Ladislav Mišík
Poznámky k teórii miery a integrálu

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 8 (1958), No. 2, 81--102

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127014

POZNÁMKY K TEÓRII MIERY A INTEGRÁLU

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

V tejto práci sú štyri poznámky k teórii miery a integrálu. Z nich prvé dve sa vzťahujú na integračné metódy a druhé dve sa týkajú vzťahov miery a integrálu.

Pomenovania: okruh, miera, vonkajšia miera, vnútorná miera, $(X, \boldsymbol{R})$-merateľnosť atď. používame v tomto článku v zmysle [5]. Ak f a g sú dve funkcie, α je reálne číslo, tak súčet tých funkcií budeme označovať $f + g$, súčin čísla α a funkcie f zas αf, absolútnu hodnotu funkcie f znakom $|f|$. Znakom 0 budeme niekedy označovať funkciu v každom bode svojho oboru definície rovnú nule, inokedy zas číslo nula; z textu čitateľ ľahko pozná, čo znak 0 v tom-ktorom prípade znamená. Ak A je nejaká podmnožina množiny X, bude χ_A značiť charakteristickú funkciu množiny A.

Nech X je nejaká neprázdna množina, nech $\boldsymbol{R}$ je množinový okruh podmnožín množiny X a μ je miera na $\boldsymbol{R}$. Potom trojicu $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ budeme nazývať priestorom miery. Ak v trojici $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ je $\boldsymbol{R}$ množinovým σ-okruhom, vtedy hovoríme o σ-priestore miery. (V [5] sa náš σ-priestor miery nazýva priestorom miery.) Ak priestor miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ má vlastnosť: že $A \in \boldsymbol{R}$, $B \subset A$, $\mu(A) = 0$, tak je aj $B \in \boldsymbol{R}$; hovoríme o ňom, že je úplný.

Nech X je nejaká neprázdna množina. Nech F je vektorový sväz reálnych funkcií definovaných na X, t. j. pre F platí:

1. pre $x \in X$, $f \in F$ je $-\infty < f(x) < \infty$;
2. *ak je* $f \in F$ *a* α *reálne číslo, je* $\alpha f \in F$;
3. *ak je* $f_1, f_2 \in F$, *je aj* $f_1 + f_2 \in F$;
4. *ak je* $f \in F$, *je aj* $|f| \in F$.

Nech I je reálna homogénna, aditívna, nezáporná a v 0 monotónne zhora spojitá funkcionála definovaná na F, t. j. pre I platí:

I. *pre* $f \in F$ *je* $-\infty < I(f) < \infty$;

II. *pre* $f \in F$ *a* α *reálne číslo je* $I(\alpha f) = \alpha I(f)$;

III. *pre* $f_1, f_2 \in F$ *je* $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$;

IV. *pre* $f \in F$ *je* $I(|f|) \geqq 0$;

V. *pre každú nerastúcu postupnosť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *funkcií z* F *konvergujúcu k* 0 *platí* $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = 0$.

Trojicu (X, F, I) budeme nazývať priestorom Daniellovho integrálu, alebo krátko priestorom D-integrálu (v [3] funkcia I nazýva sa I-integrálom). Ak pre priestor (X, F, I) D-integrálu platí:

VI. *limita každej takej neklesajúcej postupnosti* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *funkcií z* F, *pre ktorú je postupnosť* $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *ohraničená, je z* F,

hovoríme, že ten priestor D-integrálu je σ-priestorom D-integrálu. Nech pre priestor (X, F, I) D-integrálu platí:

VII. *ak je* $f \in F$, $|g| \leqq |f|$, $I(|f|) = 0$, *vtedy je* $g \in F$ *a hovoríme, že je úplný.*

Nech $(X_1, \boldsymbol{R}_1, \mu_1)$ a $(X_2, \boldsymbol{R}_2, \mu_2)$ sú dva priestory miery. Nech $X_1 = X_2$, $\boldsymbol{R}_1 \subset \boldsymbol{R}_2$ a pre každé $A \in \boldsymbol{R}_1$ je $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Potom priestor miery $(X_2, \boldsymbol{R}_2, \mu_2)$ nazývame rozšírením priestoru miery $(X_1, \boldsymbol{R}_1, \mu_1)$. Nech (X_1, F_1, I_1) a (X_2, F_2, I_2) sú dva priestory D-integrálu. Nech je $X_1 = X_2$, $F_1 \subset F_2$ a $I_1(f) = I_2(f)$ pre každé $f \in F_1$. Potom priestor (X_2, F_2, I_2) D-integrálu nazývame rozšírením priestoru (X_1, F_1, I_1) D-integrálu.

1

Je známe, že ku každému priestoru (X, F_0, I_0) D-integrálu existuje taký priestor (X, F, I) D-integrálu, ktorý je jeho najmenším úplným σ-rozšírením, t. j. (X, F, I) je úplný σ-priestor D-integrálu, je rozšírením (X, F_0, I_0) a každé rozšírenie priestoru (X, F_0, I_0) D-integrálu, ktoré je súčasne úplným σ-priestorom D-integrálu, je rozšírením (X, F, I) (napr. [2], [3], [4], [7], [8], [10], [11], [13]). Dôkaz existencie takého priestoru D-integrálu sa robí jeho konštrukciou rôznymi integračnými metódami. Táto prvá poznámka sa bude týkať práve integračnej metódy F. Riesza ([10] a [11]).

F. Riesz ([11], str. 132—134) vychádza z priestoru (X, C_0, I_0) D-integrálu. Množinu $N \subset X$ nazýva nulovou, ak existuje neklesajúca postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z C_0 taká, že postupnosť $\{I_0(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a pre každé $x \in N$ je postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ divergentná. Postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na X skoro všade k funkcii f vtedy a len vtedy, ak množina bodov $x \in X$, pre ktoré buď neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, alebo neplatí rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, je nulovou množinou.

Nech C_1 je nasledujúci systém reálnych funkcií definovaných na X : $f \in C_1$ vtedy a len vtedy, keď existuje neklesajúca postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z C_0 konvergujúca na X skoro všade k f, pri ktorej postupnosť $\{I_0(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Pre každú funkciu $f \in C_1$ definuje sa jednoznačne $I_1(f)$ tak, že $I_1(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I_0(f_n)$, ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť z predchádzajúcej vety. Pomocou množiny C_1 definujeme C_2 takto: $f \in C_2$ vtedy a len vtedy, keď existujú f_1 a $f_2 \in C_1$ také, že $f = f_1 - f_2$. Pomocou I_1 definujeme na C_2 funkciu I_2 : $I_2(f) = I_1(f_1) - I_1(f_2)$, ak je $f = f_1 - f_2$, pričom je $f_1, f_2 \in C_1$. Potom je (X, C_2, I_2) priestorom D-integrálu, ktorý je najmenším úplným σ-rozšírením (X, C_0, I_0).

V predchádzajúcom odseku opísanú Rieszovu metódu môžeme modifikovať napr. tak, že v nej vôbec nemusíme zavádzať pojem nulových množín. Definujme C'_1 takto: $f \in C'_1$ vtedy a len vtedy, keď existuje neklesajúca postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z C_0, pre ktorú $\{I_0(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a pre ktorú platí $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pre každé $x \in X$, pre ktoré existuje limita na pravej strane. Podobne ako v predchádzajúcom odseku nech je $f \in C'_2$ vtedy a len vtedy, keď existujú také dve funkcie $f_1, f_2 \in C'_1$, že platí $f = f_1 - f_2$. Funkciu I_0 možno rozšíriť na I'_2, ktorá je definovaná na C'_2 tak, že (X, C'_2, I'_2) je priestor D-integrálu.

Priestor (X, C_2, I_2) *D-integrálu zhoduje sa s priestorom* (X, C'_2, I'_2) *D-integrálu, t. j.* $C_2 = C'_2$ a $I_2 = I'_2$.

Poznamenajme pritom, že vždy platí $C'_1 \subset C_1$, zatiaľ čo $C_1 = C'_1$ nemusí vždy platiť [napr. C'_1 nemusí mať vždy vlastnosť: $f_1, f_2 \in C'_1 \Rightarrow \min(f_1, f_2) \in C'_1$, ale C_1 má vždy vlastnosť: $f_1, f_2 \in C_1 \Rightarrow \min(f_1, f_2) \in C_1$]. Preto je ihneď zrejmé, že je $C'_2 \subset C_2$.

Pre dôkaz platnosti vzťahu $C_2 \subset C'_2$ stačí zistiť platnosť $C_1 \subset C'_2$, pretože rozdiel ľubovoľných dvoch funkcií z C'_2 je zas funkcia z C'_2. Z definícií C_1 a C'_1 vyplýva: ku každej funkcii $f \in C_1$ existuje taká funkcia $\bar{f} \in C'_1$ a taká funkcia g, že platí $f = \bar{f} + g$ a funkcia g má hodnoty rôzne od nuly jedine na nejakej nulovej množine N. K množine N existuje taká neklesajúca postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z C_0, že $\{I_0(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a N je podmnožinou množiny bodov divergencie postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. V C'_1 existuje teda funkcia h, pre ktorú platí $h(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pre každé $x \in X$, pre ktoré existuje limita na pravej strane. Ale pre každé $x \in X$, pre ktoré existuje $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, platí aj rovnosť $h(x) + g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$; čiže je aj $h + g \in C'_1$. Z toho vyplýva, že je $g \in C'_2$. Keďže je však $\bar{f} \in C'_2$ a $g \in C'_2$, je aj $f = \bar{f} + g \in C'_2$; čiže platí $C_1 \subset C'_2$.

Aj v [10] sa F. Riesz zaoberá už opísanou metódou, ale ukazuje, akú úlohu v nej hrajú nulové množiny. Nahraďme v uvedenej metóde množinu C_1 množinou C''_1, ktorú definujeme takto: $f \in C''_1$ vtedy a len vtedy, keď existuje neklesajúca konvergentná postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z C_0, ktorej limita je f, pričom postupnosť $\{I_0(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Množinu C''_2 definujeme zas ako množinu všetkých rozdielov dvoch funkcií z C''_1. Funkciu I_0 definovanú na C_0 môžeme tak rozšíriť na funkciu I''_2 definovanú na C''_2, že (X, C''_2, I''_2) je priestorom D-integrálu. Ale priestor (X, C''_2, I''_2) nemusí byť ešte σ-priestorom D-integrálu. Pre získanie najmenšieho σ-rozšírenia je potrebné tento proces znova a znova opakovať. Konvergencia skoro všade, ako ukazuje F. Riesz, umožňuje nám urýchliť utvorenie najmenšieho σ-rozšírenia. V tomto urýchlení prejavuje sa práve význam nulových množín.

Tento význam nulových množín sa stratí, ak trocha pozmeníme C_0. Nech je C_0 vektorový sväz reálnych funkcií v širšom zmysle definovaných na X, t. j. pre C_0 platí 1., 2., 3., 4., kde 1. znie: pre $x \in X$, $f \in C_0$ je $-\infty \leqq f(x) \leqq \infty$.

Pritom súčtom $f_1 + f_2$ rozumieme každú funkciu g, pre ktorú platí $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$ pre každé $x \in X$, pre ktoré pravá strana má zmysel. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká postupnosť, ktorá v každom $x \in X$ má buď vlastnú, alebo nevlastnú limitu, vtedy $\lim_{n\to\infty} f_n$ je tá funkcia v širšom zmysle definovaná na X, ktorá v každom $x \in X$ má hodnotu rovnú $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Ak teraz v úvahách predchádzajúceho odseku rozumieme C_0 v tu uvedenom zmysle a ak $\lim_{n\to\infty} f_n$ rozumieme v tu uvedenom zmysle, tak už (X, C_2'', I_2'') je najmenším σ-rozšírením (X, C_0, I_0). Teda v tomto prípade konvergencia skoro všade nijako nemôže zrýchliť utvorenie najmenšieho σ-rozšírenia.

