MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 11, 4, 1961

O POLOGRUPÁCH, KTORÝCH KAŽDÝ ĽAVÝ HLAVNÝ IDEÁL OBSAHUJE JEDNOTKU

BLANKA KOLIBIAROVÁ, Bratislava

Nech S je pologrupa. Množinu $Sx \cup \{x\}$ nazveme ľavým hlavným ideálom vytvoreným prvkom x (znak $(x)_L$). Analogicky definujeme pravý hlavný ideál ($(x)_R = xS \cup \{x\}$).

V ďalšom S bude značiť pologrupu, ktorej každý ľavý hlavný ideál obsahuje jednotku. Ukáže sa, že tieto pologrupy sú súčtom disjunktných grúp, ktorých jednotky e_i tvoria čiastočne usporiadanú množinu, usporiadanú vzhľadom na reláciu: $e_i \leqq e_k$ vtedy a len vtedy, keď $e_ie_k = e_ke_i = e_i$. Táto usporiadaná množina nemusí byť ani nadol usmernená (príklad 3); je však polosväzom vtedy a len vtedy, keď pre každý ideál $(x)_L$ platí $(x)_L = (x)_R$; je reťazcom duálne dobre usporiadaným vtedy a len vtedy, keď každý ľavý ideál je ľavým hlavným ideálom (a teda každý ľavý ideál má jednotku; tento prípad vyšetroval Vorobjev v [1]).

Množinu prvkov vytvárajúcich tenže ľavý hlavný ideál nazveme F_L-triedou; F_L-triedu prvkov vytvárajúcich $(x)_L$ označíme $F_L(x)$. Analogicky definujeme pravú F_R-triedu $F_R(x)$.

Vzhľadom na to, že ľubovoľný ľavý hlavný ideál $(x)_L$ v S obsahuje jednotku, má aj každý prvok pologrupy S jednotku, takže $(x)_L = Sx$, $(x)_R = xS$ pre každé x z S. V ďalšom to budeme často používať (bez odkazov).

Zaveďme množinu $I(S)$ takto: znak e (po prípade s indexom) bude značiť prvok z $I(S)$ vtedy a len vtedy, ak existuje ľavý hlavný ideál v S taký, že e je jeho jednotka. Zrejme $I(S) \neq 0$. Ľahko sa vidí, že $I(S)$ je zhodná s množinou idempotentov v S.

Zrejme platí

Lemma 1. *Nech e je jednotka v $(x)_L$. Potom $(x)_L = (e)_L = Se$.*

Lemma 2. *Každá F_L-trieda $F_L(x)$ obsahuje práve jeden idempotent e, ktorý je jednotkou v $(x)_L$.*

Dôkaz. Vzhľadom na lemmu 1 je $(x)_L = (e)_L$, teda $e \in F_L(x)$. Nech e' je idempotent, $e' \in F_L(e)$. Odtiaľ vyplýva, že $(e')_L = (e)_L$, takže e je jednotka v $(e')_L$ a platí $ee' = e'$. Keďže je $(e')_L = (e)_L$, pre isté $s \in S$ je $e = se'$. Ale potom $e' = ee' = se'e' = se' = e$.

Z lemmy 1 a 2 vyplýva

Lemma 3. *Nech $e \in I(S)$; potom e je jednotkou v $(e)_L$.*

Lemma 4. *Pre každé $e \in I(S)$ a $t \in S$ je $ete = te$.*

Dôkaz. Pretože $te \in (e)_L$, pričom e je jednotka v $(e)_L$ (lemma 3), je $e(te) = te$.

Veta 1. *$I(S)$ je v S čiastočná pologrupa, ktorej každý ľavý hlavný ideál obsahuje jednotku.*

Dôkaz. Vzhľadom na lemmu 4 platí pre $e_1, e_2 \in I(S)$ vzťah $(e_1e_2)(e_1e_2) = e_1(e_2e_1e_2) = e_1e_2$. Ďalej: pretože $\{e\} \cup I(S)e \subset (e)_L$, obsahuje jednotku e (lemma 3).*

Definícia 1. *Pre $e_1, e_2 \in I(S)$ položíme $e_1 \leqq e_2$ vtedy a len vtedy, keď $(e_1)_L \subset (e_2)_L$.*

