Mathematica Slovaca

Jan Kastl

Innere Translationen der kleinen Kategorien

Mathematica Slovaca, Vol. 28 (1978), No. 2, 127--137

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136169

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1978

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Math. Slovaca 28, 1978, No. 2, 127—137

INNERE TRANSLATIONEN DER KLEINEN KATEGORIEN

JAN KASTL

Es ist bekannt, daß man zu jeder kleinen Kategorie durch die cayleysche Repräsentation eine isomorphe Kategorie bilden kann, deren Objekte die Mengen und deren Morphismen die Translationen sind. In der Arbeit wird vornehmlich Aufmerksamkeit den Bestrebungen gewidmet, solche Abbildungen zu charakterisieren, die Translationen in cayleyscher Repräsentation einer Kategorie werden können. Dabei zeigt man, daß jede Abbildung zwischen zwei disjunkten Mengen — mit zwei Ausnahmen — immer eine solche Translation ist. Die Abbildung einer Menge in sich selbst ist die Translation von cayleyscher Repräsentation einer kleinen Kategorie genau dann, wenn sie eine Translation von cayleyscher Repräsentation eines Monoids ist. Solche Translationen sind in Arbeiten [1], [2], [3] ausführlich beschrieben worden.

Einleitend bemerken wir noch, daß sämtliche Beweise und Konstruktionen in der Arbeit davon unabhängig sind, ob wir in der endlichen Mengenlehre (mit $\mathscr{K}$ bezeichnet) oder in der unendlichen Mengenlehre (mit $\mathscr{N}$ bezeichnet) arbeiten. (In $\mathscr{N}$ setzen wir die Geltung des Auswahlaxioms voraus.)

1. Transformationskategorien

Wir werden mit $f\colon X \to Y$ die Abbildung der Menge X in die Menge Y bezeichnen, $1_X\colon X \to X$ bezeichnet die identische Abbildung der Menge X. Die Komposition der Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Z \to V$ wird nur dann definiert werden, wenn $Y \subseteq Z$ gilt; sie wird mit $f \circ g\colon X \to V$ bezeichnet. Die inverse Abbildung zur Bijektion f bezeichnen wir mit f^{-1}.

Definition 1. *N sei eine Menge. Wir verstehen unter einer Transformationskategorie $(\{X_n\}_{n \in N}; K)$ ein System der nichtleeren gegenseitig disjunkten Mengen $\{X_n\}_{n \in N}$ mit einem System K der Abbildungen zwischen diesen Mengen, für das es gilt:*

1) *Für jedes* $n \in N$ *ist* $1_{X_n} \in K$.

2) *Wenn für* $f,\ g \in K$ *die Komposition* $f \circ g$ *definiert ist, dann ist* $f \circ g \in K$.

Es ist leicht zu sehen, daß die Operation der Abbildungskomposition eine kleine Kategorie $(K, \circ)$ bildet. $\{X_n\,;\ n \in N\}$ ist die Menge der Objekte und K ist die Menge der Morphismen dieser Kategorie (siehe [5]).

Definition 2. *Wir sagen, daß zwei Transformationskategorien* $(\{X_n\}_{n \in N};\ K)$, $(\{Y_m\}_{m \in M};\ L)$ *isomorph sind, wenn es eine Bijektion* $k\colon N \to M$ *und für jedes* $n \in N$ *eine Bijektion* $h_n\colon X_n \to Y_{(n)k}$ *gibt, so daß das Folgende gilt:*

Für jedes $f \in K$, $f\colon X_{n_1} \to X_{n_2}$ *ist* $(h_{n_1})^{-1} \circ f \circ h_{n_2} \in L$; *für jedes* $g \in L$, $g\colon Y_{m_1} \to Y_{m_2}$ *ist* $h_{(m_1)k^{-1}} \circ g \circ (h_{(m_2)k^{-1}})^{-1} \in K$.

Man bemerke noch, daß dann auch die kleinen Kategorien $(K, \circ)$, $(L, \circ)$ isomorph sein werden.

Definition 3. *Ein präzise Quelle der Transformationskategorie* $(\{X_n\}_{n \in N};\ K)$ *heißt ein System der Elemente* $\{x_n\}_{n \in N}$, *so daß das Folgende gilt:*

1) *Für jedes* $n \in N$ *ist* $x_n \in X_n$.

2) *Für jedes* $x \in \bigcup_{n \in N} X_n$ *gibt es genau eine Abbildung* $f \in K$, *sagen wir* $f\colon X_{n_1} \to X_{n_2}$, *so daß* $(x_{n_1})f = x$ *gültig ist.*

Bemerken wir, daß die präzise Quelle $\{x_n\}_{n \in N}$ durch einen Isomorphismus (z.B. k, $\{h_n\}_{n \in N}$) wieder auf eine präzise Quelle $\{(x_{(m)k^{-1}})h_{(m)k^{-1}}\}_{m \in M}$ überführt wird.

Definition 4. $(C, \cdot)$ *sei eine kleine Kategorie, und* A *sei ihre Menge der Objekte.*

Wir bezeichnen mit F_a $(a \in A)$ *die Menge aller in* a *kommenden Morphismen aus* C, *d.h.* $F_a = \bigcup_{c \in A} C(c,a)$. *Für jedes* $x \in C(a,b)$ $(a,b \in A)$ *definieren wir eine Translation* $p_x\colon F_a \to F_b$ *folgenderweise:* $(y)p_x = y \cdot x$ *für alle* $y \in F_a$.

