, a, b)$, $k = t(o, a, b)$, woraus nach 2b), D2 und (K1), [2] $m = a$, $k = b$ folgt. Deshalb $r = (m', k')^\xi = \langle m, k\rangle$.

Ad (L2) Es seien $m' \in \mathcal{R}$, $k' \in \mathcal{R}'$. Dann $h = o'e \Box k'v$, $w = u'h \Box ev$, $q = o'w \Box u'v$ und $r = m'q = (m', k')^{\eta}$. Es gilt $h = [k, 1]$, $w = [k, k]$, $o'w = \langle o, k \rangle$. Aus $q = \langle o, k \rangle \Box \langle u, u \rangle = [x, y]$ folgt nach 7 $x = u$ und $y = t(u, o, k)$, woraus sich nach 1b), D2 $y = k$ ergibt. So gilt $r = [m, o]\,[u, k] = \langle a, b \rangle$. Aus $a \in R$, $b \in R'$ erhält man $m = t(o, a, b)$, $k = t(u, a, b)$ und aus 1c), 2a), D2 $m = a$, $k = b$. Mithin $r = (m'\ k')^{\eta} = \langle m, k \rangle$.

Ad (L3) Es seien $m', k' \in \mathcal{R}'$. Dann $h = k'v \Box o'e$, $q = u'h \Box o'v$ und $r = m'q = (m', k')^{\eta}$. Es gilt $h = [k, 1]$ und $q = \langle u, k \rangle \Box \langle o, u \rangle = [x, y]$. Nach 8b) ist $y = u$ und wegen $x = t(u, u, k)$ folgt nach 2a), D2 $x = k$. So erhält man $r = [m, o]\,[k, u] = \langle a, b \rangle$. Gilt $a, b \in R'$, so $m = t(o, a, b)$, $k = t(u, a, b)$. Aus 1c), 2a), D2 folgt $m = a$, $k = b$ und mithin $r = (m', k')^{\eta} = \langle m, k \rangle$.

Wir setzen $\mathcal{Q}' = \{(a', b', c') \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \mid b' \in \mathcal{R}' \Rightarrow c' \in \mathcal{R}'\}$ und definieren eine Abbildung $t' : \mathcal{Q}' \to \mathcal{Q}$ durch

1) Gilt $k' \in \mathcal{R}$ oder $x', k' \in \mathcal{R}'$, so $y' = t'(x', m', k') \Leftrightarrow (x', y')^{\xi}\ I_1\ (m', k')^{\eta}$.

2) Für übrige Fälle gilt $x' = t'(y', m', k') \Leftrightarrow (x', y')^{\xi}\ I_1\ (m', k')^{\eta}$.

Nach Satz 1 bildet $T(o', e, u', v) = (\mathcal{R}, \mathcal{R}', t')$ einen erweiterten lokalen Ternärring. Wir wollen zeigen, daß die oben definierte Abbildung $\lambda : Q \to \mathcal{Q}$ ein Isomorphismus des erweiterten lokalen Ternärringes T auf $T([o, o], [1, 1], [u, o], [u, u])$ ist.

Es sei $y = t(x, m, k)$.

1) Gilt $k \in R$ oder $x, k \in R'$, $m \in R$, so $k' \in \mathcal{R}$ oder $x', k' \in \mathcal{R}'$, $m' \in \mathcal{R}$ und $y = t(x, m, k) \Leftrightarrow [x, y]\ I_1\ \langle m, k \rangle \Leftrightarrow (x', y')^{\xi}\ I_1\ (m', k')^{\eta} \Leftrightarrow y' = t'(x', m', k')$.

2) Für übrige Fälle ergibt sich $y = t(x, m, k) \Leftrightarrow [y, x]\ I_1\ \langle m, k \rangle \Leftrightarrow (y', x')^{\xi}\ I_1\ (m', k')^{\eta} \Leftrightarrow y' = t'(x', m', k')$.

Da λ eine bijektive Abbildung von Q auf $\mathcal{Q}$ ist, ist sie auch ein Isomorphismus des erwiterten lokalen Ternärringes T auf $T([o, o], [1, 1], [u, o], [u, u])$.

