Matematicko-fyzikálny časopis

Ernest Jucovič; Ján Lešo

Eine Bemerkung zur Überdeckung der Ebene durch inkongruente Kreise

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 16 (1966), No. 4, 324--328

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126984`

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

EINE BEMERKUNG ZUR ÜBERDECKUNG DER EBENE DURCH INKONGRUENTE KREISE

ERNEST JUCOVIČ, Košice, JÁN LEŠO, Prešov

Gegeben sei eine Menge von Kreisen $\{K_i\}$, die die Ebene überdecken, d. h. ein jeder Punkt der Ebene gehört wenigstens einem Kreis des Systems $\{K_i\}$. Als die Dichte der Überdeckung der Ebene durch die Kreismenge $\{K_i\}$ ist die Zahl

$$A = \lim_{r\to\infty} \frac{\Sigma K_i \cap K(r)}{K(r)}$$

definiert, wo $K(r)$ einen Kreis der Ebene mit dem Halbmesser r bedeutet. (Für den Kreis und seinen Inhalt benützen wir dasselbe Symbol.) Gesucht wird die minimale Dichte $D(q)$ der Überdeckung der Ebene durch Kreise, deren Halbmesser aus dem abgeschlossenen Interval $\langle q; 1\rangle$ sind.

Für $q = 1$ ist die Lösung dieses Problems schon länger bekannt (s. L. Fejes-Tóth [1]). J. Molnár [5] vermutet eine untere Schranke der $D(q)$ für alle mögliche q und gibt eine obere Schranke der $D(q)$ für q aus dem Interval $\langle 0,18; 1\rangle$ an. (S. auch L. Fejes-Tóth [2] und J. Molnár—A. Heppes [6].) Weitere Ergebnisse stammen von A. Florian [3], [4]. In der vorliegenden Bemerkung bringen wir eine obere Schranke der $D(q)$ für kleinere q als bei J. Molnár [5] erwähnt wird; dabei werden die überdeckenden Kreise dreierlei Halbmesser haben. (Bei den Überdeckungen von J. Molnár haben die Kreise nur zwei verschiedene Halbmesser.)

Es gilt

$$(1) \qquad D(q) \leq \frac{\pi}{2\,.\,(12 + 7\sqrt{3})} \cdot \left(9r^2 - 6r + \frac{32 + 12\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\text{wo } r = \frac{-q^2 + q\,.\,\sqrt{4(2 + \sqrt{3}) - (7 + 4\sqrt{3})q^2}}{1 - q^2}$$

für q aus dem Interval $\langle 0,088; 0,137\rangle$ und

$$D(q) \leqq \frac{\pi}{2\,.\,(3+2\,.\,\sqrt{2})}\cdot(3r^2-2r+3+\sqrt{2}), \tag{2}$$

wo $r = \dfrac{-q^2+q\sqrt{2(2+\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})\,.\,q^2}}{1-q^2}$

für q aus dem Interval $\langle 0{,}137;\ 0{,}169\rangle$.

Die Schranke (1) wird mit Hilfe der archimedischen Mosaik (3, 12, 12) erzielt. (S. Abb. 1.) Die Mittelpunkte der überdeckenden Kreise sind die In-

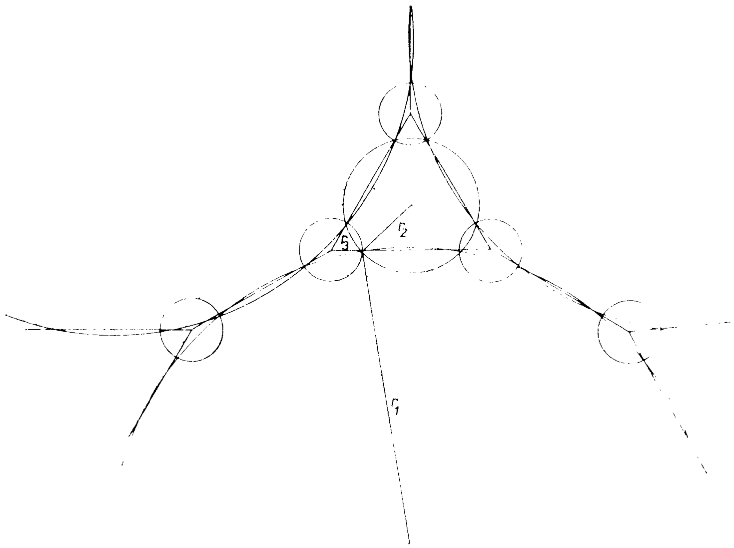

Abb. 1a.