Wir haben so eine Transformationskategorie gebildet. Diese Transformationskategorie wird die cayleysche Repräsentation der kleinen Kategorie $(C, \cdot)$ *genannt.*

Man überprüft auch leicht, daß die Zuordnung von Objekten $a \mapsto F_a$ und $x \mapsto p_x$ von Morphismen ein Isomorphismus der ursprünglichen Kategorie $(C, \cdot)$ auf die Kategorie $(\{p_x\,;\ x \in C\}, \circ)$ ist.

Außerdem gilt $1_a \in F_a$ für jede Einheit, und für jedes $y \in C$ gibt es $b \in A$ (nur dieses b), so daß $(1_b)p_y = 1_b \cdot y = y$ klar ist. $\{1_a\}_{a \in A}$ ist also eine präzise Quelle der cayleyschen Repräsentation $(\{F_a\}_{a \in A};\ \{p_x\,;\ x \in C\})$.

Definition 5. *Eine cayleysche Kategorie heißt eine solche Transformationskategorie, die mit einer cayleyschen Repräsentation einer kleinen Kategorie isomorph ist.*

Wir sagen, daß ein System der Abbildungen S *cayleysch ist, wenn es eine cayleysche Kategorie* $(\{X_n\}_{n \in N};\ K)$ *gibt, für die* $S \subseteq K$ *ist. Wir werden die Abbildungen aus* S *cayleysche Abbildungen nennen.*

Wir sehen aus dem Obenerwähnten, daß jede cayleysche Kategorie wenigstens eine präzise Quelle haben muß. Aber es gilt auch umgekehrt:

Satz 1. *Die Transformationskategorie ist cayleysch genau dann, wenn sie eine präzise Quelle hat.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß $\{x_n\}_{n \in N}$ eine präzise Quelle von $(\{X_n\}_{n \in N}; K)$ ist. Wir werden zeigen, daß die Transformationskategorie $(\{X_n\}_{n \in N}; K)$ mit der cayleyschen Repräsentation $(\{F_{X_n}\}_{n \in N}; \{p_f; f \in K\})$ der Kategorie $(K, \circ)$ isomorph ist. Dazu werden wir $h_n: X_n \to F_{X_n}$ konstruieren.

Für $y \in X_n$ gibt es genau ein $f \in K$, so daß (ein $n' \in N$ existiert und) $(x_{n'})f = y$ gilt, und eben für dieses f setzen wir $(y)h_n = f$ $(f: X_{n'} \to X_n,\ f \in F_{X_n})$.

Da $(x_{n'})((y)h_n) = y$ gilt, ist die Abbildung h_n injektiv. Für ein beliebiges $g \in F_{X_n}$ ist dabei $(x_{n''})g \in X_n$, also $((x_{n''})g)h_n = g$; h_n ist deswegen eine Bijektion.

Für jede Abbildung $f \in K$, $f: X_{n_1} \to X_{n_2}$ haben wir $(h_{n_1})^{-1} \circ f \circ h_{n_2} = p_f$. Allerdings für jedes $g \in X_{n_1}$ gilt $(g)(h_{n_1}^{-1} \circ f \circ h_{n_2}) = ((x_{n''})g)(f \circ h_{n_2}) = ((x_{n''})(g \circ f))h_{n_2} = g \circ f = (g)p_f$. Jedes h_n ist eine Bijektion: also gilt auch $h_{n_1} \circ p_f \circ (h_{n_2})^{-1} = f \in K$ für jedes $p_f: F_{X_{n1}} \to F_{X_{n2}}$ $(f \in K)$.

Dadurch haben wir gezeigt, daß die Transformationskategorie mit der präzisen Quelle cayleysch ist.

2. Zentralisator

Definition 6. $(\{X_n\}_{n \in N}; K)$ *sei eine Transformationskategorie. Ihr Zentralisator* $C(K)$ *heißt die Menge von allen solchen Abbildungen* $h: \bigcup_{n \in N} X_n \to \bigcup_{n \in N} X_n$, *so daß für eine beliebige Abbildung* $f \in K$, $f: X_{n_1} \to X_{n_2}$ *die Gleichung* $((x)f)h = ((x)h)f$ *für jedes* $x \in X_{n_1}$ *klar und gültig ist.*

Da diese Gleichung auch für 1_{X_n} $(n \in N)$ klar werden soll. bildet h jede Menge X_n in sich selbst ab. Man sieht weiter, daß die Abbildung $1 \bigcup_{n \in N} X_n$ in $C(K)$ liegt und daß $C(K)$ bezüglich der Abbildungskomposition abgeschlossen ist. $\left(\bigcup_{n \in N} X_n; C(K)\right)$ ist eine Transformationskategorie mit einem Objekt, oder ein *Transformationsmonoid.*

Satz 2. $\{x_n\}_{n \in N}$ *sei eine präzise Quelle einer cayleyschen Kategorie* $(\{X_n\}_{n \in N}; K)$.

Dann gilt für den Zentralisator: Zu jedem $\{y_n\}_{n \in N}$ $(y_n \in X_n)$ *gibt es genau ein* $h \in C(K)$, *so daß* $(x_n)h = y_n$ *für alle* $n \in N$ *gilt.*

Beweis. I. Eindeutigkeit: $h \in C(K)$ und y sei ein beliebiges Element aus $\bigcup_{n \in N} X_n$. Da wir y eindeutig in der Form $y = (x_{n_0})g$ schreiben können (wo g:

$X_{n_0} \to X_{n_1}$ aus K ist), gilt $(y)h = ((x_{n_0})g)h = ((x_{n_0})h)g$. Die Abbildung h wird eindeutig durch die Werte bestimmt, die diese Abbildung auf den Punkten $\{x_n\}$ annimmt.

