Mathematica Slovaca

Zbigniew Grande

Sur la measurabilité des fonctions de plusieurs variables

Mathematica Slovaca, Vol. 28 (1978), No. 1, 113--118

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136167

Math. Slovaca 28, 1978, No. 1, 113—118

SUR LA MEASURABILITÉ DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

ZBIGNIEV GRANDE

Désignons par R^n l'espace euclidien à n dimensions ($n>1$) et par R l'espace des nombres réels.

Définition 1. (*comparer* [2], *Df.* 4) *On dit qu'une fonction f: $R \to R$ possède la propriété* (G) *lorsque, quels que soient un ensemble $A \subset R$ measurable au sens de Lebesgue de mesure positive et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert $U \subset R$ tel que l'ensemble $A \cap U$ est de mesure lebesguienne positive et* osc $f \leqslant \varepsilon$ *sur l'ensemble des points de densité de l'ensemble $A \cap U$.*

La classe des fonctions ayant la propriété (G) contient toutes les fonctions de première classe de Baire et certaines fonctions non-boreliennes ([3], Exemple 1).

Définition 2. ([4], *Df.*) *On dit qu'une fonction f: $R \to R$ mesurable au sens de Lebesgue est dégénérée au point $x_0 \in R$ lorsqu'il existe un entourage ouvert U du point $f(x_0)$ tel que x_0 est un point d'éclaircie de l'ensemble $f^{-1}(U)$.*

Théorème 0. (*comparer* [2], *Th.* 4) *Soit f: $R^2 \to R$ une fonction telle que toutes ses coupes $f^y(t) = f(t, y)$ soient mesurables au sens de Lebesgue et toutes ses coupes $f_x(t) = f(x, t)$ possèdent la propriété* (G). *Pour que la fonction f soit mesurable au sens de Lebesgue, il faut et il suffit que l'ensemble $A(f) = \{(x, y) \in R^2 : f^y$ est dégénérée au point $y\}$ soit mesurable au sens de Lebesgue, de mesure zéro.*

Dans cet article je démontre un analogue du théorème 0 rapporté aux fonctions définies sur R^n (Th. 1) et en appliquant le théorème 1, je donne la réponse affirmative à la question suivante de Monsieur Mišik:

Problème (L. Mišik) Une fonction f: $R^n \to R$ approximativement continue par rapport à chacune des variables est-elle de classe de Baire n?

Remarque. Monsieur Mišik a remarqué que ce problème est équivalent au suivant:

Une fonction f: $R^n \to R$ approximativement continue (continue dans la topologie de densité) par rapport à chacune des variables est-elle de classe $n-1$ du système de Baire généré par la famille des fonctions approximativement continues sur R^n ?

En effet, l'équivalence de ces formulations résulte des faits que chaque fonction de deuxième classe de Baire sur R^n est la limite d'une suite de fonctions approximativement continues sur R^n ([5]) et que chaque fonction approximativement continue est de première classe de Baire.

Dans le cas où $n = 2$ la réponse affirmative à la question de Mišik est donnée par Davies dans son article [1]. Supposons donc que $n \geqslant 3$.

Lemme 1. (*comparer* [2], *Lemme* 3). *Soit $A \subset R^k \times R^1$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. Il existe alors un ensemble $B \subset A$ mesurable au sens de Lebesgue et tel que:*

1. *$m_{k+1}(A - B) = 0$ (m_i désigne la mesure de Lebesgue dans R^i);*

2. *$B \Subset B$; c'est-à-dire tout point $(x, y) \in B$, où $x \in R^k$ et $y \in R^1$, est tel que:*

2a. *(x, y) est un point de densité de l'ensemble B;*

2b. *x est un point de densité de la coupe*

$$B^y = \{t \in R^k : (t, y) \in B\};$$

2c. *y est un point de densité de la coupe*

$$B_x = \{t \in R^1 : (x, t) \in B\}.$$

Lemme 2. *Soit $A \subset R^n$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. Il existe alors un ensemble $B \subset A$ mesurable au sens de Lebesgue et tel que:*

1. *$m_n(A - B) = 0$;*

2. *$B \Subset B$; c'est-à-dire tout point $(x_1, \ldots, x_n) \in B$ où $x_1, \ldots, x_n \in R$ est tel que:*

2a. *$(x_1, \ldots, x_n)$ est un point de densité de l'ensemble B;*

2b. *x_i est un point de densité de l'ensemble*

$$B_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n} = \{t \in R : (x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in B\}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$;