2

Nech $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ je priestor miery. Nech je $f \in F_0$ vtedy a len vtedy, keď existuje konečne mnoho takých navzájom disjunktných množín $E_1, \ldots, E_n \in \boldsymbol{R}$, že je $\mu(E_1) < \infty, \ldots, \mu(E_n) < \infty$ a konečne mnoho čísel $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, že platí $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$. Pre túto funkciu $f \in F_0$ definujeme $I_0(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$. Je známe ([9], str. 201—206), že (X, F_0, I_0) je priestor D-integrálu. Tento priestor D-integrálu, t. j. (X, F_0, I_0), budeme nazývať priestorom D-integrálu indukovaným priestorom miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$.

V teórii integrálu sú známe integračné metódy v prípade, že priestor D-integrálu je indukovaný σ-priestorom miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$, pričom je $X \in \boldsymbol{R}$. Vzniká otázka, či možno použiť tieto metódy na získanie najmenšieho σ-priestoru D-integrálu nad daným priestorom D-integrálu, a to aj v tom prípade, že je úplne ľubovoľný priestor D-integrálu. V tejto poznámke ukážeme na jednej takej integračnej metóde, že ju nemôžeme použiť pre ľubovoľný priestor D-integrálu.

Nech (X, F_0, I_0) je priestor D-integrálu. Nech M je taký vektorový sväz reálnych funkcií definovaných na X, ktorý je najmenším Bairovým systémom nad F_0, t. j.

I. $F_0 \subset M$;

II. pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $f_n \in M$, *nech existuje* $\lim_{n\to\infty} f_n$, *potom je* $\lim_{n\to\infty} f_n \in M$;

III. *ak* $\overline{M}$ *je vektorový sväz s vlastnosťami:* $F_0 \subset \overline{M}$, $f_n \in \overline{M}$ *pre* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *a existuje* $\lim_{n\to\infty} f_n$, *tak je* $\lim_{n\to\infty} f_n \in \overline{M}$, *vtedy je* $M \subset \overline{M}$.

Nech (X, F_0, I_0) je priestor D-integrálu, ktorý je indukovaný σ-priestorom miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$, v ktorom je $X \in \boldsymbol{R}$. Je známe, že v takomto prípade možno použiť integračnú metódu, ktorú opíšeme (napr. [12], str. 19 a nasl.). Nech je $f \in F^+$ vtedy a len vtedy, keď je $f \geqq 0$, $f \in M$ a $\sup \{ I_0(\bar{f}) : 0 \leqq \bar{f} \leqq f, \bar{f} \in F_0 \} < \infty$. Na F^+ definujme funkciu I^+ takto: $f \in F^+ \Rightarrow I^+(f) = \sup \{ I_0(\bar{f}) : 0 \leqq \bar{f} \leqq f, \bar{f} \in F_0 \}$. Nech je $f \in F$ vtedy a len vtedy, keď je

$f^+ = \max(f, 0) \in F^+$ a $f^- = -\min(f, 0) \in F^+$ a vtedy kladme $I(f) = I^+(f^+) - I^+(f^-)$. Potom (X, F, I) je najmenšie σ-rozšírenie priestoru (X, F_0, I_0) D-integrálu.

V prípade, že (X, F_0, I_0) nie je priestorom D-integrálu indukovaného σ-priestorom miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$, v ktorom okrem toho platí $X \in \boldsymbol{R}$, nemusí táto integračná metóda, pomocou ktorej sa dostávame z (X, F_0, I_0) k (X, F, I), dávať σ-priestor D-integrálu. Napríklad nech X je nejaká nespočetná množina, F_0 nech je množina všetkých funkcií, ktoré sú rovné konstante na X okrem konečnej množiny. Ľahko sa vidí, že F_0 je vektorový sväz reálnych funkcií definovaných na X. Nech pre $f \in F_0$ je $f(x) = k$ pre $x \in X - K$, kde K je konečná podmnožina množiny X. Potom definujme $I_0(f) = k$. Zrejme je I_0 reálna homogénna, nezáporná funkcionála na F_0. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť funkcií z F_0 konvergujúca k funkcii 0. Nech je $f_n(x) = k_n$ pre $x \in X - K_n$ a $f_n(x) \neq k_n$ pre $x \in K_n$, pričom K_n je nejaká konečná podmnožina množiny X. Potom postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ zrejme konverguje k 0, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} I_0(f_n) = \lim\limits_{n\to\infty} k_n = 0$. Teda (X, F_0, I_0) je priestor D-integrálu. Nech M je taký vektorový sväz funkcií definovaných na X, ktorý je najmenší Bairov systém nad F_0. Nech F a I sú definované pomocou F_0 a I_0, ako v predchádzajúcom odseku. Potom (X, F, I) nie je σ-priestorom D-integrálu.

Toto tvrdenie dostávame takto: nech A je spočetná podmnožina množiny X a nech $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť konečných množín konvergujúca k A. Potom je $\chi_{X-A} \in F$, $I(\chi_{X-A}) = 0$, $\chi_{X-K_n} \in F_0 \subset F$ a $I(\chi_{X-K_n}) = I_0(\chi_{X-K_n}) = 1$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ Postupnosť $\{-\chi_{X-K_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť funkcií z F_0 konvergujúca k $-\chi_{X-A}$ a postupnosť $\{I(-\chi_{X-K_n})\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Keby totiž (X, F, I) bol σ-priestorom D-integrálu, muselo by platiť: $0 = I(-\chi_{X-A}) = \lim\limits_{n\to\infty} I(-\chi_{X-K_n}) = -1$; čo je spor.

Z príkladu, ktorý sme práve uviedli, je zrejmé, že integračná metóda opísaná v tejto poznámke nedáva nám vždy možnosť rozšíriť priestor D-integrálu (X, F_0, I_0) na najmenší σ-priestor D-integrálu. Ale predsa môžeme túto integračnú metódu niekedy použiť aj na priestor D-integrálu, ktorý nie je indukovaný σ-priestorom miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$, pričom je $X \in \boldsymbol{R}$. Platí totiž:

Nech (X, F_0, I_0) je priestor D-integrálu. Nech M je taký vektorový sväz funkcií definovaných na X, ktorý je najmenší Bairov systém nad F_0. Nech (X, F_0, I_0) má vlastnosť:

Ak je $\eta > 0$, $\bar{f} \geq 0$, $\bar{f} \in F_0$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká postupnosť nezáporných funkcií z M, pre ktorú platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \leq \bar{f}$, tak existuje taká postupnosť $\{\bar{f}_n\}_{n=0}^{\infty}$ nezáporných funkcií z F_0, pre ktorú platí: $\bar{f}_n \leq f_n$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\bar{f}_0 \leq \bar{f} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_0(\bar{f}_n) > I_0(\bar{f}) - \eta$. Potom (X, F, I) je najmenšie σ-rozšírenie (X, F_0, I_0).

Každý priestor D-integrálu (X, F_0, I_0) indukovaný σ-priestorom miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$, kde $\boldsymbol{R}$ je s vlastnosťou $\bigcup_{A \in \boldsymbol{R}} A = X$, má vlastnosť z tej vety. Toto dokážeme takto:

Nech je $\eta > 0$, $\bar{f} \in F_0$, $\bar{f} \geqq 0$, pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $f_n \in M$, $f_n \geqq 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq \bar{f}$.

Množina M je v tomto prípade množina všetkých $(X, \boldsymbol{R})$-merateľných funkcií definovaných na X. Teda funkcie f_n, pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, a $\bar{f} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sú nezáporné $(X, \boldsymbol{R})$-merateľné funkcie, a teda pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ existuje neklesajúca postupnosť $\{\bar{f}_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ nezáporných funkcií z F_0 konvergujúca k funkcii f_n pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a k funkcii $\bar{f} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pre $n = 0$. Keďže je $\bar{f}_{n,k} \leqq \bar{f}$ pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a $k = 1, 2, 3, \ldots$ existujú limity: $\lim_{k \to \infty} I_0(\bar{f}_{n,k})$ pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Nech i je ľubovoľné prirodzené číslo a $\delta > 0$. Potom existujú také prirodzené čísla $k_1, k_2, \ldots, k_i$, že je $\sum_{n=0}^{i} I_0(\bar{f}_{n,k_n}) > \sum_{n=0}^{i} \lim_{k \to \infty} I_0(\bar{f}_{n,k}) - \delta$. Zrejme je $\sum_{n=0}^{i} \bar{f}_{n,k_n} \leqq \bar{f}$ a teda platí $\sum_{n=0}^{i} \lim_{k \to \infty} I_0(\bar{f}_{n,k}) - \delta < \sum_{n=0}^{i} I_0(\bar{f}_{n,k_n}) = I_0(\sum_{n=0}^{i} \bar{f}_{n,k_n}) \leqq I_0(\bar{f})$. Z toho vyplýva, že pre každé prirodzené číslo i platí: $\sum_{n=0}^{i} \lim_{k \to \infty} I_0(\bar{f}_{n,k}) \leqq I_0(\bar{f})$. Teda platí aj $\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k \to \infty} I_0(\bar{f}_{n,k}) \leqq I_0(\bar{f})$.

Nech pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n} \bar{f}_{i,n}$, potom pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $\varphi_n \geqq 0$, $\varphi_n \in F_0$, $\varphi_n \leqq \varphi_{n+1} \leqq \bar{f}$. Nech je $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje 1. K_0, že pre $k \geqq K_0$ je $\bar{f}_{0,k}(x) > \bar{f}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \frac{\varepsilon}{3}$; 2. K_1, že pre $k \geqq K_1$ je $\sum_{j=k}^{\infty} f_j(x) < \frac{\varepsilon}{3}$; 3. K_2, že pre $k \geqq K_2$ a $n = 1, 2, \ldots, K_1$ je $\bar{f}_{n,k}(x) > f_n(x) - \frac{\varepsilon}{3K_1}$. Nech je $n \geqq \max(K_0, K_1, K_2)$. Potom platí $\varphi_n(k) = \sum_{i=0}^{n} \bar{f}_{i,n}(x) > \bar{f}(x) - \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) - \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^{K_1} f_j(x) - \frac{\varepsilon}{3} = \bar{f}(x) - \frac{2}{3}\varepsilon - \sum_{j=K_1+1}^{\infty} f_j(x) > \bar{f}(x) - \varepsilon$. Z tejto úvahy vidieť, že $\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \bar{f}$. Z toho, že I_0 je v 0 monotónne zhora spojitá funkcionála na F_0, vyplýva, že platí $I_0(\bar{f}) = \lim_{n \to \infty} I_0(\varphi_n)$. Okrem toho platí:

$$\lim_{n \to \infty} I_0(\varphi_n) = \lim_{n \to \infty} I_0(\sum_{i=0}^{n} \bar{f}_{i,n}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} I_0(\bar{f}_{i,n}) \leqq \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \lim_{k \to \infty} I_0(\bar{f}_{i,k}) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k \to \infty} I_0(\bar{f}_{n,k}).$$

Na základe posledného výsledku predchádzajúceho odseku a na základe nerovnosti $I_0(\overline{f}) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} I_0(\overline{f}_{n,k})$ vyplýva rovnosť $I_0(\overline{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} I_0(\overline{f}_{n,k})$.

Z rovnosti $I_0(\overline{f}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} I_0(\overline{f}_{n,k})$ zrejme vyplýva existencia takej postupnosti $\{\overline{f}_{n,k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z F_0, že platí $\sum_{n=0}^{\infty} I_0(\overline{f}_{n,k_n}) > I_0(\overline{f}) - \eta$. Ak kladieme $\overline{f}_n = \overline{f}_{n\,k_n}$, tak je splnené toto: $0 \leqq \overline{f}_n \leqq f_n$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots, 0 \leqq \overline{f}_0 \leqq \overline{f} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $\overline{f}_n \in F_0$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $\sum_{n=0}^{\infty} I_0(\overline{f}_n) > I_0(\overline{f}) - \eta$, čo bolo treba dokázať.