II. Existenz: Für ein beliebiges System $\{y_n\}_{n \in N}$, $y_n \in X_n$ können wir umgekehrt die Abbildung h: $\bigcup_{n \in N} X_n \to \bigcup_{n \in N} X_n$ durch die Vorschrift $(y)h = (y_{n_0})g$ definieren, wobei $y = (x_{n_0})g$ ein beliebiger Punkt aus $\bigcup_{n \in N} X_n$ ist. Da $g: X_{n_0} \to X_{n_1}$ ist, sehen wir, daß y und auch $(y)h$ in derselben Menge X_{n_1} liegen. Für $f: X_{n_1} \to X_{n_2}$ $(f \in K)$ und für $y \in X_{n_1}$ gilt dann: $((y)f)h = ((x_{n_0})(g \circ f))h = (y_{n_0})(g \circ f) = ((y)h)f$. Das heißt, daß $h \in C(K)$ ist und dabei $(x_n)h = (y_n)1_{K_n}$ gilt (für jedes $n \in N$).

Satz 3. *$\{x_n\}_{n \in N}$ sei eine präzise Quelle einer cayleyschen Kategorie $(\{X_n\}_{n \in N}; K)$. Für jedes $n \in N$ bilden wir $Y_n = \left\{ y \in \bigcup_{n \in N} X_n \,;\, y = (x_n)f \text{ für } f \in K \right\}$. K^* sei die Menge der Restriktionen aller Abbildungen aus $C(K)$ auf diese Mengen Y_n, d.h. $K^* = \{h \mid Y_n \,;\, h \in C(K),\ n \in N\}$.*

$(\{Y_n\}_{n \in N}; K^*)$ ist dann eine cayleysche Kategorie mit der präzisen Quelle $\{x_n\}_{n \in N}$.

Beweis. Da $\{x_n\}_{n \in N}$ eine präzise Quelle der ursprünglichen Kategorie ist, sehen wir sofort, daß $\{Y_n\}$ disjunkte Mengen sind, $\bigcup_{n \in N} Y_n = \bigcup_{n \in N} X_n$, und dabei in Y_n genau ein x_n liegt.

Seien $x \in Y_n$ $(n \in N)$, $f \in K$ und $(x)f$ werde definiert; dann gilt auch $(x)f \in Y_n$. Dazu ist nur zu beachten, daß $x = (x_n)g$, wobei $g \in K$, also $(x)f = (x_n)(g \circ f)$.

Man nehme jetzt ein beliebiges $h \in C(K)$ und ein beliebiges $n \in N$ (wobei $(x_n)h \in Y_{n'}$). Für jedes $y \in Y_n$, $y = (x_n)f$ $(f \in K)$ gilt dann $(y)h = ((x_n)f)h = ((x_n)h)f \in Y_{n'}$. Jedes $h \in C(K)$ bildet also die ganze Menge Y_n in einer Menge $Y_{n'}$ ab. Aus den Eigenschaften von $C(K)$ ist sofort zu ersehen, daß $(\{Y_n\}_{n \in N}; K^*)$ eine Transformationskategorie ist.

v: $Y_{n_0} \to Y_{n'}$ sei eine beliebige Abbildung aus K^*. In $C(K)$ liegt dann die folgenderweise definierte Abbildung h: $\bigcup_{n \in N} Y_n \to \bigcup_{n \in N} Y_n$:

$h \mid Y_{n_0} = v$, $h \mid Y_n = 1_{Y_n}$ (für $n \neq n_0$).

x, $(x)f$ (für ein beliebiges $f \in K$, f: $X_{n_1} \to X_{n_2}$ und für jedes $x \in X_{n_1}$) liegen in derselben Menge Y_n. Ist diese Menge verschieden von Y_{n_0}, so ist die Beziehung $((x)f)h = ((x)h)f$ $(= (x)f)$ evident klar und gültig. Wenn x, $(x)f$ in der Menge Y_{n_0} liegen, gilt die verlangte Beziehung dank $v \in K^*$.

Für jedes $y \in \bigcup_{n \in N} Y_n$ nehmen wir $n_0 \in N$, so daß $y \in X_{n_0}$ gilt. Da jede Abbildung aus $C(K)$ X_n in sich selbst abbildet, kann die Abbildung $v \in K^*$ nur den Punkt x_{n_0} aus dem System $\{x_n\}_{n \in N}$ auf y abbilden; das heißt, daß sie die Form v: $Y_{n_0} \to Y_{n'}$

haben muß. Die Existenz genau einer Abbildung $v \in K^*$, die $(x_{n_0})v = y$ erfüllt, folgt jetzt leicht aus der Tatsache, daß genau ein h in $C(K)$ zu finden ist, das $(x_{n_0})h = y$ und $(x_n)h = x_n$ (für $n \neq n_0$) erfüllt. Damit überprüft man, daß $\{x_n\}_{n \in N}$ eine präzise Quelle der Kategorie $(\{Y_n\}_{n \in N}; K^*)$ ist.