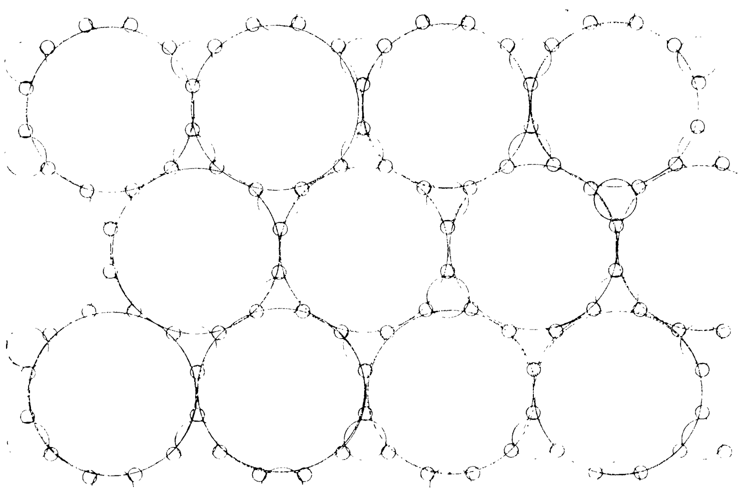

Abb. 1b.

kreismittelpunkte der regulären Drei- und Zwölfecke (die überdeckenden Kreise mit diesen Mittelpunkten sollen Halbmesser r_1, r_2 haben) und die Eckpunkte der Mosaik (r_3 sei der Halbmesser dieser Kreise). Zu gegebenen r_3 werden solche minimale Werte r_1, r_2 gewählt, bei denen die Ebene noch überdeckt wird. Verschiedene q erhalten wir, wenn sich r_3 ändert; dabei ist $q = \frac{r_2}{r_1}$. Wenn q im Interval $\langle 0{,}088;\ 0{,}137 \rangle$ stätig abnimmt, dann nimmt auch die dazu gehörende Überdeckungsdichte im Interval $\langle 1{,}0805..;\ 1{,}0998.. \rangle$ ab.

Die Schranke (2) wird auf analoge Weise mit Hilfe der archimedischen

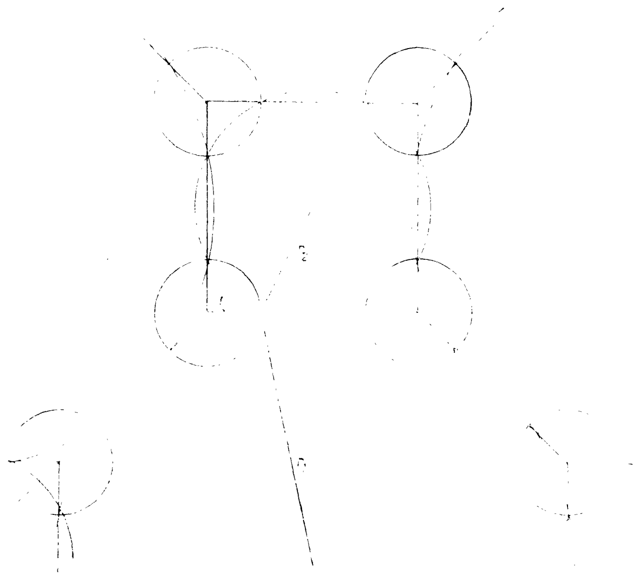

Abb. 2a

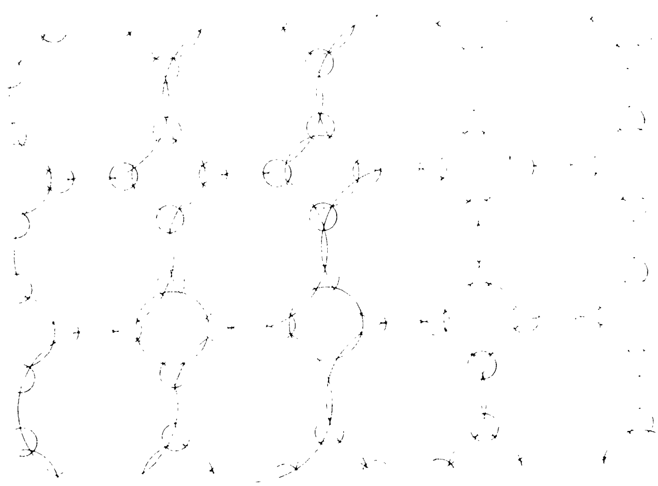

Abb. 2b.

