Belmesnaoui Aqzzouz; R. Nouira

La categorie Abelienne des quotients de type $\mathcal{L}F$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 57 (2007), No. 1, 183–190

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/128165`

Czechoslovak Mathematical Journal, 57 (132) (2007), 183–190

THE ABELIAN CATEGORY OF QUOTIENTS OF $\mathcal{L}\Im$-SPACES

B. Aqzzouz, R. Nouira, Kénitra

(Reçu December 12, 2004)

Abstract. We construct the category of quotients of $\mathcal{L}\Im$-spaces and we show that it is Abelian. This answers a question of L. Waelbroeck from 1990.

Keywords: $\mathcal{L}\Im$-space, foncteur, catégorie abélienne

MSC 2000: 46M05, 46M15, 46M40

1. Introduction et notations

Dans [5, problème b, page 333], Waelbroeck a demandé une catégorie contenant la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires continues, qui est stable sous les limites inductives injectives dénombrables et les limites projectives dénombrables et telle que si $u\colon E \to F$ est un morphisme à graphe fermé entre deux objets de cette catégorie alors u est continue. L'objectif de ce papier est de répondre à cette question en construisant ce que nous appelerons la catégorie des quotients d'espaces de type $\mathcal{L}\Im$ et nous montrerons que c'est une catégorie abélienne. Plus précisément, nous définirons une catégorie $\tilde{\mathbf{q}}\mathcal{L}\Im$ qui a comme objets, les quotient $E|F$ de type $\mathcal{L}\Im$, i.e. des espaces vectoriels E/F, où E est un espace de type $\mathcal{L}\Im$, F un sous-espace vectoriel de E, qui est aussi un espace de type $\mathcal{L}\Im$ et tel que l'injection $F \to E$ est un morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\Im$. Les morphismes de cette catégorie seront les applications entre deux quotients $E|F$ et $E_1|F_1$ de type $\mathcal{L}\Im$, i.e. les éléments du quotient de l'espace des morphismes d'espaces de type $\mathcal{L}\Im$ de E dans E_1 et qui appliquent F dans F_1 par l'espace des morphismes d'espaces de type $\mathcal{L}\Im$ de E dans F_1. Ces morphismes seront aussi appelés morphismes stricts. Un pseudo-isomorphisme $u\colon E|F \to E_1|F_1$ est un morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\Im$ est induit par une application linéaire surjective $u_1\colon E \to E_1$ telle que $u_1^{-1}(F_1) = F$.

Comme la catégorie $\tilde{\mathbf{q}}\mathcal{L}\Im$ contient la catégorie des quotients banachiques $\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{Ban}$ [4], et dans cette dernière n'est pas abélienne, alors il existe des pseudo-isomorphismes de

$\tilde{\mathbf{q}}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ qui ne sont pas des isomorphismes. Nous introduirons alors une catégorie $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ qui est plus grande que $\tilde{\mathbf{q}}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ et dans laquelle tous les pseudo-isomorphismes sont inversibles. C'est une sous-catégorie de la catégorie des espaces vectoriels **EV**, qui est engendrée par $\tilde{\mathbf{q}}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ et les inverses des pseudo-isomorphismes. Elle a comme objets les quotients de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ et comme morphismes toutes les compositions des morphismes stricts et des inverses des pseudo-isomorphismes i.e. tout morphisme u de $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ s'écrit comme $u = v \circ s^{-1}$, où s est un pseudo-isomorphisme et v un morphisme strict. Enfin, nous montrerons que la catégorie $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ est abélienne.

Avant d'énoncer et de montrer les résultats de ce papier, nous rappelons ci-dessous quelques définitions dont nous aurons besoin dans la suite. Notons par **EV** (resp. **Ban**) la catégorie des espaces vectoriels et des applications linéaires (resp. espaces de Banach et des applications linéaires continues).