Man beachte einen speziellen Fall der Transformationskategorie, die nur ein Objekt hat. Ein Transformationsmonoid $(X; M)$ ist cayleysch genau dann, wenn es ein solches $x \in X$ gibt, daß für jedes $y \in X$ genau eine Abbildung $f \in M$ existiert, die $(x)f = y$ erfüllt. Der Satz 2 besagt dann, daß wenn $(X; M)$ ein cayleysches Monoid ist, auch $(X; C(M))$ ein cayleysches Monoid ist.

Definition 7. *Wir nennen ein System der Abbildungen S monocayleysch, wenn es ein cayleysches Monoid $(X; M)$ gibt, so daß $S \subseteq M$ ist.*

Satz 4. *Sei S ein System von Abbildungen aus einer Menge X_0 in Mengen X_0, $\{X_m\}_{m \in M}$. (M ist eine beliebige Menge, die 0 nicht enthält.)*

Ist das System der Abbildungen S cayleysch, so ist ein System S' monocayleysch, das von allen solchen Abbildungen $f\colon X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m \to X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m$ gebildet wird, die $f|X_0 \in S$ und $f|X_m = 1_{X_m}$ für $m \neq 0$ $(m \in M)$ erfüllen.

Beweis. Wir können für das cayleysche System S eine cayleysche Kategorie $(\{X_n\}_{n \in N}; K)$ mit der präzisen Quelle $\{x_n\}_{n \in N}$ finden, so daß $S \subseteq K$ und $M \cup \{0\} \subseteq$ $\subseteq N$ gelten. $H = \left\{h \middle| \left(X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m\right);\ h \in C(K) \text{ und } h(x_n) = x_n \text{ für } n \neq 0\ (n \in N)\right\}$.
Es ist leicht zu sehen, daß H bezüglich der Komposition abgeschlossen ist und auch die identische Abbildung auf $X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m$ enthält. Aus dem Satz 2 sehen wir dann, daß es genau eine Abbildung $h\left|\left(X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m\right)\right. \in H$ zu jedem $x \in X_0$ gibt, die $(x_0)h = x$ erfüllt ($(x_n)h = x_n$ für $n \neq 0$).

Man ergänze H mit einem System der konstanten Abbildungen $G = \left\{c_y;\ y \in \bigcup_{m \in M} X_m\right\}$. Die Abbildung $c_y\colon X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m \to X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m$ bildet jeden Punkt $x \in X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m$ im Punkt y ab. Da $c_{y_1} \circ c_{y_2} = c_{y_2} = t \circ c_{y_2}$, $c_{y_2} \circ t = c_{(y_2)t} \in G$ (für c_{y_1}, $c_{y_2} \in G$, $t \in H$) gelten, ist auch $H \cup G$ bezüglich der Abbildungskomposition abgeschlossen. Es gibt genau eine Abbildung in $H \cup G$, die den Punkt x_0 auf den gegebenen Punkt $x \in X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m$ abbildet. $\left(X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m;\ H \cup G\right)$ ist also ein cayleysches Monoid.

Jede Abbildung $f \in S'$ kommutiert mit jedem $t \in H$ und auch mit $c_y \in G$. f

kommutiert offensichtlich mit t auf den Punkten aus $\bigcup_{m \in M} X_m$; auf den Punkten aus X_0 kommutieren f und t, da t eine Restriktion einer Abbildung aus $C(K)$ ist, und $c_y \circ f = c_y = f \circ c_y$ gilt für jedes c_y.

$S' \subseteq C(H \cup G)$, wobei $\left(X_0 \cup \bigcup_{m \in M} X_m ; C(H \cup G)\right)$ ein cayleysches Monoid ist.

Folgerung. *Ein System von Abbildungen der Menge X_0 in sich selbst ist cayleysch genau dann, wenn es monocayleysch ist.*

Beweis. Für ein cayleysches System S von Abbildungen aus der Menge X_0 in X_0 — d.h. $M = \emptyset$ — ist $S' = S$.

3. Cayleysche Abbildungen

Jetzt werden wir eine solche Abbildung f charakterisieren, die ein Morphismus einer cayleyschen Kategorie ist. Nach unseren Definitionen kann f die Form f: $X_0 \to X_0$ oder die Form f: $X_0 \to X_1$ ($X_0 \cap X_1 = \emptyset$) haben. (X_0, X_1 sind nichtleere Mengen.) Nach der Folgerung können wir einen Satz formulieren, der cayleysche Abbildungen f: $X_0 \to X_0$ charakterisieren wird.

Satz 5. *Eine Abbildung der Menge X_0 in sich selbst ist cayleysch genau dann, wenn sie monocayleysch ist.*

Man kann eine monocayleysche Abbildung wie eine rechte innere Translation eines Monoids auffassen. Aber die rechten inneren Translationen sind mit linken inneren Translationen identisch, wenn wir sie von zwei gegenseitig dualen Monoiden hernehmen. Monocayleysche Abbildungen werden also ausführlich in folgenden Arbeiten [1], [2], [3] charakterisiert, die alle Translationen von Monoiden beschreiben.

Im Folgenden wird man die cayleysche Abbildung f: $X_0 \to X_1$ beschreiben.

Man bemerke, daß man unter einem Urbild vom Punkt $x \in X_1$ (bei der Abbildung f) eine Menge $(x)f^{-1} = \{y \in X_0; (y)f = x\}$ versteht.

Hilfssatz. *f: $X_0 \to X_1$ sei eine Abbildung zwischen zwei disjunkten nichtleeren Mengen. Man setze voraus:*

X_1 hat wenigstens zwei Punkte, und es gilt nicht, daß alle Mengen $(x)f^{-1}$ ($x \in X_1$) eine endliche und gleiche Anzahl der Elemente haben.