Veta 2. *Množina $I(S)$ je vzhľadom na reláciu $\leqq$ z definície 1 čiastočne usporiadanou množinou, v ktorej platí*

a) *$e_1 \leqq e_2$ vtedy a len vtedy, keď $e_1e_2 = e_2e_1 = e_1$,*

b) *$e_1e_2 \leqq e_2$,*

c) *$e_1 \leqq e_2$ implikuje $e_1e_3 \leqq e_2e_3$.*

Dôkaz. Ľahko sa vidí, že $I(S)$ je čiastočne usporiadaná vzhľadom na reláciu $\leqq$.

a) Podľa predpokladu $(e_1)_L \subset (e_2)_L$; podľa lemmy 3 je e_2 v $(e_2)_L$ jednotka, teda $e_2e_1 = e_1e_2 = e_1$. Obrátené tvrdenie je zrejmé.

b) Zrejmé.

c) Z predpokladov vyplýva (použitím lemmy 4) $(e_1e_3)(e_2e_3) = e_1e_2e_3 = e_1e_3$, $(e_2e_3)(e_1e_3) = e_2e_1e_3 = e_1e_3$. Podľa a) to značí $e_1e_3 \leqq e_2e_3$.

Poznámka 1. Z lemmy 2 vyplýva, že priradenie $e \rightarrow F_L(e)$ je vzájomne jednoznačné.

Poznámka 2. Vzťah $e_1 \leqq e_2$ implikuje $e_3e_1 \leqq e_3e_2$ neplatí: ukazuje to napr. príklad 1, kde $e_2 \leqq e_1$, ale neplatí $e_3e_2 \leqq e_3e_1$.

Lemma 5. *F_L-triedy sú čiastočné pologrupy v S.*

Dôkaz. Nech $x, y \in F_L(e)$, teda $(x)_L = (y)_L = (e)_L$. Potom $Sx = Se$, $ey = y$, takže $(xy)_L = Sxy = Sey = Sy = (y)_L$, teda $xy \in F_L(e)$.

Lemma 6. *Ideál $(e)_L$ je súčtom všetkých takých F_L-tried $F_L(e_i)$, pre ktoré platí $e_i \leqq e$.*

Dôkaz. Nech $e_i \in (e)_L$ a nech $x \in F_L(e_i)$. Potom $x \in (x)_L = (e_i)_L \subset (e)_L$, teda $x \in (e)_L$. Platí teda $F_L(e_i) \subset (e)_L$. Vzhľadom na definíciu 1 je pritom $e_i \leqq e$.

Ďalej pre každé e_i, ktoré je v relácii $e_i \leqq e$, vzhľadom na definíciu 1 platí $F_L(e_i) \subset (e)_L$.

Lemma 7. *Nech $L = (x)_L$. Potom $L = Lx$.*

Dôkaz. Zrejme $Lx \subset L$. Nech e je jednotka ideálu L. Potom $e = sx$ pre isté $s \in S$. Teda $L = Le = Lsx \subset Lx$. Teda $L = Lx$.

* Pri zjednodušení dôkazu mi pomohol s. J. Bosák.

Lemma 8. *Nech L je ľavý hlavný ideál v S. Nech L' je ľavý hlavný ideál v L. Potom L' je ľavý hlavný ideál v S.*

Dôkaz. Podľa predpokladu $SL \subset L$, $LL' \subset L'$. Ideál L má jednotku e, teda pretože $L' \subset L$, je $L' = eL' \subset LL'$ a teda $LL' = L'$. Potom $SL' = S(LL') = (SL)L' \subset LL' = L'$.