Un sous-espace banachique F d'un espace de Banach $(E, \| \|_E)$ est un sous-espace vectoriel, muni d'une norme banachique $\| \|_F$ telle que l'injection $(F, \| \|_F) \to (E, \| \|_E)$ est continue. Un quotient banachique $E|F$ est un espace vectoriel E/F, où E est un espace de Banach et F un sous-espace banachique de E. Si $E|F$ et $E_1|F_1$ sont deux quotients banachiques, un morphisme strict $u\colon\ E|F \to E_1|F_1$ est induit par une application linéaire continue $u_1\colon\ E \to E_1$ dont la restriction $u_1|F\colon\ F \to F_1$ est continue. Le morphisme strict u est dit un pseudo-isomorphisme s'il est induit par une application linéaire continue $u_1\colon\ E \to E_1$ surjective telle que $u_1^{-1}(F_1) = F$.

Notons par $\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{Ban}$ la catégorie des quotients banachiques et des morphismes stricts. Comme la catégorie $\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{Ban}$ n'est pas abélienne, Waelbroeck a introduit dans [4], une catégorie abélienne **qBan** qui a les mêmes objets que $\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{Ban}$ et dans laquelle tous les pseudo-isomorphismes sont inversibles. Pour plus de détails à se sujet, nous renvoyons le lecteur à [4].

Soit E un espace vectoriel. Si B est un disque (i.e. un ensemble convexe équilibré) de E, on note E_B l'espace vectoriel engendré par B muni de la semi-norme

$$\|x\|_B = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ :\ x \in \alpha B\}.$$

Le disque B est dit complétant si $(E_B, \| \|_B)$ est un espace de Banach.

On appelle bornologie de b-espace sur E, toute famille β de parties de E vérifiant les axiomes suivants:

(1) toute partie finie de E appartient à β.

(2) si $A \in \beta$ et $B \subset A$, alors $B \in \beta$.

(3) β est stable pour la réunion finie.

(4) l'homothétique de tout élément de β est un élément de β.

(5) si $A \in \beta$, alors il existe un disque borné complétant B de β tel que $A \subset B$.

Le couple (E, β) est appelé un b-espace. Une partie A d'un b-espace E est dit bornologiquement fermé, si pour tout borné complétant B de E, le sous-espace vectoriel $A \cap E_B$ est fermé dans E_B.

Sur tout espace vectoriel topologique localement convexe E, l'ensemble des parties absorbées par tout voisinage de 0 forme une bornologie appelée la bornologie de von Neumann, et E muni de cette bornologie sera noté E_b. Si dans E tout disque borné fermé est complétant, alors E_b est un b-espace.

Si (E_1, β_1) et (E_2, β_2) sont deux b-espaces, une application linéaire $u\colon E_1 \to E_2$ est dite bornée si pour tout $A \in \beta_1$ on a $u(A) \in \beta_2$; u est dite bornologiquement surjective si pour tout borné B de E_2, il existe un borné A de E_1 tel que $u(A) \supseteq B$.

On note par **b**, la catégorie des b-espaces dont les morphismes sont les applications linéaires bornées. Pour plus de détails à ce sujet, nous renvoyons le lecteur à [1] et [3].

2. Quotients d'espaces de type $\mathcal{L}\Im$

Un espace de type $\Im$ est un espace vectoriel topologique dont la topologie est localement convexe et complètement métrisable. La bornologie de cet espace est la bornologie de von Neumann i.e. la bornologie définié par l'ensemble des parties bornées pour la topologie.

Un espace vectoriel E est dit de type $\mathcal{L}\Im$ si E s'écrit comme une limite inductive dénombrable et injective d'espaces de type $\Im$, c'est-à-dire que $E = \bigcup_n E_n$ avec chaque $E_n \to E_{n+1}$ injective continue et chaque E_n est un espace de type $\Im$.

Si E est un espace de type $\mathcal{L}\Im$, on munira E soit de la topologie vectorielle limite inductive (i.e. la topologie la plus fine qui induise sur chaque E_n une topologie moins fine que la topologie donnée de E_n), soit de la bornologie limite inductive (i.e. une partie B de E est bornée s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset E_n$ et y est borné). Seulement la topologie limite inductive de E n'est pas toujours séparée, alors que la bornologie limite inductive l'est toujours.

