Viliam Chvál

Príspevok k teórii priestorových determinantov

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 3, 224--233

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126939`

Matematický časopis 17 (1967), No. 3

PRÍSPEVOK K TEÓRII PRIESTOROVÝCH DETERMINANTOV

VILIAM CHVÁL, Košice

V monografii [3] je definovaný determinant priestorovej matice ľubovoľnej signatúry formálnym spôsobom, ktorý je zovšeobecnením známej definície determinantu obyčajnej matice. Definícia determinantu priestorovej matice v tomto článku je zovšeobecnením definície v [1], ktorá je viac „geometrická" a ukazuje úzky súvis teórie priestorových determinantov s tenzorovou a vonkajšou algebrou.

V § 1, 2, ktoré sú úvodné, sú uvedené pojmy a niektoré vety z vonkajšej algebry, ktoré sa používajú ďalej. § 3, 4, 5, ktoré tvoria jadro práce, obsahujú konštrukciu a dôkaz niektorých vlastností algebry $E^T(M)$, ktorá má v tejto práci takú úlohu, ako vonkajšia algebra v teórii v [1], definíciu determinantu priestorovej matice a dôkaz vlastností, ktoré charakterizujú determinant ako formu a dôkazy dvoch geometrických vlastností minorov priestorovej matice.

1. Najprv uvedieme niektoré pojmy, ktoré budeme ďalej používať [2].

Graduovaná algebra (ďalej len g-algebra) A nad telesom K je systém $\{A_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ K-modulov A_n s prvkom $1 \in A_0$ a funkciou, ktorá každej dvojici (x, y) $(x \in A_n, y \in A_m)$ priraďuje súčin $x \,.\, y \in A_{n+m}$, ktorý je bilineárny, asociatívny a $1 \,.\, x = x \,.\, 1 = x$ pre všetky x.

Homomorfizmus g-algebry A do g-algebry A' je zobrazenie $f : A$ do A' také, že: $f(x + y) = fx + fy$, $f(x \,.\, y) = fx \,.\, fy$, $f(\alpha x) = \alpha fx$, $f1 = 1'$ a pre $x \in A_n$ platí $fx \in A'_n$.

Zrejmým spôsobom sa definuje izomorfizmus medzi dvoma g-algebrami.

G-ideál I algebry A je g-podmodul taký, že $IA \subset I$, $AI \subset I$. Potom systém A_n/I_n je g-algebra — faktoralgebra algebry A a prirodzené zobrazenie A na A/I je g-homomorfizmus.

Tenzorová algebra $T(M)$ K-modulu M je g-algebra $\{T_n(M)\}$, kde $T_0(M) = K$ a $T_n(M) = M^n = M \otimes M \otimes \dots \otimes M$ a súčin v $T(M)$ je definovaný takto:

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_n.$$

Kartézsky súčin $A \times B$ g-algebier A a B je g-algebra $\{(A \times B)_n\}$, kde $(A \times B)_n = A_n \otimes B_n$ a pre $x_n \otimes y_n \in A_n \otimes B_n$ a $x_m \otimes y_m$ z $A_m \otimes$

$\otimes B_m : (x_n \otimes y_n) . (x_m \otimes y_m) = (x_n . x_m) \otimes (y_n . y_m)$. Zrejme je to prvok z $(A \times B)_{n+m}$.