2c. *$(x_2, \ldots, x_n)$ est un point de densité de l'ensemble*

$$B_{x_1} = \{(t_2, \ldots, t_n) \in R^{n-1} : (x_1, t_2, \ldots, t_n) \in B\}.$$

Démonstration. Nous démontrons ce lemme dans le cas où $n = 3$. Dans le cas général la démonstration est analogue. Il existe, d'après le lemme 1, un ensemble $A_1 \subset A$ tel que $m_3(A - A_1) = 0$ et tel que, quel que soit un point $(x_1, x_2, x_3) \in A_1$, (x_1, x_2, x_3) est un point de densité de l'ensemble A_1, x_1 est un point de densité de l'ensemble $(A_1)_{\cdot, x_2, x_3}$ et (x_2, x_3) est un point de densité de l'ensemble $(A_1)_{x_1}$. Dans la suite il existe pour l'ensemble A_1 un ensemble $A_2 \subset A_1$ tel que $m_3(A_1 - A_2) = 0$ et tel que, quel que soit un point $(x_1, x_2, x_3) \in A_2$, x_2 est un point de densité de l'ensemble $(A_2)_{x_1, \cdot, x_3}$ et (x_1, x_3) est un point de densité de l'ensemble $(A_2)_{x_2}$.

Désignons par C_2 l'ensemble $A_1 - A_2$. L'ensemble C_2 étant de mesure lebesguienne zéro, l'ensemble

$$D = \{(t_2, t_3) \in R^2 : m_1^*((C_2)_{\cdot, t_2, t_3}) > 0\}$$

où m_1^* désigne la mesure extérieure de Lebesgue dans R^1, est donc le même. L'ensemble $E = \{t_3 \in R : m_1^*(\{t_2 \in R : (t_2, t_3) \in D\}) > 0\}$ est également de mesure lebesguienne zéro. Posons $B_2 = A_2 - (R \times D) - (R^2 \times E)$. Remarquons que, quel que soit un point $(x_1, x_2, x_3) \in B_2$, x_1 est un point de densité de l'ensemble $(B_2)_{\cdot, x_2, x_3}$ et x_2 est un point de densité de l'ensemble $(B_2)_{x_1, \cdot, x_3}$. Il existe pour l'ensemble B_2 un ensemble $A_3 \subset B_2$ tel que $m_3(B_2 - A_3) = 0$ et tel que, quel que soit un point $(x_1, x_2, x_3) \in A_3$, x_3 est un point de densité de l'ensemble $(A_3)_{x_1, x_2, \cdot}$ et (x_1, x_2) est un point de densité de l'ensemble $(A_3)_{x_3}$. Désignons par C_3 l'ensemble $B_2 - A_3$ et par D_1 l'ensemble $\{(t_2, t_3) \in R^2 : m_1^*((C_3)_{\cdot, t_2, t_3}) > 0\}$ et par D_2 l'ensemb e $\{(t_1, t_3) \in R^2 : m_1^*((C_3)_{t_1, \cdot, t_3}) > 0\}$. Remarquons que les ensembles

$$H = \{t_1 \in R : m_2^*((A_1 - A_3)_{t_1}) > 0\},$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{t_3 \in R : m_1^*(\{t_2 \in R : (t_2, t_3) \in D_1\}) > 0\},\\
F_2 &= \{t_2 \in R : m_1^*(\{t_3 \in R : (t_2, t_3) \in D_1\}) > 0\},\\
F_3 &= \{t_3 \in R : m^*{}_1{}^*(\{t_1 \in R : (t_1, t_3) \in D_2\}) > 0\} \quad \text{et}\\
F_4 &= \{t_1 \in R : m_1^*(\{t_3 \in R : (t_1, t_3) \in D_2\}) > 0\}
\end{aligned}$$

sont de mesure lebesguienne zéro. Posons

$$B = A_3 - (R \times D_1) - (D_2 \times R) - (R^2 \times F_1) -$$

$$- (R \times F_2 \times R) - (R^2 \times F_3) - (F_4 \times R^2) - (H \times R^2),$$

où

$$D_2 \times R = \{(u_1, u_2, u_3) \in R^3 : (u_1, u_3) \in D_2\}.$$

L'ensemble B satisfait aux conditions 1 et 2 du lemme 2. Dans le cas général on démontre, analogiquement, en appliquant bien des fois le théorème de Fubini.