Si E et F sont des espaces de type $\mathcal{L}\Im$, nous définissons un morphisme entre des espaces de type $\mathcal{L}\Im$ comme suit:

Définition 2.1. Soient E et F des espaces de type $\mathcal{L}\Im$. Un morphisme entre des espaces de type $\mathcal{L}\Im$ est une application linéaire $u\colon E \to F$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$, $u(E_n) \subset F_m$ et la restriction $u|E_n\colon E_n \to F_n$ est continue.

Si on munit $\bigcup_n E_n$ et $\bigcup_n F_n$ de leurs bornologies convexes évidentes i.e. une partie B de $\bigcup_n G_n$ est bornée si sa fermeture convexe est contenue et bornée dans G_n pour n suffisament grand, où $G_n = E_n, F_n$.

Définition 2.2. Soient E et F deux espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$. Une application linéaire $u\colon E \to F$ est dite continue si son graphe est bornologiquement fermé, donc en particulier si elle est bornée.

Il s'agit d'une version bornologique du théorème du graphe fermé de Grothendieck [2].

Définition 2.3. Un quotient de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ est un espace vectoriel E/F, où E est un espace de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, F un sous-espace vectoriel de E, qui est aussi un espace de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ et tel que l'injection $F \to E$ est un morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$. On le désigne par $E|F$.

Proposition 2.4. *Soit E un espace de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, et F un sous-espace vectoriel de E. S'il existe une structure de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ sur F telle que $E|F$ soit un quotient de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, alors cette structure est unique. Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E tels qu'il existe tant sur F_1, que sur F_2 une structure de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ faisant de $E|F_1$ et $E|F_2$ des quotients de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, et si $F_1 \subset F_2$, alors l'inclusion $F_1 \to F_2$ est un morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$.*

P r e u v e. Il suffit d'appliquer le théorème du graphe fermé de Grothendieck [2]. En effet, si on a sur F deux structures de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ que nous notons par F^1 et F^2 tel que l'application identité $\mathrm{Id}_F\colon F^1 \to F^2$ est un morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, alors le graphe de l'application Id_F est fermé et donc elle est bornée. De même pour l'application identité $\mathrm{Id}_F\colon F^2 \to F^1$. Ce qui montre l'unicité de la structure de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ sur F.

Pour le second résultat, les hypothèses assurent que le graphe de l'inclusion $F_1 \to F_2$ est bornologiquement fermé. Cette inclusion est donc un morphisme de quotient de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$. $\square$

Proposition 2.5. *Soient E_1, E_2 deux espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, et F_i un sous-espace vectoriel de E_i qui est aussi un espace de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, $i = 1, 2$. Soit $u\colon E_1 \to E_2$ un morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, alors,*

1. *Le sous-espace vectoriel $u(E_1)$ est un espace de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$.*
2. *Le sous-espace vectoriel $u^{-1}(E_2)$ est un espace de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$.*
3. *Si $E_1 = E_2$, alors les sous-espaces vectoriels $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$ sont des espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$.*

P r e u v e. 1. Posons $E_1 = \bigcup\limits_n E_{1,n}$ et $E_2 = \bigcup\limits_n E_{2,n}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n_p \in \mathbb{N}$ tel que $u(E_{1,p}) \subset E_{2,n_p}$ et l'application $u_p\colon E_{1,p} \to E_{2,n_p}$ est bornée. On a $u(E_1) = \bigcup\limits_{1\leqslant p} u_p(E_{1,p})$.

Nous savons que la structure image sur $u_p(E_{1,p})$ est de type $\mathfrak{I}$ telle que l'injection $i_p\colon\ u_p(E_{1,p}) \to E_{2,p}$ est bornée. Munissons $u(E_1)$ de la structure limite inductive $\varinjlim_p u_p(E_{1,p})$, alors l'application $i\colon\ u(E_1) \to E_2$ est un morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$.