Mosaik (4, 8, 8) erzielt. (S. Abb. 2.) Auch hier sind die Mittelpunkte der überdeckenden Kreise die Inkreismittelpunkte der regulären Polygone und die Eckpunkte der Mosaik. Wenn q im Interval $\langle 0{,}137;\ 0{,}169\rangle$ abnimmt, ist die dazugehörende Überdeckungsdichte im Interval $\langle 1{,}0998..;\ 1{,}1058..\rangle$ abnehmend.

Übersichtshalber bringen wir auf Abb. 3 eine grafische Darstellung der oberen und unteren Schranke für $D(q)$ aus J. Molnár [5] und dieser Bemerkung. Sie ist großenteils [5] entnommen. (s stellt die vermutete untere, Δ die obere Schranke dar.)

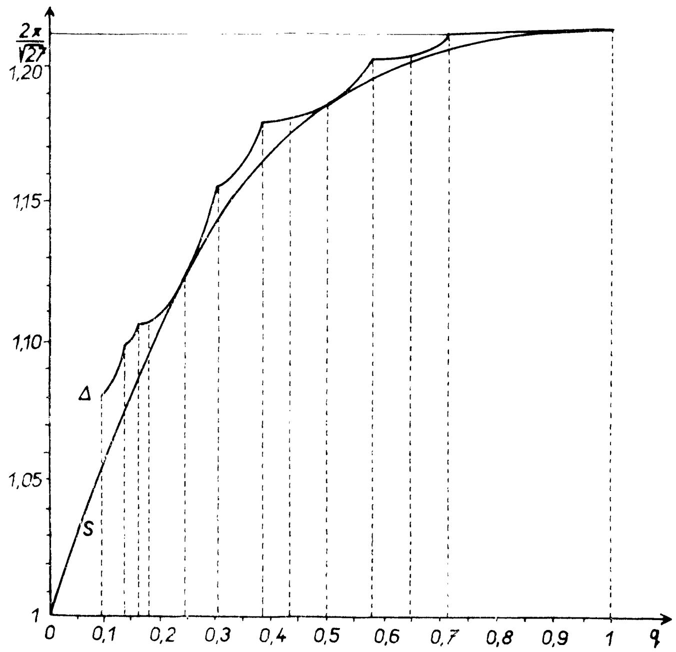

Abb. 3.

Zu Ende sei noch bemerkt: 1. Wir haben festgestellt, dass wenn die archimedischen Mosaiken (3, 4, 6, 4), (4, 6, 12), (3, 6, 3, 6) zur Überdeckung der Ebene auf dieselbe Weise benützt werden, wie wir es oben mit den Mosaiken (3, 12, 12), (4, 8, 8) getan haben, dann werden nicht bessere Abschätzungen erreicht wie bei J. Molnár [5] und in (1), (2).

2. Die Mosaiken (3, 12, 12), (4, 8, 8) können auf gewisse Art auch zur Unterdeckung der Ebene vorteilhaft benützt werden. (Bei der Unterdeckung gehört ein jeder Punkt der Ebene höchstens einem Kreis des Systems $\{K_i\}$ an.) Hier besteht das Problem darin Unterdeckungen mit maximaler Dichte zu bestimmen. Die bessten erzielten Unterdeckungsdichten sind 0,97618.. für $q = 0{,}0628$ bei derMosaik (3, 12, 12) und 0,9569.. für $q = 0{,}1082$ bei der Mosaik (4, 8, 8).

LITERATUR

[1] Fejes-Tóth L., *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953.

[2] Fejes-Tóth L., *Regular Figures*, Budapest—New York 1964.

[3] Florian A., *Überdeckung der Ebene durch Kreise*, Rend. Semin. mat. Univ. Padova *31* (1961), 77—86.

[4] Florian A., *Zum Problem der dünnsten Kreisüberdeckung der Ebene*, Acta mat. Acad. scient. hung. *12* (1962), 397—400.

[5] Molnár J., *Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise*, Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math. *2* (1959), 33—40.

[6] Heppes A., Molnár J., *Újabb eredmények a diszkrét geometriában* I. Mat. Lapok *11* (1960), 330—355.

Eingegangen am 4. 8. 1965.

Katedra algebry a geometrie
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity P. J. Šafárika,
Košice

Katedra matematiky
Pedagogickej fakulty
Univerzity P. J. Šafárika,
Prešov