Matematický časopis

Rudolf Wille

Jeder endlich erzeugte, modulare Verband endlicher Weite ist endlich

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 1, 77--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127058

Mat. čas. 24, 1974, No 1, 77—80

JEDER ENDLICH ERZEUGTE, MODULARE VERBAND ENDLICHER WEITE IST ENDLICH

RUDOLF WILLE

Eine der aktuellsten, ungelösten Fragen in der Theorie der modularen Verbände ist, ob die primitive Klasse aller modularen Verbände von der Klasse aller endlichen, modularen Verbände erzeugt wird. Um einer Antwort auf diese Frage näherzukommen, wurde in Wille [5; Problem 2] allgemeiner gefragt, ob jede der Klassen $\mathfrak{M}_n^m$ von einer Menge endlicher Verbände erzeugt wird; dabei ist $\mathfrak{M}_n^m$ die primitive Klasse, die von allen modularen Verbänden mit Länge $\leqslant m$ und Weite $\leqslant n$ erzeugt wird ($0 \leqslant m \leqslant \infty$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$). Bekannt ist bisher, daß die Klassen $\mathfrak{M}_n^m$ für $m, n < \infty$ und $\mathfrak{M}_\infty^m$ für $m \leqslant 2$ (s. Wille [5]), $\mathfrak{M}_1^\infty$ und $\mathfrak{M}_2^\infty$ (denn $\mathfrak{M}_1^\infty = \mathfrak{M}_2^\infty = \mathfrak{M}_1^1$), $\mathfrak{M}_3^\infty$ (s. Jonsson [3]) sowie $\mathfrak{M}_4^\infty$ (s. Freese [2]) jeweils von einer Menge endlicher Verbände erzeugt werden. Daß dieses sogar für alle Klassen $\mathfrak{M}_n^\infty$ mit $n < \infty$ gilt, folgt unmittelbar aus dem im Titel angegebenen Hauptergebnis dieser Note.

Für einen Verband L definiert man bekanntlich als *Länge* $l(L) := \sup \{|K| - 1 | K$ endliche Kette von $L\}$ und als *Weite* $w(L) := \sup \{|A| | A$ endliche Antikette von $L\}$. Ein Zusammenhang zwischen Länge und Weite bei modularen Verbänden wird in den folgenden beiden Hilfssätzen beschrieben.

Hilfssatz 1. *M sei ein modularer Verband der Weite $n < \infty$ und $a, b \in M$. Dann hat das Intervall $[a, a \vee b]$ oder das Intervall $[a, a \vee b]$ eine Länge $\leqslant n - 1$.*

Beweis. Angenommen, die Längen der Intervalle $[a, a \vee b]$ und $[b, a \vee b]$ seinen größer als $n - 1$. Dann existieren Ketten $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ in $[a, a \vee b]$ und $b_0 < b_1 < \ldots < b_n$ in $[b, a \vee b]$. Aus $a_i \wedge b_{n-i} \leqslant a_j \wedge b_{n-j}$ und $i \leqslant j$ folgt $i = j$; denn $a_j \wedge b_{n-j} = (a_i \wedge b_{n-i}) \vee (a_j \wedge b_{n-j}) = ((a_i \wedge b_{n-i}) \vee b_{n-j}) \wedge a_j = (a_i \vee b_{n-j}) \wedge b_{n-i} \wedge a_j = a_j \wedge b_{n-i}$ und damit $b_{n-j} = (a_j \wedge b_{n-i}) \vee b_{n-j} = (a_j \vee b_{n-j}) \wedge b_{n-i} = b_{n-i}$. Aus $a_i \wedge b_{n-i} \leqslant a_j \wedge b_{n-j}$ und $i > j$ folgt $i = j$ entsprechend. Somit bilden die Elemente $a_0 \wedge b_n$, $a_1 \wedge b_{n-1}, \ldots, a_n \wedge b_0$ eine $(n + 1)$-elementige Antikette, was $w(M) = n$ widerspricht.

Hilfssatz 2. *M sei ein modularer Verband der Weite $n < \infty$ und $a_1, \ldots, a_m \in$*

$\in M$. *Dann hat eines der Intervalle* $[a_i, a_1 \vee \ldots \vee a_m]$ *eine Länge* $\leqslant$ $\leqslant (n-1)(m-1)$.

Beweis durch Induktion: Der Fall $m = 1$ liegt auf der Hand. Für $m > 1$ hat nach Hilfssatz 1 das Intervall $[a_1 \vee \ldots \vee a_{m-1}, a_1 \vee \ldots \vee a_m]$ oder das Intervall $[a_m, a_1 \vee \ldots \vee a_m]$ eine Länge $\leqslant n - 1$. Da nach Induktionsvoraussetzung eines der Intervalle $[a_i, a_1 \vee \ldots \vee a_{m-1}]$ eine Länge $\leqslant$ $\leqslant (n-1)(m-2)$ hat, folgt die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Wird ein Verband* L *von Elementen* $e_1, \ldots, e_m$ *erzeugt, so gilt für ein* $a \in L$ *stets* $e_1 \wedge \ldots \wedge e_k \leqslant a$ *oder* $a \leqslant e_{k+1} \vee \ldots \vee e_m$ $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$.

Beweis. Man weist leicht nach, daß $[0, e_{k+1} \vee \ldots \vee e_m] \cup [e_1 \wedge \ldots \wedge e_k, 1]$ ein Unterverband von L ist. Da die Erzeugenden $e_1, \ldots e_m$ in diesem Unterverband liegen, folgt $L = [0, e_{k+1} \vee \ldots \vee e_m] \cup [e_1 \wedge \ldots \wedge e_k, 1]$.