2. V tomto odseku uvedieme konštrukciu a niektoré vlastnosti (bez dôkazu) algebier $E^t(V)$. Pre $E^1(V)$ detailné dôkazy sú v [1]; pre $E^0(V)$ sú dôkazy celkom analogické, a preto ich neuvádzame. V je K-modul s konečnou bázou $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots n$. V g-algebre $T(V)$ nech pre $t = 0, 1$ je $N^t(V)$ g-ideál vytvorený prvkami $e_i \otimes e_i$ a $e_i \otimes e_j - (-1)^t e_j \otimes e_i$ pre $i = 1, 2, \dots n$. G-algebra $E^t(V) = T(V)/N^t(V)$ je t-vonkajšia algebra modulu V. Pre $t = 1$ je to obvyklá vonkajšia algebra. Kanonický homomorfizmus $T(V)$ na $E^t(V)$ označme ψ^t_V a $\psi^t_V(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$ nazvime t-vonkajší súčin $x_1, \dots x_n$. (Rovnaké označenie pre $t = 0$ i $t = 1$ nepovedie k nedorozumeniu.) Uvedieme niektoré vlastnosti, ktoré ďalej použijeme.

$E^1(V)$ nezávisí od voľby bázy vo V a konštrukcia $E^0(V)$ pre rôzne bázy vo V vedie k izomorfným algebrám.

Modul $E^t_p(V)$ má bázu tvorenú prvkami $e_H = e_{h_1} \wedge \dots \wedge e_{h_p}$, kde $H = \{h_1, \dots h_p\}$ sú všetky podmnožiny množiny N mohutnosti p.

Algebra $E^t(V)$ je t-komutatívna, t. j. pre $x \in E^t_p(V)$, $y \in E^t_q(V)$ $x . y = (-1)^{pqt} y . x$. Ďalej, pre $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_p \in T_p(V)$ a pre ľubovoľnú permutáciu $\sigma \in S_p$ $x_{\sigma 1} \wedge \dots \wedge x_{\sigma p} = (\operatorname{sgn} \sigma)^t x_1 \wedge \dots \wedge x_p$.

Pre $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_p \in T_p(V)$ a $\sigma \in S_p$ označme $\sigma x = x_{\sigma 1} \otimes \dots \otimes x_{\sigma p}$. Pre $e = e_{h_1} \otimes \dots \otimes e_{h_p}$ nech $a_t e = \sum_{\sigma \in S_p} (\operatorname{sgn} \sigma)^t \sigma e$, ak všetky h_i sú navzájom rôzne; v opačnom prípade nech $a_t e = 0$. a_t možno zrejmým spôsobom rozšíriť do zobrazenia $T_p(V)$ na seba. Pre $x \in T_p(V)$ tenzor $a_t x$ nazvime t-symetrizáciou tenzora x. Je známe, že pre $x \in N^t_p(V)$ $a_t x = 0$.

Ak u je lineárne zobrazenie V do V', existuje jediný g-homomorfizmus $E^1 u : E^1(V)$ do $E^1(V')$ taký, že pre $x_j \in V$ $E^1 u(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = ux_1 \wedge \dots \wedge ux_p$.

3. Konečnú postupnosť $T = \{t_1, \dots, t_k\}$, kde $t_i = 0{,}1$, budeme nazývať signatúra. Pre danú signatúru T nech $\sum T = t = 0$, ak $\sum_{i=1}^{k} t_i$ je párne číslo, $\sum T = t = 1$, ak $\sum_{i=1}^{k} t_i$ je nepárne. $V_1, \dots V_k$ nech sú K-moduly s bázami $\{e^i_j\}$ $(i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, n)$. Označme $M = V_1 \otimes \dots \otimes V_k$, a $\mathcal{T} = T(V_1) \times \dots \times T(V_k)$ nech je kartézsky súčin algebier $T(V_i)$. Existuje kanonický izomorfizmus φ algebry $T(M)$ na $\mathcal{T}$ definovaný takto: nech $x = (x^1_1 \otimes \dots \otimes x^k_1) \otimes \dots \otimes (x^1_p \otimes \dots \otimes x^k_p) \in T_p(M)$. Položme $\varphi x = (x^1_1 \otimes \otimes \dots \otimes x^1_p) \otimes \dots \otimes (x^k_1 \otimes \dots \otimes x^k_p)$. φx zrejme patrí do $\mathcal{T}_p$. φ lineárne rozšírime na g-izomorfizmus algebry $T(M)$ na $\mathcal{T}$.