Ukážeme ešte na príklade existenciu takého priestoru D-integrálu, ktorý nie je indukovaný σ-priestorom miery a má vlastnosť z dokázanej vety. Nech X je spočítateľná množina $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, nech F_0 je množina všetkých tých funkcií definovaných na X, ktorých hodnota sa vždy rovná nule, okrem nejakého konečného počtu prvkov z X, a nech $I_0(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)$ pre $f \in F_0$. Potom sa ľahko zistí, že (X, F_0, I_0) je priestor D-integrálu, ktorý má vlastnosť z dokázanej vety a ktorý je indukovaný priestorom miery $(X, \boldsymbol{K}, \mu)$, v ktorom $\boldsymbol{K}$ je systém všetkých konečných podmnožín množiny X a $\mu(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_K(a_n)$ pre $K \in \boldsymbol{K}$. Pritom (X, F_0, I_0) nie je indukovaný žiadnym σ-priestorom miery.

3

Nech (X, F, I) je (úplný) σ-priestor D-integrálu. Nech existuje taký priestor miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$, že (X, F, I) je najmenším (úplným) σ-rozšírením (X, F_0, I_0), pričom (X, F_0, I_0) je priestor D-integrálu indukovaný priestorom miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$. Potom budeme hovoriť, že (úplný) σ-priestor (X, F, I) D-integrálu patrí k priestoru miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$. Niekedy sa stane, že ten istý (úplný) σ-priestor D-integrálu patrí k dvom rôznym priestorom miery. Potom tieto priestory miery sú v istom vzájomnom vzťahu. Ale platí aj obrátene: Ak dva priestory miery sú v takom vzájomnom vzťahu, tak k nim patriace úplné σ-priestory D-integrálu sú rovnaké. Ak ide o σ-priestory miery, platí toto tvrdenie:

Nech (X, F_1, I_1) je úplný σ-priestor D-integrálu, ktorý patrí k σ-priestoru mieru $(X, \boldsymbol{R}_1, \mu_1)$ a (X, F_2, I_2) je úplný σ-priestor D-integrálu, ktorý patrí k σ-priestoru miery $(X, \boldsymbol{R}_2, \mu_2)$. Potom $(X, F_1, I_1) = (X, F_2, I_2)$ vtedy a len vtedy, keď ku každému $A \in \boldsymbol{R}_1$, $\mu_1(A) < \infty$, existuje B_1 a $B_2 \in \boldsymbol{R}_2$ také, že platí $B_1 \subset A \subset B_2$ a $\mu_2(B_1) = \mu_1(A) = \mu_2(B_2)$ a obrátene ku každému $B \in \boldsymbol{R}_2$, $\mu_2(B) < \infty$, existuje A_1 a $A_2 \in \boldsymbol{R}_1$ také, že platí $A_1 \subset B \subset A_2$ a $\mu_1(A_1) = \mu_2(B) = \mu_1(A_2)$.

Medzi všetkými priestormi miery, ku ktorým patrí ten istý úplný σ-priestor

(X, F, I) D-integrálu, existuje najväčší, a to v tomto zmysle: Ak $(X, \tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mu})$ je ten najväčší priestor miery a $(X, \mathbf{R}, \mu)$ je ľubovoľný priestor miery, ku ktorému tiež patrí (X, F, I), potom je $\mathbf{R} \subset \tilde{\mathbf{R}}$ a pre $A \in \mathbf{R}$ je $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$. Možno zistiť aj to, že $\tilde{\mathbf{R}} = \{A : A \subset X,\ f \in F \Rightarrow f\chi_A \in F\}$, čo je σ-algebra (pozri 4.1.1 a 4.1.2). Nech $\overline{\mathbf{R}}$ a $\overline{\mu}$ sú definované takto: $\overline{\mathbf{R}}$ je najmenší σ-okruh nad okruhom $\mathbf{R}_0$ všetkých tých množín $A \in \mathbf{R}$, ktorých miera $\mu(A)$ je konečná a $\overline{\mu}$ je rozšírenie miery μ branej len na $\mathbf{R}_0$. Potom pre mieru $\tilde{\mu}$ platí: Ak pre $A \in \tilde{\mathbf{R}}$ existujú dve množiny B_1, $B_2 \in \overline{\mathbf{R}}$ také, že je $B_1 \subset A \subset B_2$ a $\overline{\mu}(B_1) = \overline{\mu}(B_2)$, kladieme $\tilde{\mu}(A) = \overline{\mu}(B_1)$; v každom inom prípade kladieme $\tilde{\mu}(A) = \infty$ pre $A \in \tilde{\mathbf{R}}$.

4

V poznámke 2 sme hovorili o priestore D-integrálu indukovanom priestorom miery. Ale aj obrátene: ku každému priestoru D-integrálu môžeme priradiť priestory miery, ktoré istým spôsobom súvisia s tým priestorom D-integrálu. Od tohto priradenia môžeme napr. požadovať, aby splňovalo túto podmienku: Ak (X, F, I) je priestor D-integrálu indukovaný nejakým priestorom miery, tak (X, F, I) je indukovaný aj tým priestorom miery, ktorý sme mu priradili, a ak (X, F, I) je σ-priestor D-integrálu, ktorý patrí k nejakému priestoru miery, vtedy (X, F, I) patrí aj k priestoru miery, ktorý priraďujeme k (X, F, I). Takéto rôzne spôsoby pre prípad, že (X, F, I) je úplný σ-priestor D-integrálu, podali už P. J. Daniell ([3]), F. Riesz ([11]), J. Mařík ([7], [8]) a H. Stone ([14]).

Ak (X, F, I) je úplný σ-priestor D-integrála a $A \subset X$, tak $\mu_2^*(A) = \inf \{ I(f) : \chi_A \leqq f,\ f \in F\}$ je vonkajšia miera na systéme všetkých podmnožín množiny X (napr. [14]). T. H. Hildebrandt ([6]) metódy, ako úplnému σ-priestoru (X, F, I) D-integrálu priradiť priestor miery $(X, \mathbf{R}, \mu)$, zhrňuje na tieto tri: (*a*) *množina A je z $\mathbf{R}$ vtedy a len vtedy, keď χ_A je z F* ([3], [11], [7], [8]). Tento systém možno rozšíriť o ďalšie merateľné množiny s mierou rovnou ∞; (*b*) *A je z $\mathbf{R}$ vtedy a len vtedy, keď χ_A je merateľná v zmysle Stoneho, t. j. ak* $\max \{\min (\chi_A, h_1), \min (\chi_A, h_2), \min (h_1, h_2)\}$ *je z F pre každé dve funkcie h_1 a h_2 z F* ([14]); (*c*) *A je z $\mathbf{R}$ vtedy a len vtedy, keď A je μ_2^*-merateľná.* Vo všetkých troch prípadoch funkciu μ definujeme tak, že je $\mu(A) = \mu_2^*(A)$ pre $A \in \mathbf{R}$.

Metódy definície $\mathbf{R}$ uvedené pod (a), (b) spočívajú na nasledujúcich dvoch vlastnostiach úplného σ-priestoru (X, F, I) D-integrálu, ktorý patrí k úplnému σ-priestoru miery $(X, \mathbf{S}, \nu)$: a′) A je z $\mathbf{S}$ a $\nu(A) < \infty$ vtedy a len vtedy, keď je χ_A z F; *b*′) $A \in \mathbf{S}$ vtedy a len vtedy, keď χ_A je $(X, \mathbf{S})$-merateľná funkcia.

Ale pre definíciu $\mathbf{R}$ môžeme použiť aj túto vlastnosť úplného σ-priestoru (X, F, I) D-integrálu patriaceho k priestoru miery $(X, \mathbf{S}, \nu)$: *ak je $A \in \mathbf{S}$, potom je $f\chi_A \in F$ pre každé $f \in F$.* V tejto poznámke použijeme práve túto vlastnosť pre definíciu $\mathbf{R}$. Úvahy budeme robiť podrobnejšie, pretože sa budeme v tejto poznámke zaoberať vzťahom toho priradeného priestoru miery k priestoru D-integrálu a pritom nebudeme vo všeobecnosti pre tento priestor D-intregálu požadovať, aby bol úplným σ-priestorom D-integrálu.

4.1. Nech (X, F, I) je priestor D-integrálu. Nech $\boldsymbol{M}$ je systém všetkých tých podmnožín A množiny X, pre ktoré platí $f\chi_A \in F$ pre každé $f \in F$. Nech pre $A \in \boldsymbol{M}$ je $\mu_1(A) = \sup \{I(f) : 0 \leqq f \leqq \chi_A,\ f \in F\}$ a $\mu_2(A) = \inf \{\sum_{n=1}^{\infty} I(f_n):$ $\chi_A \leqq \sum_{n=1}^{\infty} f_n,\ f_n \geqq 0$ a $f_n \in F$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

4.1.1. $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ *a* $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ *sú priestory miery.*

Dôkaz. Zrejme sú $\emptyset$ a X z $\boldsymbol{M}$. Z rovnosti $f\chi_{A^*} = f - f\chi_A$ platnej pre ľubovoľnú množinu A a ľubovoľnú funkciu f vyplýva, že je $A \in \boldsymbol{M} \Rightarrow A^* \in \boldsymbol{M}$. Nech A a B sú z $\boldsymbol{M}$, potom z rovnosti $f\chi_{A\cup B} = \max(f^+\chi_A, f^+\chi_B) - \max(f^-\chi_A, f^-\chi_B)$ vyplýva, že aj $A \cup B$ je z $\boldsymbol{M}$. $\boldsymbol{M}$ je teda algebra.

Zrejme je $\mu_1(A) \geqq 0$ a $\mu_2(A) \geqq 0$ pre každé $A \in \boldsymbol{M}$ a $\mu_1(\emptyset) = 0$ $\mu_2(\emptyset) = 0$. Nech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť navzájom disjunktných množín z $\boldsymbol{M}$ a nech $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je tiež z $\boldsymbol{M}$, Ak je $\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$, resp. $\mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$, tak zrejme $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) \leqq \mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) \leqq \mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Nech je $\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, n je ľubovoľné prirodzené číslo a $\varepsilon > 0$. Nech $0 \leqq f_k \leqq \chi_{A_k}$, $f_k \in F$ pre $k = 1, 2, \ldots, n$ sú také funkcie, že platí $\sum_{k=1}^{n} \mu_1(A_k) - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} I(f_k)$. Potom zo vzťahu $\sum_{k=1}^{n} f_k \leqq \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ vyplýva, že je $\sum_{k=1}^{n} I(f_k) \leqq \mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Teda platí aj $\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geqq$ $\geqq \sum_{k=1}^{n} \mu_1(A_k)$; z čoho vyplýva nerovnosť $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) \leqq \mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Nech je $\mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje postupnosť $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, že je $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \leqq \sum_{i=1}^{\infty} f_i$, $0 \leqq f_i$, $f_i \in F$ pre $i = 1, 2, 3, \ldots$ a $\sum_{i=1}^{\infty} I(f_i) < \mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) + \varepsilon$. Z nerovností: $\sum_{i=1}^{\infty} f_i\chi_{A_n} \leqq \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ a $\chi_{A_n} = \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \cdot \chi_{A_n} \leqq \sum_{i=1}^{\infty} f_i\chi_{A_n}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ dostávame nerovnosť:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} I(f_i\chi_{A_n}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} I(f_i\chi_{A_n}) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} I(f_i) < \mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) + \varepsilon.$$

Teda platí aj $\mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n)$.