Satz 4. *Für einen modularen Verband* M *der Weite* n, *der von* m *Elementen erzeugt wird, gilt* $l(M) \leqslant \frac{1}{2}(n-1)m(m-1) + m - 1$ *und* $|M| \leqslant$ $\leqslant n\left(\frac{1}{2}(n-1)m(m-1) + m - 2\right) + 2$.

Beweis. Die erste Behauptung des Satzes ist offenbar bewiesen, wenn die Gültigkeit folgender Aussagen (A_k) für $1 \leqslant k \leqslant m$ gezeigt wird:

(A_k) Es gibt Erzeugende $e_1, \ldots, e_m$ von M mit

$$l([e_1 \wedge \ldots \wedge e_k, 1]) \leqslant (n-1)(\sum_{i=1}^{k} m - i) + k - 1.$$

Die Aussage (A_1) folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz 2. Sei nun die Aussage (A_k) für ein $k < m$ vorausgesetzt. Nach Hilfssatz 2 existiert ein $j \in$ $\in \{k+1, \ldots m\}$ mit $l([e_j, e_{k+1} \vee \ldots \vee e_m]) \leqslant (n-1)(m-k-1)$. Da nach Hilfssatz 3 $l([e_{k+1} \vee \ldots \vee e_m, (e_1 \wedge \ldots \wedge e_k) \vee e_{k+1} \vee \ldots \vee e_m]) \leqslant 1$ ist, gilt $l([e_j, (e_1 \wedge \ldots \wedge e_k) \vee e_{k+1} \vee \ldots \vee e_m]) \leqslant (n-1)(m-k-1) + 1$. Auf Grund der Modularität hat dann auch das Intervall $[e_1 \wedge \ldots \wedge e_k \wedge e_j, e_1 \wedge \ldots \wedge e_k]$ eine Länge $\leqslant (n-1)(m-k-1) + 1$. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung ergibt das $l([e_1 \wedge \ldots \wedge e_k \wedge e_j, 1]) \leqslant (n-1)$ $(\sum_{i=1}^{k+1} m - i) + k$, womit die Aussage (A_{k+1}) nachgewiesen ist.

Die zweite Ungleichung folgt sofort aus der ersten, wenn man noch die für jeden Verband L gültige Ungleichung $|L| \leqslant w(L)(l(L) - 1) + 2$ heranzieht.

Korollar 5. *Jeder endlich erzeugte, modulare Verband endlicher Weite ist endlich.*

Korollar 6. *Für jedes* $n < \infty$ *wird die primitive Klasse* $\mathfrak{M}_n^{\infty}$ *von einer Menge endlicher Verbände erzeugt.*

Korollar 7. *Für $m, n < \infty$ ist der relativ freie Verband $F(m\,\mathfrak{M}_n^\infty)$ endlich* (vgl. Freese [2; Theorem 3]).

Man könnte vermuten, daß sogar jeder endlich erzeugte, modulare Verband, der nur endliche Antiketten besitzt, endlich ist. Diese Vermutung ist jedoch nicht richtig, wie man an dem Beispiel des von 4 Elementen erzeugten, modularen Verbandes $FM(J_1^4)$ in Day & Herrmann & Wille [1] sehen kann.

Daß ein endlich erzeugter Verband endlicher Weite nicht endlich zu sein braucht, zeigt das folgende Beispiel eines von 3 Elementen erzeugten Verbande der Weite 3. (Fig. 1).

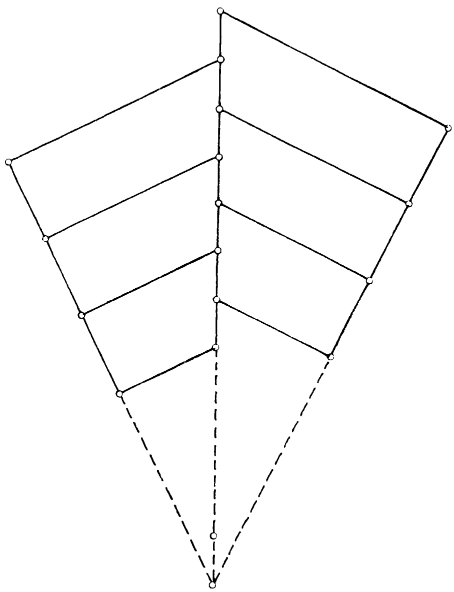

Fig. 1

Allerdings ist jeder endlich erzeugte Verband der Weite 2 endlich, da nach Nelson [4] jeder Verband der Weite 2 subdirektes Produkt von Verbänden ist, die 2-elementig oder 5-elementig (und nichtmodular) sind.

LITERATUR

[1] DAY, A. — HERRMANN, Chr. — WILLE, R.: On modular lattices with four generators. Algebra Universalis 2, 1972, 317—323.

[2] FREESE, R.: Varieties generated by modular lattices of width four. Bull. Amer. Math. Soc. *78*, 1972, 447—450.

[3] JÓNSSON, B.: Equational classes of lattices. Math. scand. *22*, 1968, 187—196.

[4] NELSON, O. T. JR.: Subdirect decompositions of lattices of width two. Pacif. J. Math. *24*, 1968, 519—523.
[5] WILLE, R.: Primitive Länge und primitive Weite bei modularen Verbänden. Math. Z. *108*, 1969, 129—136.
Eingegangen am 18. 10. 1972

Technische Hochschule
Darmstadt
BRD