Dann gibt es eine cayleysche Kategorie mit zwei Objekten $(X_0, X_1; K)$, so daß $f \in K$ ist.

Beweis. Man nehme ein solches Element a der Menge X_1, dessen Urbild $(a)f^{-1}$ die minimale Mächtigkeit aus allen $(x)f^{-1}$ hat. Wir bezeichnen $D = \{x \in X_1; (x)f^{-1} \neq \emptyset\}$ und $B' = D - \{a\}$ ($D \neq \emptyset$).

Man indiziere die Elemente aus $(a)f^{-1}$ durch injektives Verfahren mit Hilfe einer Menge I, d.h. $(a)f^{-1}=\{a_i\,;\ i\in I\}=A$. Zugleich entnehmen wir zu jedem Punkt $x\in B'$ ein (injektiv indiziertes) System $\{x_i\}_{i\in I}$ von Elementen aus der Menge $(x)f^{-1}$, d.h. $\{x_i\,;\ i\in I\}\subseteq(x)f^{-1}$. Da die Menge X_1 wenigstens zwei Punkte hat und die Urbilder von allen Punkten aus X_1 entweder ungleiche Mächtigkeiten haben oder unendlich sind (das kommt nur in $\mathcal{N}$ vor), können wir immer die Auswahl der Elemente x_i so realisieren, daß es ein Element $c\in((y)f^{-1}-\{y_i\,;\ i\in I\})$ für ein $y\in B'$ gibt. Dann können wir $B=\bigcup_{x\in B'}\{x_i\,;\ i\in I\}$, $X_0-(B\cup A)=C\neq\emptyset$ zeichnen. Man wähle ein festes Element $c\in C$ und bezeichne noch $A'=(X_1-D)\cup\{a\}$.

Wir sehen, daß A, B, C, A', B' disjunkte Mengen sind, $A\cup B\cup C=X_0$, $A'\cup B'=X_1$. Man bemerkt dazu, daß alles sich auch für $I=\emptyset$, d.h. $a\notin D$, $A=\emptyset=B$, ganz korrekt konstruieren läßt.

Jetzt werden wir eine solche cayleysche Kategorie $(Y_0,\ Y_1\,;\ H)$ konstruieren, damit eine Abbildung $t\colon X_0\cup X_1\to X_0\cup X_1$, die $t|X_0=f$, $t|X_1=1_{X_1}$ erfüllt, in dem Zentralisator $C(H)$ liegt.

Die Objektive sind $Y_0=C\cup B\cup B'$, $Y_1=A\cup A'$.

Nunmehr werden wir die Morphismen beschreiben. Für jedes $y\in X_0$, $y\neq c$ definieren wir auf der Menge Y_0 eine Abbildung g_y folgenderweise:

$(x)g_y=y$ für $x\in C$

$(x_i)g_y=((y)f)_i$ für jedes $x_i\in B$

$(x')g_y=(y)f$ für $x'\in B'$.

Es ist zu sehen, daß g_y eine Abbildung aus Y_0 in Y_1 für jedes $y\in A$ ist, für $y\in B\cup C$ $g_y\colon\ Y_0\to Y_0$ ist.

Für jedes $z\in X_1$, $z\neq a$ definieren wir auf der Menge Y_1 eine Abbildung g_z folgenderweise:

$(a_i)g_z=z_i$ für jedes $a_i\in A$

$(x')g_z=z$ für $x'\in A'$.

Diese Definition ist auch korrekt falls $z\notin B'$; ist g_z eine Abbildung aus Y_1 in Y_1, dann muß $A=\emptyset$ gelten. Wenn $z\in B'$ ist, ist offensichtlich $g_z\colon\ Y_1\to Y_0$.

Das folgende System der Morphismen

$$H=\{g_y\,;\ y\in X_0-\{c\}\}\cup\{g_z\,;\ z\in X_1-\{a\}\}\cup\{1_{Y_0},\ 1_{Y_1}\}$$

ist bezüglich der Abbildungskomposition abgeschlossen. Das ist aus dem folgenden Schema von Implikationen zu sehen.

$g_{y'}\colon\ Y_0\to Y_0$ | $\Rightarrow$ entweder $y'\in C-\{c\}$,
$g_Y\colon\ Y_0\to Y_0,\ Y_1$ | $y\in X_0-\{c\}$ $\quad\Rightarrow\ g_{y'}\circ g_y=g_y$

oder $y'=x_i\in B$, $(i\in I)$,
$y\in X_0-\{c\}$ $\quad\Rightarrow\ g_{y'}\circ g_y=g_{((y)f)_i}$

$$\begin{array}{llll}
g_{z'}: Y_1 \to Y_0 & \Rightarrow z' \in B', y \in B \cup C - \{c\} & \Rightarrow g_{z'} \circ g_y = g_{(y)f} \\
g_y: Y_0 \to Y_0 & & \\
g_{z'}: Y_1 \to Y_0 & \Rightarrow z' \in B', \; y \in A & \Rightarrow \begin{array}{l} D = X_1, \\ g_{z'} \circ g_y = 1_{Y_1} \end{array} \\
g_y: Y_0 \to Y_1 & & \\
g_{z'}: Y_1 \to Y_1 & \Rightarrow z' \in A' - \{a\}, z \in X_1 - \{a\} & \Rightarrow \begin{array}{l} g_{z'} \circ g_z = g_z, \\ (A = \emptyset) \end{array} \\
g_z: Y_1 \to Y_0, Y_1 & & \\
g_{y'}: Y_0 \to Y_1 & \Rightarrow \begin{array}{l} y' = a_i, \; (i \in I), \\ z \in X_1 - \{a\} \end{array} & \Rightarrow \begin{array}{l} z \in D = X_1, \\ g_{y'} \circ g_z = g_{z_i} \end{array} \\
g_z: Y_1 \to Y_0, Y_1 & &
\end{array}$$