Dôsledok. *F_L-triedy v L sú F_L-triedami v S.*

Veta 3. *F_L-triedy pologrupy S sú grupy vzhľadom na násobenie v S.*

Dôkaz. Uvažujme $(e)_L = L$, $L' = L - F_L(e)$. Ukážeme najprv, že $L'L \subset L'$. Ak $L' = 0$, je to zrejmé. Nech $L' \neq 0$. Ďalej nech $y \in L'$; potom pre $x \in L$ je $xy \in (y)_L \subset L = (e)_L$. Ak by platilo $xy \in F_L(e)$, potom by $(e)_L = (xy)_L \subset (y)_L$, teda $(e)_L = (y)_L$, čo je spor s predpokladom $L' \cap F_L(e) = 0$. Teda $xy \in L'$, takže $LL' \subset L'$. Teda L' je ľavý ideál v L. Ukážeme, že je aj pravý, t. j. že platí $L'L \subset L'$. Zrejme $L'L \subset L$ (totiž L je ľavý ideál v S). Pre $L'L$ platí: $L(L'L) = (LL')L \subset L'L$, teda $L'L$ je ľavý ideál v L. Podľa lemmy 8 je $L'L$ ľavým ideálom aj v S (ľavý ideál je totiž súčtom ľavých hlavných ideálov). Teda vzhľadom na lemmu 6 je $L'L$ súčtom celých F_L-tried. Z toho vyplýva, ak $L'L \cap F_L(e) \neq 0$, musí $F_L(e) \subset L'L$. Potom by však existovalo také $u \in L'$, $u \in F_L(e^*)$, $v \in L$, že by $e = uv$, t. j. $e = uv = e^*uv = e^*e$, ale pretože $e^* \leqq e$ (lemma 6), je $e = e^*e = e^*$ (veta 2 a)), teda $e \in L'$, čo je spor s predpokladom $F_L(e) \cap L' = 0$. Teda musí $L'L \cap F_L(e) = 0$, z čoho vzhľadom na $L'L \subset L$ vyplýva $L'L \subset L'$.

Podľa dôsledku lemmy 8 sú F_L-triedy v L také isté ako v S. Teda pre $y \in F_L(e)$ platí: existuje $s \in L$ také, že $e = sy$. Potom platí $s \in F_L(e)$. Ak $L' = 0$, je to zrejmé. Ak $L' \neq 0$, vyplýva to zo vzťahu $L'L \subset L'$. Teda $F_L(e)$ je grupa.

Lemma 9. *Nech $e_1 \leqq e_2$, nech $x \in F_L(e_1)$, $y \in F_L(e_2)$.* Potom $yx \in F_L(e_1)$.

Dôkaz. Podľa predpokladu $(y)_L = (e_2)_L$, teda $(ye_1)_L = (e_2e_1)_L = (e_1)_L$ (veta 2 a)), teda pretože $e_1x = x$, je $(yx)_L = (ye_1x)_L = (e_1x)_L = (x)_L = (e_1)_L$. Teda $yx \in F_L(e_1)$.

Uvažujme teraz F_R-triedy. Platí pre ne rad ďalších vzťahov.

Lemma 10. *F_R-trieda je súčtom F_L-tried.*

Dôkaz je ľahký, ak uvážime, že vždy celá grupa padne do jednej F_R-triedy a že F_L-triedy sú grupy (veta 3).

Dôsledok. *Nech $x \in F_L(e)$, potom $(x)_R = eS$.*

Lemma 11. *Platí: $(e_1)_R = (e_2)_R$ vtedy a len vtedy, keď $e_1e_2 = e_2$, $e_2e_1 = e_1$.*

Dôkaz. Nech $(e_1)_R = (e_2)_R$. Potom $e_1 = e_2s$ (pre nejaké $s \in S$), teda $e_2e_1 = e_2(e_2s) = e_2s = e_1$. Takisto ukážeme, že $e_1e_2 = e_2$. Nech $e_1e_2 = e_2$, $e_2e_1 = e_1$. Teda $(e_2)_R \subset (e_1)_R$, $(e_1)_R \subset (e_2)_R$, spolu $(e_1)_R = (e_2)_R$.

Dôsledkom lemmy 11 je, že idempotenty patriace do tejže F_L-triedy sú navzájom neporovnateľné.

Lemma 12. *Pre každé $x \in S$ platí $(x)_L \subset (x)_R$.*

Dôkaz. Nech $x \in F_L(e)$; použitím lemmy 1,3 a dôsledku lemmy 10 dostávame $Sx = Se = eSe = xSe \subset xS$.

Veta 4. *F_R-triedy sú pologrupy.*

Dôkaz. Nech $(y_1)_R = (y_2)_R$. Pretože F_L-triedy sú grupy (veta 3) je $y_1^2 \in F_L(y_1)$, teda vzhľadom na lemmu 10 je $(y_1^2)_R = (y_1)_R$. Pritom $(y_1^2)_R = (y_1y_2)_R$, teda $y_1y_2 \in$ $\in F_R(y_1)$.