$\bar{\pi}_{\bar{T}} = (\bar{P}_1, \bar{L}_1, \bar{I}_1)$ sei die mit Hilfe des erweiterten Ternärkörpers $\bar{T} = (R/R_0, \{R'\}, \bar{t})$ konstruierte projektive Ebene. Dann ist $\bar{\pi}_{\bar{T}}$ das Bild von π_T im Homomorphismus $\varkappa_1$ und es gilt $[x, y]\varkappa_1 = [\bar{x}, \bar{y}]\ \forall [x, y] \in P_1$ und $\langle m, k \rangle \varkappa_1 = \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle\ \forall \langle m, k \rangle \in L_1$. Setzt man $\bar{Q} = R/R_0 \cup \{R'\}$, $\bar{\mathcal{Q}} = \{[\bar{x}, \bar{o}] \mid \bar{x} \in \bar{Q}\}$, $\bar{\mathcal{R}} = \{[\bar{x}, \bar{o}] \mid \bar{x} \in R/R_0\}$, dann ist $\bar{\lambda} : \bar{x} \to [\bar{x}, \bar{o}]\ \forall \bar{x} \in \bar{Q}$ eine bijektive Abbildung der Menge $\bar{Q}$ auf $\bar{\mathcal{Q}}$. Im folgenden setzen wir $\bar{x}^{\bar{\lambda}} = \bar{x}'\ \forall \bar{x} \in \bar{Q}$, also $\bar{x}' = [\bar{x}, \bar{o}]$. Wir schreiben $\bar{\mathcal{Q}}_1 = \{(\bar{a}', \bar{b}') \mid (a, b) \in Q_1\}$, $\bar{\mathcal{Q}}_2 = \{(\bar{a}', \bar{b}') \mid (a, b) \in Q_2\}$ und betrachten eine Abbildung $\bar{\xi} : \bar{\mathcal{Q}}_1 \to \bar{P}_1$ bzw. $\bar{\eta} : \bar{\mathcal{Q}}_2 \to \bar{L}_1$, die durch $(\bar{x}', \bar{y}')^{\bar{\xi}} = (x', y')^{\xi}\varkappa_1$ $\forall (\bar{x}', \bar{y}') \in \bar{\mathcal{Q}}_1$ bzw. $(\bar{m}', \bar{k}')^{\bar{\eta}} = (m', k')\varkappa_1$ $\forall (\bar{m}', \bar{k}') \in \bar{\mathcal{Q}}_2$ bestimmt ist. Dann ergibt sich $(\bar{x}', \bar{y}')^{\bar{\xi}} = (x', y')^{\xi}\varkappa_1 = [x, y]\varkappa_1 = [\bar{x}, \bar{y}]$ und $(\bar{m}', \bar{k}')^{\bar{\eta}} = (m', k')^{\eta}\varkappa_1 = \langle m, k \rangle \varkappa_1 = \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle$.

Wir setzen $\bar{Q}' = \{(\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}') \mid (a, b, c) \in Q'\}$ und definieren eine Abbildung $\bar{t}' : \bar{\mathcal{Q}}' \to \bar{\mathcal{Q}}$ durch

1. Gilt $\bar{k}' \neq \bar{u}'$, so $\bar{y}' = \bar{t}'(\bar{x}', \bar{m}', \bar{k}') \Leftrightarrow (\bar{x}', \bar{y}')^{\bar{\xi}}\ \bar{I}_1\ (\bar{m}', \bar{k}')^{\bar{\eta}}$.
2. $\bar{x}' = \bar{t}'(\bar{y}', \bar{m}', \bar{u}') \Leftrightarrow (\bar{x}', \bar{y}')^{\bar{\xi}}\ \bar{I}_1\ (\bar{m}', \bar{u}')^{\bar{\eta}}$.

Nach Satz 2 ist das Tripel $\bar{T}([\bar{o}, \bar{o}], [\bar{1}, \bar{1}], [\bar{u}, \bar{o}], [\bar{u}, \bar{u}]) = (\bar{R}, \bar{u}', \bar{t}')$ ein erweiterter Ternärkörper.

1) Gilt $\bar{k} \neq \bar{u}$, so $\bar{y} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k}) \Leftrightarrow [\bar{x}, \bar{y}]\, \bar{I}_1 \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle \Leftrightarrow (\bar{x}', \bar{y}')^{\xi}\, \bar{I}_1 \langle \bar{m}', \bar{y}' \rangle^{\bar{\eta}} \Leftrightarrow \bar{y}' =$
$= \bar{t}'(\bar{x}', \bar{m}', \bar{k}')$.