So ist $(Y_0, Y_1; H)$ eine Transformationskategorie, wobei das Paar $\{c, a\}$ $(c \in Y_0 \cup X_0, \; a \in Y_1 \cup X_1)$ ihre präzise Quelle bildet. Für jedes $y \in X_0 - \{c\}$ ist nämlich $(c)g_y = y$, für $z \in X_1 - \{a\}$ ist $(a)g_z = z$.

Jetzt werden wir zeigen, daß die Abbildung t in $C(H)$ liegt. t bildet die Menge Y_0, bzw. Y_1, in sich selbst ab. Jedes g_r $(r \in X_0 \cup X_1 - \{a, c\})$ bildet alle Punkte der Menge X_0, bzw. X_1, in derselben Menge ab. Darum genügt es zu beweisen, daß t mit g_y, bzw. mit g_z, auf der Menge $Y_0 \cap X_0$, bzw. $Y_1 \cap X_0$, kommutiert.

Für $x \in Y_0 \cap X_0$, $y \in X_0 - \{c\}$ haben wir $((x)t)g_y = (y)f = ((x)g_y)f = ((x)g_y)t$; für $x \in Y_1 \cap X_0$, $z \in X_1 - \{a\}$ ist $((x)t)g_z = (a)g_z = z = ((x)g_z)t$.

Aus dem Satz 3 geht hervor, daß wir eine cayleysche Kategorie aus $C(H)$ durch die Restriktionen bilden können. In unserem Fall ist es zu sehen, daß die Restriktionen auf den Mengen X_0, X_1 gemacht werden. Es gibt also eine cayleysche Kategorie $(X_0, X_1; H^*)$, und in H^* liegt u.a. auch die Abbildung $t|_{X_0} = f$.

Dadurch ist der Hilfssatz bewiesen.

Satz. 6. *Die Abbildung f: $X_0 \to X_1$ (X_0, X_1 sind nichtleere disjunkte Mengen) ist nicht eine cayleysche Abbildung nur in folgenden zwei Fällen:*

(1) *Die Menge X_1 hat nur ein Element.*

(2) *Es gibt eine natürliche Zahl $m \geqslant 2$, so daß alle Urbilder $(x)f^{-1}$ von den Punkten $x \in X_1$ genau m Elemente haben.*

Beweis. Wir werden einzelne Möglichkeiten durchnehmen, die für f vorkommen können.

I. Die Menge X_1 hat nur ein Element. Läge f in einer cayleyschen Kategorie, gälte es für ihre präzise Quelle $\{x_n\}$ widersprüchlich $(x_0)f = (x_1)1_{X_1}$.

II. Die Menge X_1 hat wenigstens zwei Elemente, und alle Urbilder von Elementen aus X_1 sind nicht zugleich endlich und noch gleichmächtig groß. Wegen des obenerwähnten Hilfssatzes gehört f zu einer cayleyschen Kategorie $(X_0, X_1; H^*)$.

III. Die Menge X_1 hat wenigstens zwei Elemente; die Urbilder von allen Punkten aus X_1 sind genau einelementige Mengen, d.h. f ist eine Bijektion.

Wir können zwei Mengen A_0, B_0 mit gleicher Mächtigkeit, $A_0 \cap B_0 = \emptyset$, $A_0 \cup B_0 \subseteq X_0$ derart finden, daß die Menge $D_0 = X_0 - (A_0 \cup B_0)$ höchstens ein Element hat.

Wir bezeichnen die Bildmengen von A_0, B_0, D_0 bei der Bijektion f in Reihe mit A_1, B_1, $D_1 \subseteq X_1$. Man nehme eine feste Bijektion g: $A_0 \to B_0$ und wähle ein $x_0 \in A_0$. Wir bezeichnen noch $x_1 = ((x_0)g)f$ $(\in B)$.

Für jedes $a \in A_0$ $(a \neq x_0)$ definieren wir $c_a: X_0 \to X_0$ durch folgende Vorschrift:

$$(x)c_a = \begin{cases} a \text{ für } x \in A_0 \\ (a)g \text{ für } x \in B_0 \\ x \text{ für } x \in D_0 \end{cases}.$$

Für jedes $b \in B_1$ $(b \neq x_1)$ definieren wir c_b: $X_1 \to X_1$ folgenderweise:

$$(x)c_b = \begin{cases} (b)(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f) \text{ für } x \in A_1 \\ b \text{ für } x \in B_1 \\ x \text{ für } x \in D_1 \end{cases}$$

Sei

$$K = \{1_{X_0}, 1_{X_1}, f, f^{-1}\} \cup \bigcup_{a \in A_0 - \{x_0\}} \{c_a, c_a \circ f\} \cup \bigcup_{b \in B_1 - \{x_1\}} \{c_b, c_b \circ f^{-1}\}.$$

Die folgende Beziehungen zeigen, daß dieses System K bezüglich de Abbildungskomposition abgeschlossen ist: $c_{a'} \circ c_a = c_a$, $c_a \circ f = f \circ c_{((a)g)f}$, $c_{b'} \circ c_b = c_b$, $c_b \circ f^{-1} = f^{-1} \circ c_{((b)f^{-1})g^{-1}}$ (für jede a, $a' \in A_0 - \{x_0\}$, b, $b' \in B_1 - \{x_1\}$). Für jede Abbildung $t \in K$ liegen beide Elemente x, $(x)t$ in genau einer Menge $A_0 \cup A_1$, $B_0 \cup B_1$, $D_0 \cup D_1$. Wir sehen so leicht, daß $(X_0, X_1; K)$ eine Transformationskategorie ist, und daß es genau ein $t \in K$ für jedes $x \in (X_0 \cup X_1) - (D_0 \cup D_1)$ gibt, so daß das Element x ein Bild von dem Punkt x_0 bzw. x_1 ist.