Ďalej nech $E^T = E^{t_1}(V_1) \times \dots \times E^{t_k}(V_k)$ a Γ^T_p nech je podmodul $\mathcal{T}_p$ vytvorený tenzormi $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$, kde aspoň jedno $x_i \in N^{t_i}_p(V_i)$. Nech ψ_p je kanonický homomorfizmus $\mathcal{T}_p$ na $\mathcal{T}_p/\Gamma^T_p$.

Potom existuje [1] izomorfizmus $\omega_p : T_p/\Gamma_p^T$ na E_p^T taký, že $\omega_p\psi_p(y_1 \otimes \dots \otimes \otimes y_k) = \psi_{V_1}y_1 \otimes \dots \psi_{V_k}y_k$.
Naviac platí

Veta 1. *$\Gamma^T = \{\Gamma_p^T\}$ je g-ideál g-algebry T a faktoralgebra T/Γ^T je izomorfná s algebrou E^T.*

Dôkaz. Nech $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k$ je generátor Γ_p^T, x_i patrí do $N_p^{t_i}(V_i)$ a $y = y_1 \otimes \dots \otimes y_k \in T_q$. Potom $x \,.\, y = (x_1 \,.\, y_1) \otimes \dots \otimes (x_i \,.\, y_i) \otimes \dots \otimes \otimes (x_k \,.\, y_k)$. $x_i \,.\, y_i$ patrí do $N_{p+q}^{t_i}(V_i)$, a preto $x \,.\, y$ patrí do Γ_{p+q}^T. Pretože každé $y \in T_q$ sa dá vyjadriť ako súčet rozložiteľných prvkov, prvé tvrdenie je dokázané. O zobrazení $\omega = \{\omega_p\}$ treba dokázať, že zachováva súčin. Nech $y_1 \otimes \otimes \dots \otimes y_k$ patrí do T_p a $z_1 \otimes \dots \otimes z_k \in T_q$. Potom: $\omega[\psi_p y \,.\, \psi_q z] = = \omega\psi_{p+q}(y \,.\, z) = \omega\psi_{p+q}(y_1 \,.\, z_1 \otimes \dots \otimes (y_k \,.\, z_k)) = \psi_{V_1}(y_1 z_1) \otimes \dots \otimes \otimes \psi_{V_k}(y_k z_k) = \psi_{V_1}y_1 \,.\, \psi_{V_1}z_1 \otimes \dots \otimes \psi_{V_k}y_k \,.\, \psi_{V_k}z_k = (\psi_{V_1}y_1 \otimes \dots \otimes \otimes \psi_{V_k}y_k) \,.\, (\psi_{V_1}z_1 \otimes \dots \otimes \psi_{V_k}z_k) = \omega_p\psi_p(y_1 \otimes \dots \otimes y_k)\omega_q\psi_q(z_1 \otimes \dots \otimes z_k) = = \omega\psi_p y \,.\, \omega\psi_q z$.

Nech N^T je taký g-ideál v $T(M)$, že $\varphi(N^T) = \Gamma^T$.

Definícia 1. *Faktor-algebra $E^T(M) = T(M)/N^T$ je T-vonkajšia algebra modulu M.*

Kanonický homomorfizmus $T(M)$ na $E^T(M)$ označme ψ_M^T. Pre $x_1, \dots x_p$ z M označme $\psi_M^T(x_1 \otimes \dots \otimes x_p) = x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ a nazvime T-vonkajší súčin $x_1, \dots x_p$. Uvedieme niektoré vlastnosti g-algebry $E^T(M)$.

Bezprostredne z definície algebry $E^T(M)$ vyplýva, že je izomorfná s algebrou T/Γ^T a teda s $E^T = E^{t_1}(V_1) \times \dots \times E^{t_k}(V_k)$. Označme tento izomorfizmus π.