2. De la même façon on a $u^{-1}(E_2) = \bigcup_{1 \leqslant p} u^{-1}(E_{2,n_p})$.

3. Nous avons aussi $F_1 \cap F_2 = \bigcup_{1 \leqslant p} (F_{1,p} \cap F_{2,p})$ et $F_1 + F_2 = \bigcup_{1 \leqslant p} (F_{1,p} + F_{2,p})$. $\square$

On introduit évidemment une catégorie $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$. Si $E|F$ et $E_1|F_1$ sont deux quotients d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, les morphismes $E|F \to E_1|F_1$ de cette catégorie, sont les éléments du quotient de l'espace des morphismes d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ de E dans E_1 et qui appliquent F dans F_1 (et sont de ce fait des morphismes d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ de F dans F_1) par l'espace des morphismes d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ de E dans F_1. Ces morphismes seront aussi appelés morphismes stricts.

On note par $\widetilde{\mathbf{q}}\mathcal{L}\mathfrak{I}$, la catégorie des quotients d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ et des morphismes d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$. Si $E|F$, $E_1|F_1$ sont deux quotients d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ et $u\colon\ E|F \to E_1|F_1$ un morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, on dit que u est un pseudo-isomorphisme s'il est induit par un morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ surjectif $u_1\colon\ E \to E_1$ tel que $u_1^{-1}(F_1) = F$.

La catégorie $\tilde{\mathbf{q}}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ n'est pas abélienne car elle contient la catégorie $\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{Ban}$, or dans la catégorie $\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{Ban}$, il existe des pseudo-isomorphismes qui ne sont pas de isomorphismes [4]. Par exemple si E est un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé, l'application quotient $\pi\colon\ E \to E/F$ induit un pseudo-isomorphisme $E|F \to (E/F)|\{0\}$ et ce dernier n'est un isomorphisme dans $\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{Ban}$ que si F admet un complémentaire topologique dans E. Nous introduisons une catégorie abélienne $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ qui est plus grande que $\tilde{\mathbf{q}}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ et dans laquelle tous les pseudo-isomorphismes sont inversibles. C'est une sous-catégorie de $\mathbf{EV}$ engendrée par $\tilde{\mathbf{q}}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ et les inverses des pseudo-isomorphismes. Elle a comme objets les quotients de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ et comme morphismes toutes les compositions de morphismes stricts et d'inverses des pseudo-isomorphismes i.e. tout morphisme u de $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ s'écrit comme $u = v \circ s^{-1}$, où s est un pseudo-isomorphisme et v un morphisme strict.

Pour que cette dernière écriture ait un sens, il faut montrer le résultat suivant:

Proposition 2.6. *La composée de deux morphismes de la catégorie* $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ *est un morphisme de* $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$.

P r e u v e. Soient

$$v\colon\ E_1|F_1 \to E'|F', \quad v'\colon\ E_1'|F_1' \to E''|F''$$

deux morphismes stricts et

$$s\colon\ E_1|F_1 \to E|F, \quad s'\colon\ E_1'|F_1' \to E'|F'$$

deux pseudo-isomorphismes, avec $E_i|F_i$, $E_i'|F_i'$, $(i=1,2)$, $E''|F''$, $E''|F''$ et $E|F$ des quotients de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$. Nous devons trouver un quotient $E_1''|F_1''$ de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ et un pseudo-isomorphisme $s''\colon\ E_1''|F_1'' \to E_1|F_1$, et un morphisme $v''\colon\ E_1''|F_1'' \to E_1'|F_1'$ rendant commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
E_1''|F_1'' \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
E_1|F_1 \arrow[d] \arrow[dr] & E_1'|F_1' \arrow[d] \arrow[dr] & \\
E|F & E'|F' & E''|F''
\end{tikzcd}$$

Etant donné donc un morphisme $v\colon\ E_1|F_1 \to E'|F'$ et un pseudo-isomorphisme $s'\colon\ E_1'|F_1' \to E'|F'$, il s'agit de trouver un quotient de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ soit $E_1''|F_1''$, un pseudo-isomorphisme $s''\colon\ E_1''|F_1'' \to E_1|F_1$ et un morphisme $v''\colon\ E_1''|F_1'' \to E_1'|F_1'$ tels que $s' \circ v'' = v \circ s''$. Nous partons de $E_1 \oplus E_1'$, et de l'application