Étant donnée une fonction f: $R^n \to R$, les fonctions d'une variable

$$f_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n}(t) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$(i = 1, \ldots, n)$ s'appellent coupes de la fonction f relativement à $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Proposition. *Supposons qu'une fonction f: $R^n \to R$ est mesurable au sens de Lebesgue. L'ensemble*

$$A(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n : f_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n}$$
$$\text{est approximativement continu au point } x_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue et $m_n(R^n - A(f)) = 0$.

Démonstration. Soit $\{U_k\}$ une suite des intervalles ouverts aux extremités rationnelles. Posons $B_k = f^{-1}(U_k)$ pour $k = 1, 2, \ldots$. Selon le lemme 2 il existe pour tout ensemble B_k un ensemble $C_k \subset B_k$ tel que $m_n(B_k - C_k) = 0$ et $C_k \Subset C_k$. Remarquons que $m_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k - C_k)\right) = 0$. Afin d'établir notre proposition il suffit de démontrer que $C = R^n - \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k - C_k) \subset A(f)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un point de l'ensemble C. Évidemment $(x_1, \ldots, x_n) \notin B_k - C_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$. Fixons l'indice $i \leqslant n$. Démontrons que la fonction $f_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n}$ est approximativement continue au point x_i. Dans ce but fixons un nombre $\varepsilon > 0$ et démontrons que x_i est un point de densité de l'ensemble

$$E = \{t \in R\colon |f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon\}.$$

Soit U_{k_0} un intervalle ouvert de la suite $\{U_k\}$ contenant $f(x_1, \ldots, x_n)$ et contenu dans l'intervalle $(f(x_1, \ldots, x_n) - \varepsilon, f(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon)$. Comme $(x_1, \ldots, x_n) \in B_{k_0}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \notin B_{k_0} - C_{k_0}$, on a donc $(x_1, \ldots, x_n) \in C_{k_0}$. Mais $C_{k_0} \Subset C_{k_0}$, x_i est donc un point de densité de l'ensemble $(C_{k_0})_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n}$ et par consequent de l'ensemble E, d'où notre proposition.

Lemme 3. ([1], *Lemme* 2 *et* [3], *Lemme* 1) *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace avec la mesure* μ *qui est* σ*-finie. Soit* $f\colon X \to R$ *une fonction telle que, quel que soit le nombre* $\varepsilon > 0$, *la classe d'ensembles* $D_\varepsilon = \left\{D \in \mathcal{M}\colon \operatorname*{osc}_D f \leqslant \varepsilon\right\}$ *satisfait à la condition suivante:*

(1) *il existe pour tout ensemble* $A \in \mathcal{M}$ *de mesure* μ *positive un ensemble* $D \in D$ *tel que* $D \subset A$ *et* $\mu(D) > 0$. *La fonction* f *est alors* $\bar{\mu}$*-mesurable, où* $\bar{\mu}$ *designe le complété de la mesure* μ.

Théorème 1. *Soit* $f\colon R^n \to R$ *une fonction telle que toutes ses coupes* $f_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *soient mesurables au sens de Lebesgue et toutes ses coupes* $f_{x_2, \ldots, x_n}$ *possèdent la propriété* (G). *Pour que la fonction* f *soit mesurable au sens de Lebesgue, il faut et il suffit que l'ensemble*

$$B(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n\colon f_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n}$$
$$\textit{n'est pas dégénéré au point } x_i \textit{ pour } I = 2, \ldots, n\},$$

soit mesurable au sens de Lebesgue et $m_n(R^n - B(f)) = 0$.

Démonstration. La necessité résulte de la proposition.