Wenn $D_0 = \emptyset$ (und auch $D_1 = \emptyset$) ist — das kann immer gewährleistet sein, wenn X_0 keine endliche Menge mit ungerader Anzahl der Elemente ist — dann ist $(X_0, X_1; K)$ eine Transformationskategorie mit einer präzisen Quelle $\{x_0, x_1\}$.

Für den Fall $\emptyset \neq D_0 = \{d\}$, $D_1 = \{(d)f\}$ geben wir zu $(X_0, X_1; K)$ ein weiteres Objekt $\{x_2\}$ $(x_2 \notin X_0 \cup X_1)$ und Abbildungen c_d: $\{x_2\} \to X_0$ $((x_2)c_d = d)$, $c_{(d)f}$: $\{x_2\} \to X_1$ $((x_2)c_{(d)f} = (d)f)$ zu. $(X_0, X_1, \{x_2\}; K \cup \{1_{\{x_2\}}, c_d, c_{(d)f}\})$ ist jetzt eine Transformationskategorie mit einer präzisen Quelle $\{x_0, x_1, x_2\}$.

Dadurch ist bewiesen, daß jede Bijektion f: $X_0 \to X_1$ eine cayleysche Abbildung ist.

IV. Die Menge X_1 hat wenigstens zwei Elemente, alle Urbilder von Elementen aus X_1 sind endlich, gleichmächtig groß und haben wenigstens zwei Elemente. Im Widerspruch mit dem zu beweisenden Satz werden wir annehmen, daß f in einer cayleyschen Kategorie $(\{X_n\}_{n \in N}; K)$ $(0,1 \in N)$ mit einer präzisen Quelle $\{x_n\}_{n \in N}$ liegt.

$C(K)$ sei ihr Zentralisator. Wir bilden (nach dem Satz 3) aus $C(K)$ die cayleysche Kategorie $(\{Y_n\}_{n \in N}; K^*)$, deren präzise Quelle wieder $\{x_n\}_{n \in N}$ ist. Eine beliebige Abbildung $h \in C(K)$ führt alle Punkte der Menge $(x)f^{-1}$ $(x \in X_1)$ in die Menge $((x)h)f^{-1}$ über. Für $y \in (x)f^{-1}$ gilt nämlich $((y)h)f = ((y)f)h = (x)h$.

Man wählt zwei verschiedene Punkte z, z' $(z \neq z')$ in der Menge $(x_1)f^{-1}$. Wegen Satz 2 gibt es Abbildungen $h, h' \in C(K)$, so daß $(x_0)h = z$, $(x_1)h = (x_0)f$; $(x_0)h' = z'$, $(x_1)h' = (x_0)f$ gelten, d.h. $(x_1)(h \circ h') = ((x_0)f)h' = ((x_0)h')f = (z')f = x_1$, $(x_1)(h \circ h) = ((x_0)h)f = x_1 \cdot (h \circ h')|Y_1 \in K^*$ und $(h \circ h)|Y_1 \in K^*$ folgen aus Satz 3. Da für $1_{Y_1} \in K^*$ auch $(x_1)1_{Y_1} = x_1$ ist, $(h \circ h')|Y_1 = (h \circ h)|Y_1 = 1_{Y_1}$. Wir bemerken, daß die Punkte x, $(x)f$ in derselben Menge Y_n liegen, d.h. $(x_1)f^{-1} \subseteq Y_1$, und die Abbildungen $h \circ h$, $h \circ h'$ so auf $(x_1)f^{-1}$ identisch sind. Die Abbildung h ist also auf der Menge $(x_1)f^{-1}$ injektiv und bildet $(x_1)f^{-1}$ in der Menge $((x_1)hf^{-1} = ((x_0)f)f^{-1}$ ab.

Da alle Urbilder bei f eine gleiche endliche Anzahl der Elemente haben, muß $h|(x)f^{-1}$ eine Bijektion zwischen diesen Urbildern sein. Darum findet man $r \in (x_1)f^{-1}$, so daß $(r)h = x_0 \in ((x_0)f)f^{-1}$ gilt. Daraus bekommen wir $r = (r)(h \circ h) = (x_0)h = z$, $r = (r)(h \circ h') = (x_0)h' = z'$, und das ist ein Widerspruch zu $z \neq z'$.

Der Satz ist so gültig für alle möglichen Formen der Abbildung f.

Folgerung. *Eine cayleysche Abbildung $f\colon X_0 \to X_1$ ist Morphismus einer cayleyschen Kategorie mit zwei Objekten X_0, X_1 genau im Fall, wenn f keine Bijektion zwischen zwei endlichen Mengen mit einer ungeraden Anzahl von Elementen ist.*

Wenn die cayleysche Abbildung f eine solche Bijektion zwischen Mengen mit einer ungeraden Anzahl von Elementen ist, wird f erst in einer cayleyschen Kategorie mit drei Objekten X_0, X_1, $\{x_2\}$ liegen.