$$\varphi\colon\ E_1 \oplus E_1' \to E', \quad a_1 \oplus a_2 \mapsto \varphi(a_1, \oplus a_2) = v_1(a_1) + s_1'(a_2),$$

où $v_1\colon\ E \to E'$ et $s_1'\colon\ E_1' \to E'$ sont des morphismes d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ déterminant v et s', avec s_1' surjectif. Nous définissons $E_1'' = \varphi^{-1}(F')$, $s_1''\colon\ E_1'' \to E_1$ est la projection $a_1 \oplus a_2 \to a_1$, $v_1''\colon\ E_1'' \to E_1'$ est la projection $a_1 \oplus a_2 \longmapsto a_2$ et $F_1'' = (s_1'')^{-1}(F_1)$. Le morphisme $s''\colon\ E_1''|F_1'' \to E_1|F_1$ induit par $s_1''\colon\ E_1'' \to E_1$, est un pseudo-isomorphisme tel que $v_1''(F_1'') \subseteq F_1'$. Par conséquent, l'application v_1'' induit un morphisme $v''\colon\ E_1''|F_1'' \to E_1'|F_1'$. Et on a l'égalité $s' \circ v'' = v \circ s''$.

3. La catégorie $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ est abélienne

Proposition 3.1. *Soit $E_1|F_1$, $E_2|F_2$ et $U|V$ des quotients de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$. Soient $u\colon$ $E_1|F_1 \to E_2|F_2$ un morphisme strict et $s_2\colon\ U|V \to E_2|F_2$ un pseudo-isomorphisme. Il existe un quotient $X|Y$ de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$, un pseudo-isomorphisme $s_1\colon\ X|Y \to E_1|F_1$ et un morphisme strict $u'\colon\ X|Y \to U|V$ tels que $s_2^{-1} \circ u = u' \circ s_1^{-1}$.*

P r e u v e. Soient $u_1\colon\ E_1 \to E_2$ et $s_{12}\colon\ U \to E_2$ les applications qui induisent les morphismes u et s_2. On prend

$$X = \{(x_1, x_2) \in E_1 \oplus U\colon\ u_1(x_1) - s_{12}(x_2) \in F_2\}$$

et

$$Y = F_1 \oplus V.$$

L'espace X est de type $\mathcal{L}\Im$ et Y est un sous-espace vectoriel de X qui est aussi un espace de type $\mathcal{L}\Im$ tel que l'inclusion $Y \to X$ est continue. Donc le quotient $X|Y$ est de type $\mathcal{L}\Im$ (car le graphe de l'application $i\colon\ Y \to E_1$ est bornologiquement fermé). Définissons

$$s_{11}\colon\ X \to E_1, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1$$

et

$$u_1'\colon\ X \to U, \quad (x_1, x_2) \longmapsto x_2.$$

L'application s_{11} est surjective et $Y = s_{11}^{-1}(F_1)$. Donc u_1' et s_{11} induisent un morphisme strict $u'\colon\ X|Y \to E_1|F_1$ et un pseudo-isomorphisme $s_1\colon\ X|Y \to U|V$. On vérifie aisément que $s_2^{-1} \circ u = u' \circ s_1^{-1}$.

Comme conséquence de la proposition précédente, nous obtenons le corollaire suivant:

Corollaire 3.2. *Soient $E_1|F_1$, $E_2|F_2$ des quotients de type $\mathcal{L}\Im$. Tout morphisme $u\colon\ E_1|F_1 \to E_2|F_2$ s'écrit sous la forme $u = u' \circ s^{-1}$, où $u'\colon\ X|Y \to E_2|F_2$ est un morphisme strict et $s\colon\ X|Y \to E_1|F_1$ un pseudo-isomorphisme et $X|Y$ un quotient de type $\mathcal{L}\Im$.*

Soient $E|F$ un quotient de type $\mathcal{L}\Im$ et E_0 un sous-espace vectoriel de E qui est aussi un espace de type $\mathcal{L}\Im$ et tel que F est un sous-espace vectoriel de E_0 l'injection canonique $F \to E_0$ est un morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\Im$, alors l'injection canonique $E_0 \to E$ induit un morphisme $E_0|F \longrightarrow E|F$ de quotient de type $\mathcal{L}\Im$ appelé aussi le morphisme inclusion, et l'application identité $\mathrm{Id}_E\colon\ E \to E$ induit un morphisme $E|F \longrightarrow E|E_0$ de quotient de type $\mathcal{L}\Im$. $\square$