Veta 2. *Ak $\sum T = 1$, existuje homomorfné zobrazenie $\varepsilon : E^1(M)$ na $E^T(M)$ také, že nasledujúci diagram je komutatívny:*

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[d, "\psi^1"'] \arrow[dr, "\psi^T"] & \\ E^1(M) \arrow[r, "\varepsilon"'] & E^T(M) \end{tikzcd}$$

Dôkaz. Treba dokázať, že zobrazenie ψ^T sa anuluje na N^1, t. j. že $N^1 \subset \subset N^T$. N^1 je vytvorený prvkami $x = e_I \otimes e_I$ a $y = e_I \otimes e_J + e_J \otimes e_I$, kde $e_I = e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k$ a $e_J = e_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{j_k}^k$. $x, y \in N^T$ práve vtedy, ak φx, $\varphi y \in \Gamma^T$. Pre φx je to triviálne. Pre φy platí:

$$[\psi_{V_1}^{t_1} \otimes \dots \otimes \psi_{V_k}^{t_k}]\varphi y = [\psi_{V_1}^{t_1} \otimes \dots \otimes \psi_{V_k}^{t_k}]\,[(e_{i_1}^1 \otimes e_{j_1}^1) \otimes \dots \otimes (e_{i_k}^k \otimes e_{j_k}^k) + \\ + (e_{j_1}^1 \otimes e_{i_1}^1) \otimes \dots \otimes (e_{j_k}^k \otimes e_{i_k}^k)] = (e_{i_1}^1 \wedge e_{j_1}^1) \otimes \dots \otimes (e_{i_k}^k \wedge e_{j_k}^k) + \\ + (-1)^{t_1} e_{i_1}^1 \wedge e_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes (-1)^{t_k} e_{i_k}^k \wedge e_{j_k}^k = 0.$$

Preto $\omega_p\psi_p\varphi y = 0$, teda $\psi_p\varphi y = 0$, odkiaľ vyplýva, že $\varphi y \in \Gamma^T$.

Nech u je lineárne zobrazenie V do M, Tu ním indukované zobrazenie $T(V)$ do $T(M)$. Ak $\sum T = 1$, je potom podľa predchádzajúcej vety nasledujúci diagram komutatívny:

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "Tu"] \arrow[d, "\psi_V^1"'] & T(M) \arrow[d, "\psi_M^1"'] \arrow[dr, "\psi_M^T"] & \\ E^1(V) \arrow[r, "E^1u"] & E^1(M) \arrow[r, "\varepsilon"'] & E^T(M) \end{tikzcd}$$

Zobrazenie $\varepsilon E^1 u$ označme $E^T u$ a nazvime T-vonkajšou mocninou zobrazenia u. Teda platí:

Veta 3. *Nech u je lineárne zobrazenie V do M a $\sum T = 1$. Existuje lineárne zobrazenie $E^T u : E^1(V)$ do $E^T(M)$ také, že pre $x_i \in V : E^T u\,(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) = - ux_1 \wedge \ldots \wedge ux_p$.*

Ak $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \in E_p^T(M)$, $y = y_1 \wedge \ldots \wedge y_q \in E_q^T(M)$, tak $x \,.\, y = = \psi^T(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) \,.\, \psi^T(y_1 \otimes \ldots \otimes y_p) = \psi^T(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes \otimes y_q) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_q$. Špeciálne pre $u_i \in (E_1^T(M) = M$ $u_1 \wedge \ldots \wedge u_m = u_1 \,.\, \ldots \,.\, u_m$.