Nech je $\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$, resp. $\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$, a $\varepsilon > 0$. Potom existuje funkcia $f \in F$, $0 \leqq f \leqq \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ a $\frac{1}{\varepsilon} < I(f)$, resp. $\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \varepsilon < I(f)$. $\{\sum_{n=1}^{k} f\chi_{A_n}\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť funkcií z F konvergujúca k funkcii f, teda je

$\sum_{n=1}^{\infty} I(f\chi_{A_n}) = I(f)$, ako to vyplýva z vlastnosti V. Zrejme je $0 \leqq f\chi_{A_n} \leqq \chi_{A_n}$ a teda je $\frac{1}{\varepsilon} < I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f\chi_{A_n}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)$, resp. $\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \varepsilon < I(f) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)$.

Teda vždy platí $\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)$.

Ľahko sa dokáže i to, že platí $\mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n)$.

Z toho vyplýva, že $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ a $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ sú priestory miery.

Zrejme vždy platí $\mu_1(A) \leqq \mu_2(A)$ pre $A \in \boldsymbol{M}$. Ak je $A \in \boldsymbol{M}$ a $\chi_A \in F$, vtedy platí $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Priestory miery $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ a $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ budeme nazývať priestormi miery indukovanými priestorom (X, F, I) D-integrálu. Neskôr uvidíme, že priestor miery $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ nevyhovuje vždy našej požiadavke zo začiatku poznámky 4. Ale ten priestor miery $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ nemá ani taký vzťah k priestoru D-integrálu, ako má $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$.

4.1.2. *Nech (X, F, I) je σ-priestor* D-*integrálu, potom $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ a $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ sú σ-priestory miery.*

Dôkaz. Aby sme dokázali, že $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ a $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ sú σ-priestory miery, stačí dokázať toto tvrdenie: Nech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť množín z $\boldsymbol{M}$, vtedy aj $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je z $\boldsymbol{M}$. Nech je $f \geqq 0$ a $f \in F$, potom postupnosť $\{f\chi_{A_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť funkcií z F, ktorá konverguje k funkcii $f\chi_A$. Ďalej je $I(f\chi_{A_n}) \leqq I(f)$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ Z toho vyplýva, že je $f\chi_A$ z F. Z toho ľahko vidieť, že je $g\chi_A = g^+\chi_A - g^-\chi_A$ z F pre každé $g \in F$. Teda je $A \in \boldsymbol{M}$.

Ľahko sa zistí, že je $\mu_2(A) = \inf \{I(f) : \chi_A \leqq f,\ f \in F\}$ pre každé $A \in \boldsymbol{M}$, ak (X, F, I) je σ-priestorom D-integrálu.

4.1.3. *Nech (X, F, I) je σ-priestor* D-*integrálu a $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ a $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ sú ním indukované priestory miery. Nech je $A \in \boldsymbol{M}$ a nech existuje $f \in F$, že f je $(X, \boldsymbol{M})$-merateľná funkcia a $A = \{x : f(x) \geqq 1\}$. Potom je $\chi_A \in F$.*

Dôkaz. Nech $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť reálnych čísel hustá v $\langle 1, \infty)$ a nech je $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_n > 1$ pre $n = 2, 3, \ldots$ Pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ nech $1 = \alpha_1^{(n)} < \alpha_2^{(n)} < \ldots < \alpha_n^{(n)}$ je prvých n členov tej postupnosti usporiadaných podľa veľkosti. Položme $A_i^{(n)} = \{x : \alpha_i^{(n)} \leqq f(x) < \alpha_{i+1}^{(n)}\}$, pričom kladieme $\alpha_{n+1}^{(n)} = \infty$. Množiny $A_i^{(n)}$ sú podľa predpokladu z $\boldsymbol{M}$, a teda funkcie $\frac{1}{\alpha_i^{(n)}} \cdot f\chi_{A_i^{(n)}}$ sú z F. Postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde je $f_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i^{(n)}} f\chi_{A_i^{(n)}}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, je nerastúca postupnosť konvergujúca k χ_A. Keďže (X, F, I) je σ-priestor D-integrálu, je $\chi_A \in F$.

4.1.4. *σ-priestor (X, F, I) D-integrálu je úplný vtedy a len vtedy, keď $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ je úplný σ-priestor miery.*

Dôkaz. Nech je $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ úplný σ-priestor miery a nech je $f \in F$, $I(|f|) = 0$ a $0 \leqq g \leqq |f|$. Nech $A = \{x : |f(x)| > 0\}$ a $h \in F$, $h \geqq 0$. Potom $\{h - (h - n|f|)^+\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť funkcií z F, ktorá konverguje k funkcii $h\chi_A$, a postupnosť $\{I(h - (h - n|f|)^+)\}_{n=1}^{\infty}$ je zrejme ohraničená. Keďže (X, F, I) je σ-priestor D-integrálu, je $h\chi_A \in F$. Z toho vyplýva, že je $A \in \boldsymbol{M}$. Nech je $k \in F$. Postupnosť $\{(k\chi_A - n|f|)^+\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť funkcií z F konvergujúca k 0, čiže je $\lim\limits_{n\to\infty} I((k\chi_A - n|f|)^+) = 0$. Z toho vyplýva, že $I(k\chi_A) = 0$, a teda aj $\mu_2(A) = 0$. Z úplnosti σ-priestoru miery $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ vyplýva, že g a $|f|$ sú $(X, \boldsymbol{M})$-merateľné funkcie.

Nech $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť reálnych čísel hustá v $\langle 0, \infty)$ taká, že je $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_n > 0$ pre $n = 2, 3, 4, \ldots$ Nech $0 = \alpha_1^{(n)} < \alpha_2^{(n)} < \ldots < \alpha_n^{(n)}$ je prvých n členov tej postupnosti usporiadaných podľa veľkosti. Nech je $A_i^{(n)} = \{x : \alpha_i^{(n)} \leqq g(x) < \alpha_{i+1}^{(n)}\}$, pričom $\alpha_{n+1}^{(n)}$ kladďme ∞. Zrejme je $A_i^{(n)} = \{x : \frac{1}{\alpha_i^{(n)}} \cdot |f(x)|\, \chi_{A_i^{(n)}}(x) \geqq 1\}$, pričom je $f\chi_{A_i^{(n)}} \in F$ a $f\chi_{A_i^{(n)}}$ je $(X, \boldsymbol{M})$-merateľná funkcia. Teda podľa 4.1.3 je $\chi_{A_i^{(n)}} \in F$ pre každé i a n. Postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde je $g_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} \chi_{A_i^{(n)}}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, je neklesajúca postupnosť funkcií z F konvergujúca k funkcii g. Ďalej je $I(g_n) = 0$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ Z toho vyplýva, že je $g \in F$ a $I(g) = 0$. Teda (X, F, I) je úplný.

Nech (X, F, I) je úplný σ-priestor D-integrálu. Nech je $A \in \boldsymbol{M}$, $B \subset A$ a $\mu_2(A) = 0$. Existuje $f \in F$, že je $\chi_A \leqq f$ a $I(f) = 0$. Nech je $g \in F$ a $g \geqq 0$. Potom $\{(g\chi_A - nf)^+\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť funkcií z F konvergujúca k 0, a teda je $\lim\limits_{n\to\infty} I((g\chi_A - nf)^+) = 0$. Z toho vyplýva, že je $0 \leqq I(g\chi_A) \leqq \leqq \lim\limits_{n\to\infty} I(nf) = 0$. Z tohto a nerovnosti $0 \leqq g\chi_B \leqq g\chi_A$ vyplýva, že je $g\chi_B \in F$. Z toho už ľahko dostaneme, že je $B \in \boldsymbol{M}$ a $\mu_2(B) = 0$.

V tejto vete nemôžeme nahradiť σ-priestor miery $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ σ-priestorom miery $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$, ako ukazuje nasledujúci príklad: Nech X je ľubovoľná nekonečná množina a f nezáporná, neohraničená funkcia definovaná na X. Nech F je množina všetkých reálnych násobkov funkcie f a $I(kf) = k$, kde k je reálne číslo. Zrejme je (X, F, I) úplný σ-priestor D-integrálu. Nech je $A = \{x : f(x) > 0\}$, potom A je nekonečná množina. Množina A je zrejme z $\boldsymbol{M}$, pretože je $kf\chi_A = kf$ pre každé reálne číslo k. Ďalej je zrejmé, že pre žiadnu neprázdnu pravú podmnožinu B množiny A neplatí $kf\chi_B \in F$, ak je $k \neq 0$. Teda je: $A \in \boldsymbol{M}$ a $\emptyset \neq B \subset A$, $B \neq A \Rightarrow B \overline{\in} \boldsymbol{M}$. Pretože však je $\mu_1(A) = 0$, nie je $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ úplný.

Z dôkazu tejto vety vidieť, že pre priestor miery $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ platí len táto veta: *Nech $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ je úplný σ-priestor miery indukovaný σ-priestorom (X, F, I) D-integrálu, vtedy (X, F, I) je úplný.*

4.1.5. *Nech (X, F, I) je σ-priestor D-integrálu, potom $\mu_2^*(A) = \inf \{I(f) : f \in F.\ \chi_A \leqq f\}$ pre $A \subset X$ je vonkajšou mierou na systéme všetkých podmnožín, množiny X.* Ak je $\mu_2^*(A) < \infty$, ľahko sa zistí, že existuje taká funkcia $f \in F$, že je $\chi_A \leqq f$ a $\mu_2^*(A) = I(f)$. Pre μ_2^*-merateľné množiny platí táto veta:

Nech (X, F, I) je úplný σ-priestor D-integrálu, potom $A \subset X$ je μ_2^*-merateľná množina vtedy a len vtedy, keď je $A \in \boldsymbol{M}$.

Dôkaz. Nech je $A \in \boldsymbol{M}$ a $B \subset X$. Ak je $\mu_2^*(B) = \infty$, tak platí $\mu_2^*(B) = \mu_2^*(B \cap A) + \mu_2^*(B - A)$. Ak je $\mu_2^*(B) < \infty$, vtedy existuje $f \in F$ také, že je $\chi_B \leqq f$ a $\mu_2^*(B) = I(f)$. Funkcie $f\chi_A$ a $f - f\chi_A$ sú z F a platí pre ne: $\chi_{B \cap A} \leqq f\chi_A$ a $\chi_{B-A} \leqq f - f\chi_A$. Z toho vyplýva, že platí $\mu_2^*(B \cap A) + \mu_2^*(B - A) \leqq I(f\chi_A) + I(f - f\chi_A) = I(f) = \mu_2^*(B)$. Teda je A μ_2^*-merateľná množina.

Nech je A μ_2^*-merateľná množina a nech B je taká podmnožina množiny X, že je $\mu_2^*(B) < \infty$. Potom existujú také tri nezáporné funkcie f, g, h z F, že platí: $\chi_B \leqq f$, $\chi_{B \cap A} \leqq g$, $\chi_{B-A} \leqq h$ a $I(f) = \mu_2^*(B) = \mu_2^*(B \cap A) + \mu_2^*(B - A) = I(g) + I(h)$. Z toho vyplýva, že je $I(g + h) = I(f) \leqq I(\max(g, h)) \leqq I(g + h)$, čiže je $I(g + h) = I(\max(g, h))$ a $I(\min(g, h)) = 0$.