Notons qu'avec les mêmes techniques utilisées par Waelbreock dans [4], nous pouvons montrer que tout morphisme bijectif de $\mathbf{q}\mathcal{L}\Im$ est un isomorphisme; que tout morphisme injectif $u\colon\ E_1|F_1 \to E_2|F_2$ se factorise comme $u = i \circ v$, où i est le morphisme inclusion et v un isomorphisme, et que tout morphisme surjectif $u\colon$ $E_1|F_1 \to E_2|F_2$ se factorise comme $u = u' \circ r$, où r est un morphisme quotient et u' un isomorphisme.

De la même façon que dans [4], nous pouvons vérifier sans problème toutes les propriétés qui permettent de déduire que la catégorie $\mathbf{q}\mathcal{L}\Im$ est additive. Pour la somme directe de deux objets de la catégorie $\mathbf{q}\mathcal{L}\Im$, nous la défինssons comme suit: si $E_1|F_1$ et $E_2|F_2$ sont deux quotients de type $\mathcal{L}\Im$, la somme directe est définie par

$$(E_1|F_1) \oplus (E_2|F_2) = (E_1 \oplus E_2)|(F_1 \oplus F_2).$$

D'autre part, tout morphisme $u\colon E_1|F_1 \to E_2|F_2$ de la catégorie $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ admet un noyau

$$\operatorname{Ker}(u) = u_1^{-1}(F_2)|F_1$$

et un conoyau

$$\operatorname{Coker}(u) = E_2|(u_1(E_1) + F_2)$$

où $u_1\colon E_1 \to E_2$ est le morphisme d'espaces de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ qui induit le morphisme u.

Si $u\colon E_1|F_1 \to E_2|F_2$ est un morphisme de la catégorie $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$, nous définissons les deux quotients de type $\mathcal{L}\mathfrak{I}$ suivants:

$$\operatorname{Coim}(u) = E_1|u_1^{-1}(F_2)$$

et

$$\operatorname{Im}(u) = (u_1(E_1) + F_2)|F_2.$$

Le morphisme u se factorise comme suit:

$$u = \operatorname{Im}(u) \circ v_u \circ \operatorname{Coim}(u)$$

où

$$v_u\colon \operatorname{Coim}(u) \to \operatorname{Im}(u).$$

La catégorie $\mathbf{q}\mathcal{L}\mathfrak{I}$ est abélienne si le morphisme v_u est un isomorphisme. Ce qui est vrai si, et seulement si, $E_2 = u_1(E_1) + F_2$ et $F_1 = u_1^{-1}(F_2)$.

Bibliographie

[1] *H. Hogbe Nlend*: Théorie des Bornologies et Applications. Lect. Notes Math. Vol. 213. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971. (French.) Zbl 0225.46005

[2] *A. Grothendieck*: Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. No. 16. AMS, Providence, 1966. Zbl 0123.30301

[3] *L. Waelbroeck*: Topological Vector Spaces and Algebras. Lect. Notes Math. Vol. 230. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971. Zbl 0225.46001

[4] *L. Waelbroeck*: Quotient Banach Spaces, Spectral theory 8. Banach Cent. Publ., Warsaw, 1982, pp. 553–562. Zbl 0492.46012

[5] *L. Waelbroeck*: Holomorphic functions taking their values in a quotient bornological space. Linear operators in function spaces. Proc. 12th Int. Conf. Oper. Theory, Timisoara, Rommania, 1988. Oper. Theory, Adv. Appl. *43* (1990), 323–335. Zbl 0711.46010

L'adresse des auteurs: Belmesnaoui Aqzzouz, Redouane Nouira, Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Equipe d'Analyse Fonctionnelle, B.P. 133, Kénitra, Morocco, e-mail: baqzzouz@hotmail.com.