Veta 4. *Algebra $E^T(M)$ je T-komutatívna, t. j. pre $x \in E_p^T(M)$ a $y \in E_q^T(M)$*

$$x \,.\, y = (-1)^{pqt} y \,.\, x \ (t = \textstyle\sum T).$$

Dôkaz. πx a πy je súčet tenzorov tvaru $x_1 \otimes \ldots \otimes x_k$ z $E_p^{t_1}(V_1) \otimes \ldots \otimes \otimes E_p^{t_k}(V_k)$ resp. $y_1 \otimes \ldots \otimes y_k$ z $E_p^{t_1}(V_1) \otimes \ldots \otimes E_q^{t_k}(V_k)$. Preto stačí dokázať vetu pre x a y také, že $\pi x = x_1 \otimes \ldots . \otimes x_k$ a $\pi y = y_1 \otimes \ldots \otimes y_k$. $\pi x \,.\, \pi y = - (x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) \,.\, (y_1 \otimes \ldots \otimes y_k) = x_1 y_1 \otimes \ldots \otimes x_k y_k = (-1)^{pqt_1} y_1 x_1 \otimes \otimes \ldots \otimes (-1)^{pqt_k} y_k x_k = (-1)^{pq\Sigma t_i} \,.\, [y_1 x_1 \otimes \ldots \otimes y_k x_k] = (-1)^{pqt} (y_1 \otimes \ldots \otimes y_k) \,.\, (x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) = (-1)^{pqt} \pi y \,.\, \pi x$. Odtiaľ $x \,.\, y = (-1)^{pqt} y \,.\, x$.

Dôsledok. *Pre $x_1, \ldots x_p \in M$ platí: $x_{h_1} \wedge \ldots \wedge x_{h_p} = \varrho(H)^t x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$, kde $\varrho(H)$ je rovné jednej, ak permutácia $H = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$ je párna, $\varrho(H) = -1$, ak je nepárna.*

Nájdime teraz bázy modulov $E_p^T(M)$ vyjadrené pomocou báz modulov $V_i\{e_j^i\}$. Zaveďme nasledujúce označenie: N je množina prirodzených čísel $\{1, \ldots n\}$, $H^i = \{h_1^i, \ldots h_p^i\}$ pre $i = 1, \ldots k$ je podmnožina množiny N mohutnosti p, H_j je množina čísel, ktoré sú v množine H^i na j-tom mieste: $H_j = \{h_j^1, \ldots, h_j^k\}$ pre $j = 1, \ldots, p$. $e_{H^i}^j = e_{h_1^i}^j \wedge \ldots \wedge e_{h_p^i}^j$, $e_{H_j} = e_{h^1}^1 \otimes \ldots \otimes e_{h^k}^k$. Pri takomto označení $\pi(e_{H_1} \wedge \ldots \wedge e_{H_p}) = e_{H^1}^1 \otimes \ldots \otimes e_{H^k}^k$. Teraz môžeme sformulovať vetu, ktorej dôkaz je celkom bezprostredný:

Veta 5. *Ak p je menšie alebo rovné n, modul $E_p^T(M)$ má bázu tvorenú prvkami $\{e_{H_1} \wedge \ldots \wedge e_{H_p}\}$, kde H^i sú všetky podmnožiny mohutnosti p množiny N. Ak $p > n$, $E_p^T(M) = \{0\}$.*

Dôkaz. $\pi E_p^T(M) = E_p^{t_1}(V_1) \otimes \ldots \otimes E_p^{t_k}(V_k)$ má bázu tvorenú tenzormi $e_{H^1}^1 \otimes \ldots \otimes e_{H^k}^k$. Preto $\{\pi^{-1}(e_{H^1}^1 \otimes \ldots \otimes e_{H^k}^k)\} = \{e_{H_1} \wedge \ldots \wedge e_{H_p}\}$ je báza $E_p^T(M)$. Ak $p > n$, $E_p^{t_i}(V_i) = \{0\}$.

Dôsledok. *$E_p^T(M)$ má dimenziu $\binom{n}{p}^k$. $E_n^T(M)$ je jednorozmerný a má bázu* $\pi^{-1}(e_N^1 \otimes \ldots \otimes e_N^k) = (e_1^1 \otimes \ldots \otimes e_1^k) \wedge \ldots \wedge (e_n^1 \otimes \ldots \otimes e_n^k)$.