Suffisance. Je démontre la suffisance dans le cas, où $n = 3$. Dans le cas general la démonstration est analogue. Dans ce but démontrons que la fonction f satisfait aux conditions du lemme 3. Soient $A \subset R^3$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue de mesure positive et ε un nombre positive arbitraire. Rangeons tous les intervalles ouverts aux extrémités rationnelles en une suite $\{U_k\}$ et tous les intervalles fermés aux extrémités rationnelles et à la longueur $\leq \varepsilon$ en une suite $\{K_k\}$. Désignons par $Q_{r,s}$ l'ensemble de tous les points $(x_2, x_3) \in R^2$ pour lesquels l'ensemble $A_{\cdot, x_2, x_3} \cap U_r$ est mesurable au sens de Lebesgue de mesure positive et $f(t, x_2, x_3) \in K_s$ pour tout point de densité de l'ensemble $A_{\cdot, x_2, x_3} \cap U_r$. Soit Q l'ensemble de tous les points $(x_2, x_3) \in R^2$ pour lesquels l'ensemble $A_{\cdot, x_2, x_3}$ est mesurable au sens de Lebesgue et de mesure positive. Toutes les coupes f_{x_2, x_3} ayant la propriété (G), on a donc $\bigcup_{r,s} Q_{r,s} \supset Q$. Comme de plus $m_2(Q) > 0$, il existe donc un couple d'indices (r_0, s_0) telle que $m_2^*(Q_{r_0, s_0}) > 0$. Désignons par B l'ensemble $\{(x_2, x_3) \in R^2 \colon (x_2, x_3)$ est un point de densité extérieure de l'ensemble $Q_{r_0, s_0}\}$. L'ensemble B est mesurable au sens de Lebesgue et $m_2(B) = m_2^*(Q_{r_0, s_0}) > 0$. Soit $C = (U_{r_0} \times B) \cap A$. L'ensemble C est mesurable au sens de Lebesgue et $m_3(C) > 0$, comme $m_1(C_{\cdot x_2, x_3}) > 0$ pour presque tous les points $(x_2, x_3) \in Q_{r_0, s_0}$. Soit $D = C \cap B(f)$. D'après le lemme 2, il existe pour l'ensemble D un ensemble $E \subset D$ tel que $m_3(D - E) = 0$ et $E \propto E$. Evidemment $E \subset A$ et $m_3(E) > 0$. Démontrons encore que $f(x_1, x_2, x_3) \in K_{s_0}$ pour tout point $(x_1, x_2, x_3) \in E$. Fixons un point $(x_1, x_2, x_3) \in E$. Comme $E \propto E$, donc l'ensemble E_{x_1} ne se compose que de ses points de densité et il est mesurable au sens de Lebesgue, de mesure positive. De plus chacun de ses sous-ensembles mesurables au sens de Lebesgue de mesure positive coupe l'ensemble Q_{r_0, s_0}. Supposons, par contre, que $f(x_1, x_2, x_3) \notin K_{s_0}$. La fonction de deux variables $f_{x_1}(u_2, u_3) = f(x_1, u_2, u_3)$ est mesurable au sens de Lebesgue sur l'ensemble E_{x_1} ([2], Th. 2 et Th. 4). Comme de plus $f_{x_1}(Q_{r_0, s_0}) \subset K_{s_0}$, on a donc $(*)$ $m_2(E_{x_1} - (f_{x_1})^{-1}(K_{s_0})) = 0$. D'autre part, comme $f(x_1, x_2, x_3) \notin K_{s_0}$ et la coupe f_{x_1, x_3} n'est pas dégénérée au point x_2, on a donc

$$m_1^*(E_{x_1, \cdot, x_3} \cap (f_{x_1, x_3})^{-1}(R - K_{s_0})) > 0.$$

Les coupes f_{x_1, u_2} ne sont pas dégénerées au point x_3 pour tout point $u_2 \in E_{x_1, \cdot, x_3} \cap (f_{x_1, x_3})^{-1}(R - K_{s_0})$, on a donc $m_2^*(E_{x_1} \cap (f_{x_1})^{-1}(R - K_{s_0})) > 0$, en contradiction avec $(*)$.

Théorème 2. *Supposons qu'une fonction $f \colon R^n \to R$ est approximativement continue par rapport à chacune de n variables. La fonction f est de classe de Baire n.*

La démonstration est analogue à la démonstration du théorème 2 de l'article [1]. Dans cette démonstration intervient la mesurabilité de la fonction f qui résulte du théorème 1.

TRAVAUX CITÉS

[1] DAVIES, R. O.: Separate approximate implies measurability. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 73, 1973, 461—465.

[2] GRANDE, Z.: La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition $F(x, f(x))$. Dissertationes Mathematicae (sous presse).

[3] GRANDE, Z.: Sur la mesurabilité des fonctions de deux variables Bull Acad. Polon S i , Ser Scı Math. Astronom. Phys , 21, 1973, 813—816.
[4] GRANDE, Z.: On the measurab'lity of functions of two variables, Math Proc Camb Phil Soc , 77, 1975, 335—336.
[5] GRANDE, Z.: Granice funkcji aproksymatywnie ciągłych. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Gdańskiego (sous presse)

Reçu le 1. Septembre 1976

Instytut matematykı politechnıky Gdanskieȷ
ul Marchiewskıego 16a, skr po zt 628
80 952 Gdansk
Polska

ИЗМЕРИМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Збигниев Гранд

Резюме

В настоящей работе доказана следующая теорема: Если деиствительная функция явл ется аппроксимативно непрерывнои относительно всякои из n перем нны , т она яв яет я n г класса Бэра.