Nech je $f \geqq 0$, $f \in F$. Nech pre $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ je $A_k^{(n)} = \left\{x : \frac{k}{2^n} \leqq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}$. Potom pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ je $\mu_2^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}) \leqq I(2^n f) < \infty$. Teda podľa predchádzajúceho odseku existujú také dve postupnosti $\{\bar{g}_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\bar{h}_n\}_{n=0}^{\infty}$ funkcií z F, že pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ platí $\chi_{(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}) \cap A} \leqq \bar{g}_n$, $\chi_{(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}) - A} \leqq \bar{h}_n$, $\mu_2^*((\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}) \cap A) = I(\bar{g}_n)$, $\mu_2^*((\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}) - A) = I(\bar{h}_n)$ a $I(\min(\bar{g}_n, \bar{h}_n)) = 0$. Nech pre $k = 1, 2, 3, \ldots$ a $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sú $\bar{g}_k^{(n)}$ a $\bar{h}_k^{(n)}$ také funkcie z F, že platí: $\chi_{A_k^{(n)} \cap A} \leqq \bar{g}_k^{(n)}$, $\chi_{A_k^{(n)} - A} \leqq \bar{h}_k^{(n)}$, $\mu_2^*(A_k^{(n)} \cap A) = I(\bar{g}_k^{(n)})$, $\mu_2^*(A_k^{(n)} - A) = I(\bar{h}_k^{(n)})$. Kladme pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ $g_k^{(n)} = \min(\bar{g}_k^{(n)}, \frac{2^n}{k} \cdot f, \bar{g}_n)$ a $h_k^{(n)} = \min(\bar{h}_k^{(n)}, \frac{2^n}{k} \cdot f, \bar{h}_n)$. Zrejme pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a $k = 1, 2, 3, \ldots$ platí $\chi_{A_k^{(n)} \cap A} \leqq g_k^{(n)}$, $\chi_{A_k^{(n)} - A} \leqq h_k^{(n)}$), $\mu_2^*(A_k^{(n)} \cap A) = I(g_k^{(n)})$, $\mu_2^*(A_k^{(n)} - A) = I(h_k^{(n)})$ a $I(\min(g_i^{(n)}, h_j^{(n)})) = 0$ pre $i = 1, 2, 3, \ldots$ a $j = 1, 2, 3, \ldots$ Pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ postupnosti $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{\psi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, kde je $\varphi_k^{(n)} = \max\left(\frac{1}{2^n} g_1^{(n)}, \ldots, \frac{k}{2^n} g_k^{(n)}\right)$ a $\psi_k^{(n)} = \max\left(\frac{1}{2^n} h_1^{(n)}, \ldots \frac{k}{2^n} h_k^{(n)}\right)$, sú neklesajúce postupnosti funkcií z F, pre ktoré platí $I(\varphi_k^{(n)}) \leqq I(f)$ a $I(\psi_k^{(n)}) \leqq I(f)$ pre $k = 1, 2, 3, \ldots$ Teda funkcie $g_n = \lim_{k \to \infty} \varphi_k^{(n)}$ a $h_n = \lim_{k \to \infty} \psi_k^{(n)}$ pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sú z F a platí pre ne $0 \leqq g_n \leqq f$ a $0 \leqq h_n \leqq f$. Pre $k = 1, 2, 3, \ldots$ a $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ platí min

$(\varphi_k^{(n)}, \psi_k^{(n)}) \leqq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \min\left(\frac{i}{2^n} g_i^{(n)}, \frac{j}{2^n} h_j^{(n)}\right)$, a teda je aj $I(\min(\varphi_k^{(n)}, \psi_k^{(n)})) = 0$. Z toho vyplýva, že platí $I(\min(g_n, h_n)) = \lim_{k\to\infty} I(\min(\varphi_k^{(n)}, \psi_k^{(n)})) = 0$ pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ďalej platí $I(g_n) + I(h_n) = I(\max(g_n, h_n)) + I(\min(g_n, h_n)) \leqq I(f)$ pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; čiže je aj $\lim_{n\to\infty} \inf I(g_n) \leqq I(f) - \lim_{n\to\infty} \sup I(h_n)$. Funkcie $\lim_{n\to\infty} \inf g_n$ a $\lim_{n\to\infty} \sup h_n$ sú z F a platí pre ne $I(\lim_{n\to\infty} \inf g_n) \leqq \lim_{n\to\infty} \inf I(g_n) \leqq I(f) - \lim_{n\to\infty} \sup I(h_n) \leqq I(f) - I(\lim_{n\to\infty} \sup h_n) = I(f - \lim_{n\to\infty} \sup h_n)$. Zo vzťahu $\lim_{n\to\infty} \inf g_n \geqq f\chi_A \geqq f - \lim_{n\to\infty} \sup h_n$ dostávame nerovnosť $I(\lim_{n\to\infty} \inf g_n) \geqq I(f - \lim_{n\to\infty} \sup h_n)$. Teda platí aj $I(\lim_{n\to\infty} \inf g_n) = I(f - \lim_{n\to\infty} \sup h_n)$. Z nerovnosti $0 \leqq \lim_{n\to\infty} \inf g_n - f\chi_A \leqq \lim_{n\to\infty} \inf g_n + \lim_{n\to\infty} \sup h_n - f$ a z rovnosti $I(\lim_{n\to\infty} \inf g_n + \lim_{n\to\infty} \sup h_n - f) = 0$ vyplýva, že funkcia $\lim_{n\to\infty} \inf g_n - f\chi_A$ je z F. Teda je aj $f\chi_A \in F$. Z tohto už zrejme vidieť, že množina A je z $\boldsymbol{M}$.

Z tejto vety a z tvrdenia (15) z [14] vyplýva, že každá množina merateľná v zmysle (a) a (b) uvádzanom u Hildebrandta je z $\boldsymbol{M}$. Ďalej z tejto vety vyplýva, že množina je merateľná v zmysle (c) uvádzanom u Hildebrandta vtedy a len vtedy, keď je z $\boldsymbol{M}$. Pravda, všetky tu uvádzané výroky sú správne jedine pre úplné σ-priestory D-integrálu.

Ak (X, F, I) je priestor D-*integrálu, tak funkcia* $\mu_{1*}(A) = \sup\{I(f) : f \in F, 0 \leqq f \leqq \chi_A\}$ *pre* $A \subset X$ *je vnútornou mierou definovanou na systéme všetkých podmnožín množiny* X. Na príklade z 4.1.4 možno zistiť, že μ_{1*} nemusí byť vnútornou mierou indukovanou mierou μ_2 a μ_2^* nemusí byť vonkajšou mierou indukovanou mierou μ_1. O rovnosti priestorov $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ a $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ v prípade, že (X, F, I) je úplný σ-priestor D-integrálu, platí táto veta:

Nech (X, F, I) je úplný σ-priestor D-*integrálu, potom* $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1) = (X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ *vtedy a len vtedy, keď pre každé* $A \in \boldsymbol{M}$, $\mu_1(A) < \infty$ *je* $\chi_A \in F$.

Dôkaz. Nech pre každé $A \in \boldsymbol{M}$, $\mu_1(A) < \infty$ je $\chi_A \in F$. Nech je $B \in \boldsymbol{M}$. Potom je buď $\mu_1(B) = \infty$, alebo $\mu_1(B) < \infty$. V prvom prípade je aj $\mu_2(B) = \infty$, a teda $\mu_1(B) = \mu_2(B)$. V druhom prípade je $\mu_1(B) = I(\chi_B) = \mu_2(B)$. Teda $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1) = (X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$.

Nech $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1) = (X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ a nech je $A \in \boldsymbol{M}$ a $\mu_1(A) < \infty$. Potom existujú funkcie f a g z F, že je $0 \leqq f \leqq \chi_A \leqq g$ a $\mu_1(A) = I(f)$ a $\mu_2(A) = I(g)$. Ďalej je $0 \leqq \chi_A - f \leqq g - f$ a $I(g - f) = 0$; z čoho vyplýva, že je $\chi_A - f \in F$. Teda je aj $\chi_A \in F$.

V tejto vete nemôžeme podmienku $A \in \boldsymbol{M}$, $\mu_1(A) < \infty \Rightarrow \chi_A \in F$ nahradiť podmienkou $A \in \boldsymbol{M}$, $\mu_2(A) < \infty \Rightarrow \chi_A \in F$. Dá sa to zistiť na nasledujúcom príklade:

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nejaká prostá postupnosť a X_1 nech je nejaká neprázdna množina, ktorá neobsahuje žiadny člen tej postupnosti. Nech X je súčet množiny X_1 a množiny, ktorá je množina členov tej postupnosti. Nech F je množina všetkých tých funkcií definovaných na X, ktoré sú všade rovné nule okrem konečného počtu členov tej postupnosti. Nech je $I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)$ pre $f \in F$. Potom (X, F, I) je priestor D-integrálu. Ľahko sa zistí, že pre najmenšie úplné σ-rozšírenie priestoru (X, F, I) D-integrálu platí $A \in \boldsymbol{M}$, $\mu_2(A) < \infty \Rightarrow \chi_A \in F$, kde $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ a $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ sú priestory miery indukované tým najmenším úplným σ-rozšírením. Pritom $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1) \neq (X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$, pretože je $\mu_1(X) = 1 \neq \mu_2(X) = \infty$.

4.1.6. Keďže μ_2^* je vonkajšia miera na σ-algebre všetkých podmnožín množiny X, môžeme sa zaoberať otázkou, akú vlastnosť musí mať okruh množín, aby táto funkcia bratá na ňom bola mierou. Všetky takéto okruhy majú istú vlastnosť vzhľadom na ten priestor D-integrálu. Za tým účelom zaveďme pojem I-oddeliteľných množín: Nech (X, F, I) je σ-priestor D-integrálu. Potom disjunktné množiny A a B nazývame I-oddeliteľnými, ak buď $\chi_{A \cup B} \leqq f \Rightarrow f \,\overline{\in}\, F$, alebo existujú také dve funkcie f a g z F, že je $\chi_A \leqq f$, $\chi_B \leqq g$ a $I(\min(f, g)) = 0$.

Nech (X, F, I) je σ-priestor D-*integrálu. Nech $\boldsymbol{R}$ je okruh podmnožín množiny X. Potom nutná a postačujúca podmienka pre to, aby μ_2^* na $\boldsymbol{R}$ bola miera, je, aby každé dve disjunktné množiny z $\boldsymbol{R}$ boli I-oddeliteľnými.*

Dôkaz. Nech μ_2^* je na $\boldsymbol{R}$ mierou a nech A a B sú dve disjunktné množiny z $\boldsymbol{R}$. Ak je $\mu_2^*(A \cup B) = \infty$, potom pre každú funkciu f s vlastnosťou $\chi_{A \cup B} \leqq f$ je $f \,\overline{\in}\, F$. Ak je $\mu_2^*(A \cup B) < \infty$, existujú zrejme také dve funkcie g a h z F, že je $\chi_A \leqq g$, $\chi_B \leqq h$ a $\mu_2^*(A) = I(g)$, $\mu_2^*(B) = I(h)$. Ďalej musí platiť $0 \leqq I(\min(g, h)) = I(g + h) - I(\max(g,h) = \mu_2^*(A) + \mu_2^*(B) - I(\max(g,h)) \leqq \leqq \mu_2^*(A) + \mu_2^*(B) - \mu_2^*(A \cup B) = 0$. Teda je $I(\min(g, h)) = 0$ a množiny A a B sú I-oddeliteľné.

Nech $\boldsymbol{R}$ je taký okruh podmnožín množiny X, ktorého každé dve disjunktné množiny sú I-oddeliteľné. Ľahko vidieť, že pre dôkaz tvrdenia, že μ_2^* je na $\boldsymbol{R}$ miera, stačí dokázať toto: ak $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť navzájom disjunktných množín z $\boldsymbol{R}$, pre ktoré je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ z $\boldsymbol{R}$, tak platí $\mu_2^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(A_n)$.