2) Gilt $\bar{k} = \bar{u}$, so $\bar{y} = \bar{t}(\bar{x}, \bar{m}, \bar{k}) \Leftrightarrow [\bar{y}, \bar{x}]\, \bar{I}_1 \langle \bar{m}, \bar{k} \rangle \Leftrightarrow (\bar{y}', \bar{y}')^{\xi}\, \bar{I}_1 (\bar{m}', \bar{k}')^{\eta} \Leftrightarrow \bar{y}' = \bar{t}'(\bar{x}', \bar{m}', \bar{k}')$.

Die Abbildung $\bar{\lambda}$ ist also ein Isomorphismus der erweiterten Ternärkörper $\bar{T}$, $\bar{T}([\bar{o}, \bar{o}], [\bar{1}, \bar{1}], [\bar{u}, \bar{o}], [\bar{u}, \bar{u}])$.

Ist φ der Homomorphismus des erweiterten lokalen Ternärringes $T = (R, R', t)$ auf den erweiterten Ternärkörper $\bar{T} = (R/R_0, \{R'\}, \bar{t})$ aus Bemerkung 9, [2] mit $x^{\varphi} = \bar{x}\ \forall x \in Q$ und $\bar{\varphi}$ der Homomorphismus des erweiterten lokalen Ternärringes $T([o, o], [1, 1], [u, o], [u, u])$ auf den erweiterten Ternärkörper $\bar{T}([\bar{o}, \bar{o}], [\bar{1}, \bar{1}], [\bar{u}, \bar{o}], [\bar{u}, \bar{u}])$ mit $[x, o]^{\bar{\varphi}} = [\bar{x}, \bar{o}]$, dann gilt

$$x \overset{\lambda}{\mapsto} [x, o] \overset{\bar{\varphi}}{\mapsto} [\bar{x}, \bar{o}],$$

$$x \overset{\varphi}{\mapsto} \bar{x} \overset{\bar{\lambda}}{\mapsto} [\bar{x}, \bar{o}],$$

also $\lambda\bar{\varphi} = \varphi\bar{\lambda}$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T & \overset{\lambda}{\longrightarrow} & T([o, o], [1, 1], [u, o], [u, u]) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \bar{\varphi} \\ \bar{T} & \overset{\bar{\lambda}}{\longrightarrow} & \bar{T}([\bar{o}, \bar{o}], [\bar{1}, \bar{1}], [\bar{u}, \bar{o}], [\bar{u}, \bar{u}]) \end{array}$$

ist daher kommutativ.

LITERATUR

[1] KLINGENBERG, W.: Projektive Geometrien mit Homomorphismus. Math. Ann. 132, 1956, 180—200.

[2] MACHALA, F.: Erweiterte lokale Ternärringe. Czech. Math. J. 27 (102) 1977, 560—572.

[3] MACHALA, F.: Koordinatisation projektiver Ebenen mit Homomorphismus. Czech. Math. J. 27 (102) 1977, 573—590.

[4] STEVENSON, F. W.: Projective Planes. W. M. Freeman, San Francisco 1972.

Eingegangen am 3. 2. 1977

Katedra algebry a geometrie
Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackeho

Leninova 26
771 46 Olomouc

ПРОЕКТИВНЫЕ ПЛОСКОСТИ С ГОМОМОРФИЗМОМ И РАСШИРЕННЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕРНАРНЫЕ КОЛЬЦА

Франтишек Махала

Резюме

К произвольному полному четырехугольнику (o, e, u, v) в проективной плоскости π с гомоморфизмом можно определить расширенное локальное тернарное кольцо $T_\pi = T(o, e, u, v)$ и к произвольному расширенному локальному тернарному кольцу T проективную плоскость π_T с гомоморфизмом. В предлагаемой работе показывается, что проективные плоскости π и $\pi_{T_\pi} = \pi_{T(o,e,u,v)}$ с гомоморфизмом изоморфны и что всякое расширенное локальное тернарное кольцо $T(o, e, u, v)$ нормировано. Если T — нормированное расширенное локальное тернарное кольцо, то T и T_{π_T} изоморфны.