Veta 5. *F_R-triedy tvoria vytvárajúci rozklad* na S.*

Dôkaz. Nech $x \in F_R(e_i)$, $y \in F_R(e_k)$. Treba ukázať, že $(xy)_R = (e_ie_k)_R$. Podľa dôsledku lemmy 10 je $yS = e_kS$, $xS = e_iS$ (t. j. pre isté $s \in S$ je $x = e_is$). Vzhľadom na lemmu 12 platí $se_k \in e_kS$. Použitím toho dostávame: $(xy)_R = xyS = xe_kS =$ $= e_ise_kS \subset e_ie_kS = (e_ie_k)_R$. Takisto dostaneme $(e_ie_k)_R \subset (xy)_R$.**

Poznámka 3. F_L-triedy nemusia tvoriť vytvárajúci rozklad na S.

Príklad 1. Uvažujme pologrupu prvkov e_1, x, e_2, e_3, kde násobenie je dané tabuľkou:

	e_1	x	e_2	e_3
e_1	e_1	x	e_2	e_3
x	x	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	e_2	e_3
e_3	e_3	e_2	e_2	e_3

F_L-triedy sú: $\{x, e_1\}$, $\{e_2\}$, $\{e_3\}$. Pritom $e_2e_1 = e_2$, $e_2x = e_3$.

Veta 6. *F_L-triedy patriace do jednej R_R-triedy tvoria na tejto vytvárajúci rozklad.*

Dôkaz. Nech $e_1 \in F_R(e_2)$. Podľa lemmy 11 je potom $e_1e_2 = e_2$, $e_2e_1 = e_1$. Nech $x \in F_L(e_1)$, $y \in F_L(e_2)$. Keďže $(x)_L = (e_1)_L$, je $(xe_2)_L = (e_1e_2)_L$, teda $xe_2 \in F_L(e_1e_2) =$ $= F_L(e_2)$. Ďalej $xy = xe_2y$, ale $xe_2 \in F_L(e_2)$, $y \in F_L(e_2)$, takže vzhľadom na to, že F_L-triedy sú grupy (veta 3), je $(xe_2)\, y \in F_L(e_2) = F_L(e_1e_2)$. Teda $xy \in F_L(e_1e_2)$.

Poznámka 4. Nech $e_2 \leqq e_1$, $e_2 \neq e_1$. Potom nemusí $F_R(e_2) \subset (e_1)_L$.

Príklad 2. Uvažujme pologrupu prvkov e_1, e_2, e_3, kde násobenie je dané tabuľkou:

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_2	e_3
e_3	e_2	e_2	e_3

Platí: $e_2 \leqq e_1$, $e_3 \in F_R(e_2)$, $e_3 \in (e_1)_L$.

Veta 7. *F_L-triedy patriace do tejže F_R-triedy sú navzájom izomorfné grupy.*

Dôkaz. Nech $x \in F_L(e_1) \subset F_R(e_2)$. Vzhľadom na vetu 6 $xe_2 \in F_L(e_2)$. Použitím lemmy 4 ľahko ukážeme, že zobrazenie $x \to xe_2$ je homomorfným zobrazením grupy $F_L(e_1)$ do $F_L(e_2)$. Pre $x_1, x_2 \in F_L(e_1)$ platí však ďalej: ak $x_1e_2 = x_2e_2$, tak $x_1e_2e_1 =$ $= x_2e_2e_1$, ale podľa lemmy 11 je $e_2e_1 = e_1$, teda vzťah $x_1e_2 = x_2e_2$ implikuje vzťah

* Rozklad daný kongruenciou.

** Pri zjednodušení dôkazu mi pomohol s. J. Bosák.

$x_1 = x_2$. To značí, $x_1 \neq x_2$ implikuje $x_1 e_2 \neq x_2 e_2$. Ďalej: nech $y \in F_L(e_2)$; podľa lemmy 11 je $e_2 = e_1 e_2$, teda $y = ye_2 = ye_1 e_2 = (ye_1) e_2$; ale podľa vety 6 je $ye_1 \in F_L(e_1)$; to značí, že každé $y \in F_L(e_2)$ je obrazom prvku z $F_L(e_1)$. Tým sme ukázali, že zobrazenie $x \to xe_2$ je izomorfné zobrazenie grupy $F_L(e_1)$ na $F_L(e_2)$.