Ak je $\mu_2^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$, vtedy tá nerovnosť zrejme platí. Nech je teda $\mu_2^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$. Množiny $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ a A_{n+1} sú I-oddeliteľné, a preto musia existovať také dve funkcie f a g z F, že je $\chi_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \leqq f$ a $\chi_{A_{n+1}} \leqq g$, $I(f) = \mu_2^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$, $I(g) = = \mu_2^*(A_{n+1})$ a $I(\min(f, g)) = 0$. Nech je $h \in F$, $h \geqq \chi_{\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i}$. a $\mu_2^*(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = I(h)$. Potom platí: $\mu_2^*(\bigcup_{=1}^{n+1} A_i) = I(h) \geqq I(\max(\min(f, h), \min(g, h))) = I(\min(f, h)) +$

$+ I(\min(g, h)) - I(\min(\min(f, h), \min(g, h))) = \mu_2^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mu_2^*(A_{n+1})$. Preto pre každé prirodzené číslo n platí: $\sum_{i=1}^{n} \mu_2^*(A_i) \leqq \mu_2^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$. Z toho vyplýva, že je $\mu_2^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geqq \mu_2^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} \mu_2^*(A_i)$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a teda aj $\mu_2^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geqq$ $\geqq \sum_{n=}^{\infty} \mu_2^*(A_n)$.

4.2.1. Nech (X, F, I) je priestor D-integrálu indukovaný priestorom miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$. Potom priestor D-integrálu indukovaný priestorom miery $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$, resp. priestor D-integrálu indukovaný priestorom miery $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$, je rozšírením (X, F, I). Toto vyplýva z tej skutočnosti, že pre každé $A \in \boldsymbol{R}$, pre ktoré platí $\mu(A) < \infty$, je $A \in \boldsymbol{M}$ a $\mu_2(A) = \mu_1(A) = \mu(A) = I(\chi_A)$. To rozšírenie nemusí byť rovné (X, F, I), t. j. môže byť efektívne väčšie, ako sa to ľahko dá ukázať na príklade (X, F, I) z 4.1.5. Ak priestor (X, F, I) D-integrálu je indukovaný σ-priestorom miery $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$, tak sa priestor D-integrálu indukovaný $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ zhoduje s (X, F, I). Toto neplatí pre $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$. Ak totiž vyjdeme z najmenšieho úplného σ-rozšírenia z príkladu z 4.1.5, môžeme ľahko ukázať, že priestor D-integrálu indukovaný $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$ je skutočným rozšírením toho najmenšieho úplného σ-rozšírenia.

4.2.2. *Nech (X, F, I) je σ-priestor* D-*integrálu, pre ktorý platí:* $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$. *Nech je $A \subset X$ a $\chi_A \in F$, potom je $A \in \boldsymbol{M}$.*

Dôkaz. Nech $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ je ľubovoľná spojitá nezáporná konečná funkcia definovaná na n-rozmernom euklidovskom priestore a nech je $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$. Potom je známe ([1], str. 178), že existuje taká neklesajúca postupnosť $\{\varphi_k(u_1, \ldots, u_n)\}_{k=1}^{\infty}$ nezáporných funkcií konvergujúca všade k funkcii $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$, pri ktorej každá funkcia $\varphi_k(u_1, \ldots, u_n)$ patrí do najmenšieho vektorového sväzu H funkcií s vlastnosťami:

a) funkcie $u_1, \ldots, u_n$ sú z H;

b) pre každú funkciu π z H je aj $\min(\pi, 1)$ z H. Je zrejmé, že pre ľubovoľné funkcie $f_1, \ldots, f_n$ z F je aj $\varphi_k(f_1, \ldots, f_n)$ z F, a ak $f_1, \ldots, f_n$ a funkcia $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ sú také, že existuje $h \in F$, pre ktoré platí $\varphi(f_1, \ldots, f_n) \leqq h$, je aj $\varphi(f_1, \ldots, f_n) \in F$.

Nech je $A \subset X$, $\chi_A \in F$ a $f \geqq 0$, $f \in F$. Potom voľme funkciu $\varphi(u_1, u_2) = |u_1 \cdot u_2|$. Platí $|f\chi_A| = f\chi_A \leqq f$. Z toho vyplýva, že $f\chi_A$ je z F. Ľahko sa už dokáže, že je $A \in \boldsymbol{M}$.

4.2.3. *Nech (X, F, I) je σ-priestor* D-*integrálu. Potom každá funkcia $f \in F$ je $(X, \boldsymbol{M})$-merateľná vtedy a len vtedy, keď platí:* $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$.[1]

Dôkaz. Nech platí: $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$ a nech je $g \in F$, $g \geqq 0$. Nech je $a > 0$ a $A = \{x : g(x) > a\}$. Potom postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde je $g_n = n$.

[1] Ak (X, F, I) je úplný σ-priestor D-integrálu, je to tvrdenie v (17) z [14].

$\cdot\left[\frac{n+1}{n}\min\left(\frac{n}{a(n+1)}\cdot g, 1\right)-\min\left(\frac{g}{a}, 1\right)\right]$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, je neklesajúca postupnosť funkcií z F, konverguje k χ_A a $g_n \leqq \frac{g}{a}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$. Z toho vyplýva, že je $\chi_A \in F$. Podľa 4.2.2. je $A \in \boldsymbol{M}$. Ďalej je zrejmé, že aj $\{x : g(x) > 0\}$ je z $\boldsymbol{M}$. Teda je g $(X, \boldsymbol{M})$-merateľná. Z toho ihneď vyplýva $(X, \boldsymbol{M})$-merateľnosť ľubovoľnej funkcie z F.

Druhá časť vety vyplýva z 4.1.3 a z rovnosti $\min(f, 1) = (f - f\chi_A) + \chi_A$, kde je $f \in F$ a $A = \{x : f(x) \geqq 1\}$.

4.2.4. *Nech (X, F, I) je σ-priestor D-integrálu. Potom (X, F, I) patrí k nejakému priestoru miery vtedy a len vtedy, keď preň platí: $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$. V tomto prípade (X, F, I) patrí aj k $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$.*

Dôkaz. Je známe, že keď (X, F, I) patrí k priestoru miery, tak preň platí: $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$. Na základe tohto je zrejmé, že pre dôkaz našej vety stačí dokázať, že každý σ-priestor (X, F, I) D-integrálu spĺňajúci podmienku: $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$, patrí k $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$. Toto dokážeme takto:

Nech je $A \in \boldsymbol{M}$ a $\mu_2(A) < \infty$. Potom existuje $g \in F$ také, že je $\chi_A \leqq g$ a $\mu_2(A) = I(g)$. Z rovnosti $\chi_A = \min(g\chi_A, 1)$ vyplýva, že je $\chi_A \in F$ a $\mu_2(A) = I(\chi_A)$. Z tohto ihneď vyplýva, že každá jednoduchá $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$-integrovateľná funkcia na X, t. j. funkcia $c_1\chi_{A_1} + \ldots + c_n\chi_{A_n}$, kde $c_1, \ldots, c_n$ sú reálne čísla a $A_1, \ldots, A_n \in \boldsymbol{M}$, $\mu_2(A_1) < \infty, \ldots, \mu_2(A_n) < \infty$, je z F a platí $I(c_1\chi_{A_1} + \ldots + c_n\chi_{A_n}) = \int_X (c_1\chi_{A_1} + \ldots + c_n\chi_{A_n})\, d\mu_2$. Z toho, že (X, F, I) je σ-priestor D-integrálu a že každá nezáporná $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$-integrovateľná funkcia na X je limitou nejakej neklesajúcej postupnosti nezáporných jednoduchých $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$-integrovateľných funkcií na X, ľahko sa odvodí, že každá $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$-integrovateľná funkcia g na X je z F a platí pre ňu: $I(g) = \int_X g\, d\mu_2$.

Nech je $f \in F$ a $f \geqq 0$. Nech $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká prostá postupnosť reálnych čísel, ktorá je hustá v $\langle 0, \infty)$, $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_n > 0$ pre $n = 2, 3, 4, \ldots$. Nech $0 = \alpha_1^{(n)} < \alpha_2^{(n)} < \ldots < \alpha_n^{(n)}$ je prvých n členov tej postupnosti usporiadaných podľa veľkosti. Nech pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $k = 1, 2, 3, \ldots$ je $A_k^{(n)} = \{x : \alpha_k^{(n)} \leqq f(x) < \alpha_{k+1}^{\infty}\}$, pričom nech je $\alpha_{n+1}^{(n)} = \infty$. Podľa 4.2.3 je $A_k^{(n)} \in \boldsymbol{M}$ pre každé k a n, a teda je aj $\chi_{A_k^{(n)}} \in F$ pre každé k a n. Postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde je $f_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\chi_{A_k^{(n)}}$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, je neklesajúca postupnosť jednoduchých $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$-integrovateľných funkcií na X konvergujúca k funkcii f. Postupnosti $\{\int_X f_n\, d\mu_2\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sú totožné a ohraničené. Z toho vyplýva, že f je $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$-integrovateľná na X a platí: $I(f) = \int_X f\, d\mu_2$. Tým je veta dokázaná.

Na najmenšom úplnom σ-rozšírení priestoru (X, F, I) D-integrálu z príkladu 4.1.5 sa ľahko zistí, že vo vete nemôžeme $(X, \boldsymbol{M}, \mu_2)$ nahradiť $(X, \boldsymbol{M}, \mu_1)$.

Poznamenajme nakoniec, že veľmi dôležitým problémom je tu nasledujúci problém: Či existuje k ľubovoľnému priestoru (X, F, I) D-integrálu taký σ-priestor D-integrálu, ktorý patrí k nejakému priestoru miery a ktorý je rozšírením (X, F, I). Na tento problém myslí aj H. Stone v [14] na konci článku.

4.3. V prípade, že pre úplný σ-priestor D-integrálu platí $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$, je známe, že platí aj $f\chi_A \in F$ pre každé $f \in F$ a A merateľnú množinu; čo umožňuje definovať neurčitý integrál. V žiadnom z prípadov zo známych merateľností podľa (a), (b) a (c) u Hildebrandta nie je známe, či aj v prípade neplatnosti podmienky: $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$ je $f\chi_A \in F$ pre každú $f \in F$ a A merateľnú množinu. Na základe poznámky v 4.1.5 je zrejmé z definície $\boldsymbol{M}$, že aj v tomto prípade to platí. Teda pre každú $f \in F$ môžeme definovať neurčitý D-integrál $I_A(f)$, kde je $A \in \boldsymbol{M}$, na X takto: $I_A(f) = I(f\chi_A)$. Ako sa dá ľahko zistiť, je $I_A(f)$ σ-aditívnou funkciou a absolútne spojitou vzhľadom na μ_2. $I_A(f)$ nemusí byť absolútne spojitou funkciou vzhľadom na μ_1, čo sa dá zistiť na príklade z 4.1.4.

LITERATÚRA

[1] G. Aumann, Reele Funktionen, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1954.

[2] S. Banach, The Lebesgue integral in abstract spaces, v [12], 320—330.

[3] P. J. Daniell, A general form of integral, Ann. of Math. (2) 19 (1917—1918), 279 až 294.

[4] H. H. Goldstine, Linear functionals and integrals in abstract spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 615—621.

[5] P. R. Halmos, Measure Theory, New York 1950.

[6] T. H. Hildebrandt, Integration in abstract spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953), 111—139.

[7] J. Mařík, Lebesgueův integrál v abstraktních prostorech, Čas. pro pěstování mat., 76 (1951), 175—194.

[8] J. Mařík, Представление функционала в виде интеграла, Чехосл. мат. журнал 5 (80), 1955, 467—487.

[9] Sz. B. Nagy, Valós függvények és függvénysorok, Budapest 1954.

[10] F. Riesz, Les ensembles de mesure nulle et leur rôle dans l'analyse, Comptes rendus du I. congrès des mathématiciens hongrois, Budapest 1952, 215—224.