Beweis. Wir haben im Beweis des vorgehenden Satzes gesehen, daß jede cayleysche Abbildung f in der beschriebenen cayleyschen Kategorie lag. Es ist zu beweisen, daß die Bijektion $f\colon X_0 \to X_1$ zwischen endlichen Mengen mit einer ungeraden Anzahl von Elementen in keiner cayleyschen Kategorie mit zwei Objekten liegt. Setzen wir widersprüchlich voraus, daß eine solche Bijektion f in irgendwelcher Kategorie $(X_0, X_1; K)$ mit einer präzisen Quelle $\{x_0, x_1\}$ liegt.

In $C(K)$ wird dann eine Abbildung h liegen, so daß $(x_0)h = (x_1)f^{-1}$, $(x_1)h = (x_0)f$ gelten. Dann ist $(x_1)(h \circ h) = ((x_0)f)h = ((x_0)h)f = x_1$, $(x_0)(h \circ h) = ((x_1)f^{-1})h = (((x_1)(f^{-1} \circ f))h)f^{-1} = x_0$, also $h \circ h = 1_{x_0 \cup x_1}$.

Man nimmt (wegen Satz 3) die Mengen Y_0, Y_1 der Bilder von x_0, $x_1 \cdot h|Y_0\colon Y_0 \to Y_1$, $h|Y_1\colon Y_1 \to Y_0$. Wir bezeichnen $Z = Y_0 \cap X_0$, $Z' = Y_1 \cap X_0$, $g = h|Z\colon Z \to Z'$, $g' = h|Z'\colon Z' \to Z$. Jetzt gilt $Z \cup Z' = X_0$, $Z \cap Z' = \emptyset$, $g \circ g' = 1_Z$, $g' \circ g = 1_{Z'}$. Aber das ist ein Widerspruch, denn man kann keine Menge X_0 mit der ungeraden Anzahl von Elementen auf zwei gleichmächtig große Teile verteilen.

Bemerkung 1. Die cayleysche Repräsentation einer kleinen Kategorie $(C, \cdot)$ ist mit Hilfe von rechten inneren Translationen gebildet. Ebenso können wir mit Hilfe von linken inneren Translationen eine Transformationskategorie bilden. Diese Transformationskategorie wird identisch mit der cayleyschen Repräsentation einer Kategorie, die dual zu $(C, \cdot)$ ist. Die Beschreibung der cayleyschen Abbildungen charakterisiert alle inneren Translationen kleiner Kategorien.

Bemerkung 2. Oft sprechen wir über eine Transformationskategorie, die (wegen Satz 3) aus dem Zentralisator $C(K)$ gebildet wird, wie über eine Zentralisatorkategorie. Wir können die Zentralisatorkategorie auch aus dem Zentralisator einer beliebigen Transformationskategorie $(\{X_m\}_{m \in M}; K)$ bilden. Dabei müssen wir das System $\{Y_n\}_{n \in N}$ wie ein System der Äquivalenzklassen der Zusammenhangrelation R definieren. (R ist die kleinste Äquivalenzrelation, die die folgende Implikation erfüllt: Ist $(x)f=y$ für ein $f \in K$, dann xRy.) Die Zentralisatorkategorie hat z.B. folgende interessante Eigenschaften (siehe [4]):

$$K^* = K^{***};$$

$$\left\{\begin{matrix}\textit{rechte innere Translationen} \\ \textit{einer kleinen Kategorie } (C, \cdot)\end{matrix}\right\}^* = \left\{\begin{matrix}\textit{linke innere Translationen} \\ \textit{der Kategorie } (C, \cdot)\end{matrix}\right\};$$

eine gemeinsame Quelle von K und K^* ist für beide Kategorien eine präzise Quelle.

(Die Quelle einer Transformationskategorie wird wie eine präzise Quelle definiert, aber wir verlangen nicht (Definition 3), daß f die einzige ist.)

Dem Doz. Z. Hedrlín möchte ich für seine wertvollen Anregungen und Ratschläge vielmals herzlichst danken.

LITERATUR

[1] GORALČÍK, P.—HEDRLÍN, Z.: О сдвигах полугрупп II, Сюръективные преобразования, Mat. Čas., 18, 1968, 263—272.

[2] GORALČÍK, P.: О сдвигах полугрупп III, Преобразования с увеличительной и преобразования с неправильной частью, Mat. Čas., 18, 1968, 273—282.

[3] HEDRLÍN, Z.—GORALČÍK, P.: О сдвигах полугрупп I, Периодические и квазипериодические преобразования, Mat. Čas., 18, 1968, 161—176.

[4] KASTL, J.: Monoidy, kinetony, kategorie, (Diplomarbeit), unveröffentlicht.

[5] MAC LANE, S.: Kategorien, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1972.

Eingegandem am 19. 2. 1975

Katedra základních matematických struktur
Matematicko-fyzikální fakulty KU
Sokolovská 83
186 00 Praha

ВНУТРЕННИЕ СДВИГИ МАЛЫХ КАТЕГОРИЙ

Ян Кастл

Резюме

В статье сосредоточено внимание на малых конкретных категориях. Приведено описание внутреннего сдвига малой категории использующее результаты о внутренних сдвигах полугрупп, введенные П. Горальчиком и З. Гедрлином.