Podľa vety 2 je $I(S)$ čiastočne usporiadaná množina. Pritom $I(S)$ nemusí byť ani nadol usmernená.

Príklad 3. Uvažujme pologrupu prvkov e_1, e_2, kde násobenie je dané tabuľkou:

	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_1	e_2

Tu sú e_1, e_2 neporovnateľné a teda pre žiaden prvok e_i pologrupy neplatí súčasne $e_i \leqq e_1$, $e_i \leqq e_2$.

Všimnime si prípady, keď $I(S)$ tvorí polosväz a reťazec vzhľadom na reláciu danú definíciou 1. Platia vety:

Veta 8. *Pologrupa $I(S)$ je vzhľadom na reláciu danú definíciou 1 polosväz vtedy a len vtedy, keď pre každé $e \in I(S)$ je $(e)_L = (e)_R$ v S. (S je takzvaná obojstranná pologrupa)*

Dôkaz. a) Nech pre každé $e \in I(S)$ platí $(e)_L = (e)_R$. Vzhľadom na lemmu 3 má $(e)_L$, teda aj $(e)_R$ jednotku e. Ukážeme, že pre $e_1, e_2 \in I(S)$ je $e_1 e_2 = e_2 e_1$. Platí $e_2 e_1 \in (e_1)_L$, $e_1 e_2 \in (e_1)_R$. Teda $e_2 e_1 = e_1(e_2 e_1) = (e_1 e_2) e_1 = e_1 e_2$. Teda $I(S)$ je komutatívna pologrupa idempotentov, teda polosväz.

b) Nech $I(S)$ je polosväz. Nech $(e_1)_R = (e_2)_R$; potom vzhľadom na lemmu 11 je $e_2 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_1$. Teda F_R-trieda obsahuje jediný idempotent; podľa lemmy 10 to značí $F_L(e) = F_R(e)$, čiže vzhľadom na vetu 5 je $(e)_R = (e)_L$.

Poznámka. Pre každé $e \in I(S)$ je zrejmá ekvivalentnosť tvrdení: a) $(e)_R = (e)_L$, b) $(x)_L = (x)_R$, c) $F_L(e) = F_R(e)$.

Veta 9. *Pologrupa $I(S)$ je vzhľadom na reláciu danú definíciou 1 reťazec duálne dobre usporiadaný vtedy a len vtedy, keď každý ľavý ideál L v S je súčasne ľavým hlavným ideálom v S (t. j. $L = (x)_L$ pre isté $x \in S$).*

Dôkaz. a) Nech každý ľavý ideál je súčasne ľavým hlavným ideálom. Potom sú každé dva prvky v $I(S)$ porovnateľné. Nech totiž $e_1, e_2 \in I(S)$. Potom $(e_1)_L \cup (e_2)_L$ je ľavý hlavný ideál. Nech e je jeho jednotka. Potom podľa lemmy 1 je $(e)_L = (e_1)_L \cup (e_2)_L$. Z toho vyplýva $e_1 \leqq e$, $e_2 \leqq e$. Avšak $e \in (e_1)_L$, alebo $e \in (e_2)_L$. V prvom prípade $e \leqq e_1$, teda $e_1 = e \geqq e_2$. V druhom prípade $e_2 \geqq e_1$.

Treba ešte dokázať, že každá neprázdna podmnožina $M \subset I(S)$ má najväčší prvok. Uvažujme $L = \bigcup_{e_i \in M} (e_i)_L$. Podľa predpokladu L obsahuje jednotku e, teda vzhľadom na definíciu 1 je e najväčší prvok v M.

b) Nech $I(S)$ je reťazec duálne dobre usporiadaný. Keďže ľavý ideál je množinovým súčtom ľavých hlavných ideálov a podľa lemmy 1 je pre každé $x \in S$ $(x)_L = (e)_L$.

$e \in I(S)$, platí pre každý ľavý ideál L vzťah $L = \bigcup_{e_i \in M} (e_i)_L$, kde $M \subset I(S)$. Podľa predpokladu M má najväčší prvok e, teda vzhľadom na definíciu 1 je $L = (e)_L$.

Poznámka. Ak by sme vo vete 9 vynechali podmienku, že reťazec $I(S)$ je duálne dobre usporiadaný, veta 9 neplatí, ako ukazuje príklad 4: Uvažujme pologrupu S racionálnych čísel z intervalu $(0,1)$, kde násobenie je dané: $a \cdot b = \min(a, b)$. Zrejme každý prvok v S je idempotent a každý ľavý hlavný ideál má jednotku. Potom množina čísel $x < 1/2$ tvorí ľavý ideál, ktorý nie je hlavný.