[11] F. Riesz — Sz. B. Nagy, Leçons d'analyse fonctionelle, II éd., Budapest 1953.

[12] S. Saks, Theory of the Integral, II. Ed., New York 1937.

[13] H. Stone, Notes on integration I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34 (1948), 336 až 342.

[14] H. Stone, Notes on integration II, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34 (1948), 447 až 455.

Došlo 15. 5. 1957.

Katedra matematiky Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

ЗАМЕТКИ К ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА

ЛАДИСЛАВ МИШИК

Выводы

$(X,\mathbf{R},\mu)$ мы называем пространством (σ-пространством) меры, если $\mathbf{R}$—кольцо (σ-кольцо) подмножеств множества X и μ мера на $\mathbf{R}$. (X, F, I) мы называем пространством D-интеграла, если F векторная структура вещественных функций, определенных на X, и I-вещественный однородный, адитивный, неотрицательный и в 0 монотонный сверху непрерывный функционал на F.

σ-пространством D-интеграла мы называем такое пространство D-интеграла (X, F, I), которое имеет следующее свойство: предел каждой такой неубывающей последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций из F, для которой $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченный, принадлежит F. Пространство D-интеграла (X,F,I) называется полным, если имеет место: $f \in F \mid g \mid \leqq \mid f \mid$, $I(|f|) = 0 \Rightarrow g \in F$.

$(X_2\ \mathbf{R}_2\ \mu_2)$ называется расширением $(x_1, \mathbf{R}_1 \mu_1)$, если $X_1 = X_2$, $\mathbf{R}_1 \subset \mathbf{R}_2$ и $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ для $A \in \mathbf{R}_1$. (X_2, F_2, I_2) называется расширением $(X_1, F_1\, I_1)$, если $X_1 = X_2$, $F_1 \subset F_2$ и $I_1(f) = I_2(f)$ для $f \in F_1$.

1

Первое замечание касается метода рисса ([10], [11]) о расширении пространства D-интеграла (X_1, F_0, I_0) на минимальное полное σ-расширение (X, F, I), т. е. (X, F, I) является полным пространством D-интеграла, который является расширением (X, F_0, I_0) и расширением которого является всякое полное σ-пространство D-интеграла, который является расширением (X, F_0, I_0). В методе рисса ([11], стр. 132—134) понятие множества меры нуль возможно исключить следующим образом: пусть C_1' множество всех функций f, для которых существует неубывающая последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций из F_0, где $\{I_0\ (f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченый, и таких, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для всякого $x \in X$, для которого существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Множество всех разделов функций из C_1' обозначим F. Функцию I_0 возможно однозначно расширить на I так, что (X, F, I) есть пространство D-интеграла. (X, F, I) является этим минимальным полным σ-расширением (X, F_0, I_0).

2

Пусть $(X, \mathbf{R}, \mu)$ пространство меры. Пусть F_0 множество всех функций $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ числа, $\chi_{E_1} \ldots, \chi_{E_n}$ характеристические функции множеств $E_1, \ldots, E_n$, из $\mathbf{R}$, для которых $\mu(E_1) < \infty, \ldots, \mu(E_n) < \infty$. Пусть $I_0(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$, для $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \in F_0$. (X, F_0, I_0) есть пространство D-интеграла, порожденое пространством меры $(X, \mathbf{R}, \mu)$.

Пусть (X, F_1, I_1) пространство D-интеграла. Пусть M такая векторная структура функций, определенных на X, которая является минимальной системой Бэра над F_1. Пусть F^+ множество всех тех неотрицательных функций из M, для которых $\sup \{I_1(\bar{f}) : 0 \leqq \bar{f} \leqq f,\ \bar{f} \in F_1\} < \infty$. Мы определим на F^+ функцию I^+ следующим образом: для $f \in F^+$ есть $I^+(f) = \sup \{I_1(\bar{f}) : 0 \leqq \bar{f} \leqq f,\ \bar{f} \in F_1\}$. Пусть F множество всех таких функций f, что $f^+ = \max(f, 0) \in F^+$ и $f^- = -\min(f, 0) \in F^+$, положим $I(f) = I^+(f^+) - I^+(f^-)$, если $f \in F$. Известно [12], что (X, F, I) является минимальным σ-расширением (X, F_1, I_1), если (X, F_1, I_1) — пространство D-интеграла, порожденое каким нибудь σ-пространством меры $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$, где $X \in \boldsymbol{R}$.

Пример во второй заметке показывает, что (X, F, I) не должен быть всегда минимальным σ-расширением (X, F_1, I_1). Но (X, F, I) является минимальным σ-расширением, если $(X, F_1\ I_1)$ имеет следующее свойство: *пусть* $\eta > 0$, $\overline{f} \geqq 0$, $\overline{f} \in F_1$ *и* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая последовательность неотрицательных функций из* M, *для которой* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \leqq \overline{f}$. *Потом существует такая последовательность* $\{\overline{f}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *неотрицательных функций из* F_1, *что* $\overline{f}_n \leqq f_n$ *для* $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\overline{f}_0 \leqq f - \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_1(\overline{f}_n) > I_1(\overline{f}) - \eta$.

На примере показано тоже, что существует пространство D-интеграла, которое имеет свойство предшествующего абзаца и не есть порожденое σ-пространством меры.

3

Пусть $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ — пространство меры и пусть (X, F_0, I_0) — пространство D-интеграла, порожденое пространством меры $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$. Мы говорим, что (X, F, I) принадлежит к $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$, если (X, F, I) — минимальное σ-расширение или минимальное полное σ-расширение (X, F_0, I_0). В этой заметке доказано следующее утверждение:

Пусть для $i = 1, 2$ (X_i, F_i, I_i) *полное пространство* D-*интеграла, которое принадлежит* σ-*пространству меры* $(X, \boldsymbol{R}_i, \mu_i)$. *Потом* $(X_1, F_1, I_1) = (X_2, F_2, I_2)$ *тогда и только тогда, если для всякого* $A \in \boldsymbol{R}_i$, $\mu_i(A) < \infty$ $(i = 1, 2,)$ *существуют такое* B_1, $B_2 \in \boldsymbol{R}_j$ $(j = 1, 2, j \neq i)$, *что* $B_1 \subset A \subset B_2$ и $\mu_j(B_1) = \mu_i(A) = \mu_j(B_2)$.

Между всеми пространствами меры, которым принадлежит полное σ-пространство D-интеграла (X, F, I), существует максимальное $(X, \tilde{\boldsymbol{R}}, \tilde{\mu})$ в этом смысле, что оно является расширением всякого пространства меры, которому принадлежит (X, F, I). Для $\tilde{\boldsymbol{R}}$ имеет место: $\tilde{\boldsymbol{R}} = \{A : A \subset X,\ f \in F \Rightarrow f\chi_A \in F\}$.

4

Если (X, F, I)—полное σ-пространство D-интеграла, потом можно этому пространству различным образом ([3], [7], [8], [11], [14]) отнести пространство меры $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ так, что имеет место: если (X, F, I) принадлежит какому-нибудь пространству меры, принадлежит оно тоже пространству меры $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$. В четвертой заметке описан другой способ этого соответствиа а то и в том случае, когда (X, F, I) не является полным σ-пространством D-интеграла.

Доказано: *пусть* (X, F, I) — *пространство* D-*интеграла. Пусть* $\boldsymbol{R} = \{A : A \subset X,\ f \in F \Rightarrow f\chi_A \in F\}$ *и пусть* μ_1 *и* μ_2 *функции определенные на* $\boldsymbol{R}$ *следующим образом:* $\mu_1(A) = \sup\{I(f) : 0 \leqq f \leqq \chi_A, f \in F\}$ и $\mu_2(A) = \inf\Big\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} I(f_n) : \chi_A \leqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n,\ f_n \geq 0,\ f_n \in F$ *для* $n = 1, 2, 3, \ldots\Big\}$ *для* $A \in \boldsymbol{R}$. *Потом* $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1)$ и $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ *являются пространствами меры*. Если (X, F, I) — σ-пространство D-интеграла $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1)$ и $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ тоже являются σ-пространствами меры. Дальше имеет место: (X, F, I) является полным σ-пространством D-интеграла тогда и только тогда, когда $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ является полным σ-пространством меры. В этом утверждении невозможно заменить $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ с $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1)$. Для того, что бы имело место $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1) = (X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$, необходимо и достаточно: $A \in \boldsymbol{R}$, $\mu_1(A) < \infty \Rightarrow \chi_A \in F$, если (X, F, I) — полное σ-пространство D-интеграла.

Если (X, F, I) является σ-пространством D-интеграла, можно для $A \subset X$ определить: $\mu_2^*(A) = \inf\{I(f) : \chi_A \leqq f, f \in F\}$ и $\mu_{1*}(A) = \sup\{I(f) : 0 \leqq f \leqq \chi_A, f \in F\}$. Функция μ_2^* — внешняя мера на системе всех подмножеств множества X и μ_{1*}-внутренняя мера на системе всех подмножеств множества X. Между μ_2^*-измеримыми множествами и между $\boldsymbol{R}$ имеет место соотношение: *пусть* (X, F, I) — *полное* σ-*пространство* D-*интеграла. Потом множество* A *является* μ_2^*-*измеримым тогда и только тогда, когда* $A \in \boldsymbol{R}$.

Если (X, F, I) пространство D-интеграла, порожденое пространством меры, потом пространство D-интеграла, порожденое пространством меры $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$, или пространство D-интеграла, порожденое пространством меры $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1)$, является расширением (X, F, I). Если (X, F, I) — σ-пространство D-интеграла, пороженое некоторым пространством меры, потом (X, F, I) является тождественным с пространством D-интеграла, порожденым пространством меры $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$.

Интересны ещё следующие теоремы четвертой заметки, которые являются аналогиями некоторых теорем Т. Стона из [14]:

Пусть (X, F, I) — σ-*пространство* D-*интеграла, для которого имеет место:* $f \in F \Rightarrow \Rightarrow \min(f, 1) \in F$. *Пусть* $A \subset X$ и $\chi_A \in F$, *потом* $A \in \boldsymbol{R}$.

Пусть (X, F, I) — σ-*пространство* D-*интеграла. Потом всякая функция* $f \in F$ *является* $(X, \boldsymbol{R})$ — *измеримой тогда и только тогда, когда имеет место:* $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$.

Пусть (X, F, I) — σ-*пространство* D-*интеграла. Потом* (X, F, I) *принадлежит некоторому пространству меры тогда и только тогда, когда имеет место:* $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$. *В этом случае* (X, F, I) *принадлежит тоже к* $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$.

В последной теореме невозможно заменить $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ с $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1)$.

Описаный способ соответствия между пространством меры $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ и пространством D-нитеграла дает возможность определить неопределенный интеграл $I_A(f)$ для $A \in \boldsymbol{R}$ и $f \in F$ следующим образом: $I_A(f) = I(f\chi_A)$. Этот неопределенный интеграл абсолютно непрерывный относительно μ_2, но он не должен быть абсолютно непрерывный относительно μ_1.

EINIGE BEMERKUNGEN ZUR MASS- UND INTEGRALTHEORIE

LADISLAV MIŠÍK

Zusammenfassung

$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ nennen wir den Raum (σ-Raum) des Maßes, wenn $\boldsymbol{R}$ ein Ring (σ-Ring) der Untermengen der Menge X ist und wenn μ ein Maß am X ist. (X, F, I) nennen wir den Raum des D-Integrals, wenn F ein Vektorverband der reellen Funktionen ist, die auf der Menge X definiert sind, und I eine reelle homogene additive, nichtnegative und in 0 monoton von oben stetige Funktionale ist, die auf dem Vektorenverband F definiert ist. Der Raum des D-Integrals (X, F, I), für welchen gilt: der Grenzwert jeder solcher nichtfallender Folge $\{(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ der Funktionen aus F, für welche $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist, gehört zu F, nennt man σ-Raum des D-Integrals. Der Raum des D-Integrals (X, F, I) ist vollständig, wenn $f \in F$, $|g| \leqq |f|$, $I(|f|) = 0 \Rightarrow g \in F$ gilt.