Poznámka. K tým istým výsledkom dospejeme, ak uvažujeme pologrupu, ktorej každý pravý hlavný ideál obsahuje jednotku. Úvahy sú rovnaké, len miesto ľavých ideálov prídu pravé ideály, miesto F_L-tried F_R-triedy a naopak.

LITERATÚRA

[1] Воробьев Н., *Об ассоциативных системах всякий левый идеал которых имеет единицу*, Вест. ленингр. гос. инст. (1955), 89—94.

Došlo 24. 4. 1961.

Katedra matematiky Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

О ПОЛУГРУППАХ, ВСЯКИЙ ГЛАВНЫЙ ЛЕВЫЙ ИДЕАЛ КОТОРЫХ ИМЕЕТ ЕДИНИЦУ

Бланка Колибиарова

Ресюме

В настоящей статье S значит полугруппу, всякий главный левый идеал $(x)_L(Sx \cup \{x\}, x \in S)$ которой имеет единицу. Пусть $F_L(x)$ $(F_R(x))$ — множество всех элементов $y \in S$, для которых $(y)_L = (x)_L$ $[(y)_R = (x)_R]$. Пусть $I(S)$ — множество всех идемпотентов полугруппы S; для e_i, $e_k \in I(S)$ $e_i \leqq e_k$ значит по определению $(e_i)_L \subset (e_k)_L$.

В статье доказываются следующие теоремы:

$I(S)$ является подполугруппой в S, всякий главный левый идеал которой имеет единицу. $F_L(e)$ и $F_R(e)$ являются подполугруппами в S; при этом $F_L(e)$ являются группами. Отношение эквивалентности, смежными классами которого являются множества $F_R(e)$ есть отношение конгруэнтности в S. $F_R(e)$ является суммой изоморфных групп $F_L(e_i)$; отношение эквивалентности, смежными классами которого являются множества $F_L(e_i)$ есть отношение конгруэнтности в $F_R(e)$.

Отношение $\leqq$ является отношением частичного упорядочения на $I(S)$. $I(S)$ будет полуструктурой тогда и только тогда, когда $(e)_L = (e)_R$ для всякого $e \in I(S)$; $I(S)$ будет двойственно вполне упорядоченной тогда и только тогда, когда всякий левый идеал в S является главным левым идеалом в S.

ÜBER DIE HALBGRUPPEN, DEREN JEDES LINKSHAUPTIDEAL EIN EINSELEMENT BESITZT

Blanka Kolibiarová

Zusammenfassung

Sei S eine Halbgruppe, derer jedes Linkshauptideal $(x)_L$ $(= Sx \cup \{x\}, x \in S)$ ein Einselement besitzt. Sei $F_L(x)$ $[F_R(x)]$ die Menge der Elemente, die das Ideal $(x)_L$ $[(x)_R]$ erzeugen. Sei $I(S)$ die Menge der Idempotente von S. Sind e_i, e_k Elemente von $I(S)$, so setzen wir $e_i \leq e_k$ falls $(e_i)_L \subset (e_k)_L$ gilt.

Es werden folgende Sätze bewiesen.

$I(S)$ is die Teilhalbgruppe von S, derer jedes Linkshauptideal ein Einselement besitzt. $F_L(e)$ und $F_R(e)$ sind Teilhalbgruppen von S; dabei sind $F_L(e)$ Gruppen. Die Ekvivalenzrelation, derer Klassen $F_R(e)$ sind, ist Kongruenzrelation in S. $F_R(e)$ ist die Summe von isomorphen Gruppen $F_L(e_i)$; die Ekvivalenzrelation derer Klassen $F_L(e_i)$ sind, ist Kongruenzrelation in $F_R(e)$.

Die Menge $I(S)$ ist teilweise geordnet vermöge der Relation $\leq$. Dabei ist $I(S)$ genau dann ein Halbverband, wenn $(e)_L = (e)_R$ für jedes $e \in I(S)$ gilt; $I(S)$ ist genau dann dual wohlgeordnet, wenn jedes Linksideal von S ein Linkshauptideal von S ist.