$(X_2, \boldsymbol{R}_2, \mu_2)$ ist eine Erweiterung von $(X_1, \boldsymbol{R}_1, \mu_1)$, wenn $X_1 = X_2$, $\boldsymbol{R}_1 \subset \boldsymbol{R}_2$ und $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ für $A \in \boldsymbol{R}_1$ ist. (X_2, F_2, I_2) ist eine Erweiterung von (X_1, F_1, I_1), wenn $X_1 = X_2$, $F_1 \subset F_2$ und $I_1(f) = I_2(f)$ für $f \in F_1$ ist.

1

Die erste Bemerkung bezieht sich auf die von F. Riesz stammenden Methoden ([10], [11]) der Erweiterung des Raumes des D-Integrals (X, F_0, I_0) auf die minimale vollständige σ-Erweiterung (X, F, I), das heißt (X, F, I) ist ein vollständiger σ-Raum des D-Integrals, welcher eine Erweiterung von (X, F_0, I_0) ist und dessen Erweiterung ein jeder

vollständiger σ-Raum des D-Integrals, ist, welcher die Erweiterung von (X, F_0, I_0) bedeutet.

In der Methode von F. Riesz ([11], Seite 132—134) können wir den Begriff der Nullmengen folgend eliminieren: Sei C_1' die Menge aller Funktionen f, für welche eine nichtfallende Folge $\{(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ der Funktionen aus F_0 existiert, wobei $\{I_0(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ begrenzt ist, so daß $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in X$, für welches $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert. Die Menge aller Differenzen der Funktionen aus C_1' bezeichnen wir als F. Die Funktion I_0 ist möglich eindeutig so auf I zu erweitern, daß (X, F, I) die kleinste vollständige σ-Erweiterung von (X, F_0, I_0) ist.

2

Sei $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ ein Raum des Maßes. Sei F_0 die Menge aller Funktionen $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Zahlen sind, $\chi_{E_1}, \ldots, \chi_{E_n}$ charakteristische Funktionen der Mengen $E_1, \ldots, E_n$ aus $\boldsymbol{R}$ mit den Eigenschaften $\mu(E_1) < \infty, \ldots, \mu(E_n) < \infty$ sind. Sei $I_0(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$ für $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \in F_0$. (X, F_0, I_0) ist der Raum des D-Integrals induziert durch den Raum des Maßes $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$.

(X, F_1, I_1) sei der Raum des D-Integrals. M sei so ein Vektorverband der Funktionen die auf X definiert sind, welcher das kleinste Bairesystem über F_1 ist.

F^+ sei die Menge aller jener nichtnegativen Funktionen f aus M, für welche gilt: $\sup \{I_1(\bar{f}) : 0 \leqq \bar{f} \leqq f, \bar{f} \in F_1\} < \infty$. Definieren wir auf F^+ die Funktion I^+ folgend: für $f \in F^+$ ist $I^+(f) = \sup \{I_1(\bar{f}) : 0 \leqq \bar{f} \leqq f, \bar{f} \in F_1\}$. F sei die Menge aller solcher Funktionen, daß $f^+ = \max(f, 0) \in F^+$ und $f^- = -\min(f, 0) \in F^+$.

Setzen wir $I(f) = I^+(f^+) - I^+(f^-)$, wenn $f \in F$ ist. *Es ist bekannt* ([12]), *daß* (X, F, I) *die kleinste σ-Erweiterung von* (X, F_1, I_1) *ist, wenn* (X, F_1, I_1) *der Raum des* D-*Integrals, induziert durch einen σ-Raum des Maßes* $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ *ist, wobei* $X \in \boldsymbol{R}$ *ist.*

Das Beispiel in der zweiten Bemerkung zeigt, daß (X, F, I) nicht immer die kleinste σ-Erweiterung von (X, F_1, I_1) sein muß, aber (X, F, I) ist bestimmt die kleinste σ-Erweiterung von (X, F_1, I_1), wenn (X, F_1, I_1) die folgende Eigenschaft hat: *Sei* $\eta > 0$, $\bar{f} \geqq 0$, $\bar{f} \in F_1$ *und* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *so eine Folge nichtnegativer Funktionen aus* M, *für welche* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq \bar{f}$ *gilt. Dann existiert so eine Folge* $\{\bar{f}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *nichtnegativer Funktionen aus* F_1, *daß folgendes gilt:* $\bar{f}_n \leqq f_n$ *für* $n = 1, 2, 3, \ldots, \bar{f}_0 \leqq \bar{f} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} I_1(\bar{f}_n) > I_1(\bar{f}) - \eta$.

Auf einem Beispiel wurde gezeigt, daß ein Raum des D-Integrals existiert, welcher die Eigenschaft des vorigen Absatzes hat und nicht durch den σ-Raum des Maßes induziert ist.

3

$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ sei ein Raum des Maßes und (X, F_0, I_0) sei ein Raum des D-Integrals, induziert durch den Raum des Maßes $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$. Sagen wir, daß (X, F, I) zu $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ gehört, wenn (X, F, I) die kleinste σ-Erweiterung oder die kleinste vollständige Erweiterung von (X, F_0, I_0) ist. In der dritten Bemerkung ist zuerst die folgende Behauptung:

Für $i = 1, 2$ *sei* (X_i, F_i, I_i) *ein vollständiger σ-Raum des* D-*integrals, welcher zu dem σ-Raum des Maßes* $(X_i, \boldsymbol{R}_i, \mu_i)$ *gehört. Dann ist* $(X_1, F_1, I_1) = (X_2, F_2, I_2)$ *dann und nur dann, wenn zu jedem* $A \in \boldsymbol{R}_i$, $\mu_i(A) < \infty$ $(i = 1, 2)$ $B_1, B_2 \in \boldsymbol{R}_j$ $(j = 1, 2, j \neq i)$ *existiert, so daß* $B_1 \subset A \subset B_2$ *und* $\mu_j(B_1) = \mu_i(A) = \mu_j(B_2)$ *ist.*

Zwischen allen Räumen des Maßes, zu welchen der vollständige σ-Raum des D-Integrals (X, F, I) gehört, existiert ein größter $(X, \tilde{\boldsymbol{R}}, \tilde{\mu})$ in dem Sinne, daß er die Erweiterung jedes Raumes des Maßes bedeutet, zu welchem (X, F, I) gehört. Für $\tilde{\boldsymbol{R}}$ gilt: $\tilde{\boldsymbol{R}} = \{A : A \subset X, f \in F \Rightarrow f\chi_A \in F\}$.

Wenn (X, F, I) ein vollständiger σ-Raum des D-Integrals ist, dann ist es möglich verschiedenerweise ([3], [7], [8], [11], [14]) einen Raum des Maßes $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ ihm so zuzufügen, daß folgendes gilt: Wenn (X, F, I) zu irgendeinem Raum des Maßes gehört, dann gehört es auch zu dem Raum des Maßes $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$.

In der vierten Bemerkung ist eine andere Art der Definition so eines Raumes des Maßes beschrieben, und zwar auch in solchem Fall, wenn (X, F, I) nicht ein vollständiger σ-Raum des D-Integrals ist.

Diese Art ist: *Sei* (X, F, I) *ein Raum des* D-*Integrals. Sei* $\boldsymbol{R} = \{A : A \subset X,\ f \in F \Rightarrow f\chi_A \in F\}$ *und* μ_1 *und* μ_2 *seien folgend auf* $\boldsymbol{R}$ *definierte Funktionen*: $\mu_1(A) = \sup \{I(f) : 0 \leqq f \leqq \chi_A, f \in F\}$ *und* $\mu_2(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n) : \chi_A \leqq \sum_{n=1}^{\infty} f_n, f_n \geqq 0, f_n \in F \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$ *für* $A \in \boldsymbol{R}$.
Dann sind $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1)$ und $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ die Räume des Maßes. Wenn (X, F, I) sogar ein σ-Raum des D-Integrals ist, dann sind auch $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1)$ und $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ σ-Räume des Maßes. Weiter gilt: (X, F, I) ist ein vollständiger σ-Raum des D-Integrals dann und nur dann, wenn $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ ein vollständiger σ-Raum des Maßes ist. In dem Falle können wir nicht $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ und $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1)$ ersetzen.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Geltung der Gleichheit $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1) = (X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ *ist die folgende Bedingung* $A \in \boldsymbol{R},\ \mu_1(A) < \infty \Rightarrow \chi_A \in F$.

Wenn (X, F, I) ein σ-Raum des D-Integrals ist, dann können wir μ_2^* und μ_{1*} für $A \subset X$ folgend definieren: $\mu_2^*(A) = \inf \{I(f) : \chi_A \leqq f, f \in F\}$ und $\mu_{1*}(A) = \sup \{I(f) : 0 \leqq f \leqq \chi_A, f \in F\}$.

Die Funktion μ_2^* ist ein äußeres Maß auf dem System aller Untermengen der Menge X und μ_{1*} ein inneres Maß auf dem System aller Untermengen der Menge X. Zwischen den μ_2^*-meßbaren Mengen und zwischen $\boldsymbol{R}$ gibt es die Beziehung, welche durch folgenden Satz ausgedrückt wird: *Sei* (X, F, I) *ein vollständiger* σ-*Raum des* D-*Integrals. Dann ist* A *eine* μ_2^*-*meßbare Menge dann und nur dann, wenn* $A \in \boldsymbol{R}$ *ist.*

Wenn (X, F, I) ein Raum des D-Integrals induziert durch einen Raum des Maßes ist, dann ist der Raum des D-Integrals induziert durch den Raum des Maßes $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$, resp. der Raum des D-Integrals induziert durch den Raum des Maßes $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1)$, eine Erweiterung von (X, F, I).

Wenn aber (X, F, I) *sogar ein* σ-*Raum des* D-*Integrals, induziert durch einen Raum des Maßes ist, dann stimmt* (X, F, I) *mit dem Raum des* D-*Integrals überein, induziert durch den Raum des Maßes* $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$.

Interessant sind noch die Sätze der vierten Bemerkung, welche bestimmte Analogien von irgend welchen Behauptungen von H. Stone aus [14] sind. Es sind:

Sei (X, F, I) *ein* σ-*Raum des* D-*Integrals, für welchen gilt:* $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$. *Es sei* $A \subset X$ *und* $\chi_A \in F$, *dann ist* $A \in \boldsymbol{R}$.

Sei (X, F, I) *ein* σ-*Raum des* D-*Integrals. Dann ist jede Funktion* $f \in F$ $(X, \boldsymbol{R})$-*meßbar dann und nur dann, wenn folgendes gilt:* $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$.

Sei (X, F, I) *ein* σ-*Raum des* D-*Integrals. Dann gehört er zu einem Raum des Maßes dann und nur dann, wenn für ihn folgendes gilt:* $f \in F \Rightarrow \min(f, 1) \in F$. *In dem Falle gehört* (X, F, I) *auch zu* $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$.

Im letzten Satz können wir nicht $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ mit $(X, \boldsymbol{R}, \mu_1)$ ersetzen.

Die hier beschriebene Art der Definition des Raumes des Maßes $(X, \boldsymbol{R}, \mu_2)$ gibt uns die Möglichkeit den unbestimmten Integral $I_A(f)$ für $A \in \boldsymbol{R}$ und $f \in F$ folgend zu definieren: $I_A(f) = I(f\chi_A)$. Dieses unbestimmte Integral ist absolut stetig in Beziehung auf μ_2, muß aber nicht absolut stetig in Beziehung auf μ_1 sein.