4. V tomto odseku definujeme determinant priestorovej matice podobným spôsobom, ako je to v [1] pre dvojrozmernú maticu a uvedieme niektoré iné charakteristické vlastnosti priestorových determinantov.

Nech $U = \|u_{i, i_1 \ldots i_k}\|$ je $(k+1)$-rozmerná matica rádu n, $V_1 = \ldots V_n = V$, $\{e_j\}$ je zvolená báza vo V a $T = (t_1, \ldots t_k)$ daná signatúra. Nech $u_i = \sum_{i_1 \ldots i_k} u_{i, i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} \in V^k = M$. Tenzor $u = u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_n$ určuje jednoznačne maticu U. Budeme hovoriť, že U je asociovaná s tenzorom u. Potom $E_n^T(M)$ má rozmer 1 a bázu $e_{1 \ldots 1} \wedge \ldots \wedge e_{n \ldots n}$. Preto $u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ je násobok uvedeného vektora bázy. To je motívom nasledujúcej definície:

Definícia 2. *Determinant signatúry T priestorovej matice U je číslo $D^T(U)$ definované vzťahom:*

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_n = D^T(U) \, . \, e_{1 \ldots 1} \wedge \ldots \wedge e_{n \ldots n} \, .$$

Zrejme potom platí vzťah, ktorý budeme ďalej používať:

$$\pi(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n) = D^T(U) \, . \, e_N \otimes \ldots \otimes e_N \, .$$

Príklad. Nech $n = 2$, $T = (1,1)$.

$u_1 = u_{111}e_{11} + u_{112}e_{12} + u_{121}e_{21} + u_{122}e_{22}$, $u_2 = u_{211}e_{11} + u_{212}e_{12} + u_{221}e_{21} + u_{222}e_{22}$. Potom $u_1 \wedge u_2 = \sum_{i,j} u_{1ij}(e_i \otimes e_j) \wedge \sum_{l,m} u_{2lm}(e_l \otimes e_m) = \sum_{i,j,l,m} u_{1ij}u_{2lm}(e_i \otimes e_j) \wedge (e_l \otimes e_m)$. $\pi(u_1 \wedge u_2) = \sum_{i,j,l,m} u_{1ijl}u_{2m}(e_i \wedge e_l) \otimes (e_j \wedge e_m)$. Ak $i = l$ a $j = m$, sú odpovedajúce členy súčtu rovné nule. Preto $\pi(u_1 \wedge u_2) = u_{111}u_{222}(e_1 \wedge e_2) \otimes (e_1 \wedge e_2) + u_{112}u_{221}(e_1 \wedge e_2) \otimes (e_2 \wedge e_1) + u_{121}u_{212}(e_2 \wedge e_1) \otimes (e_1 \wedge e_2) + u_{122}u_{211}(e_2 \wedge e_1) \otimes (e_2 \wedge e_1) = (u_{111}u_{222} - u_{112}u_{221} - u_{121}u_{212} + u_{122}u_{211})(e_1 \wedge e_2) \otimes (e_1 \wedge e_2)$. $D^T(U) = u_{111}u_{222} - u_{112}u_{221} - u_{121}u_{212} + u_{122}u_{211}$.

Z definície nájdeme ľahko explicitné vyjadrenie $D^T(U)$. $\pi(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n) = \pi(\sum_{H_1} u_{1H_1}e_{H_1} \wedge \ldots \wedge \sum_{H_n} u_{nH_n} \, . \, e_{H_n}) = \pi(\sum_{H_1, \ldots H_n} u_{1H_1} \ldots u_{nH_n} \, . \, e_{H_1} \wedge \ldots \wedge e_{H_n}) = \sum_{H_1 \ldots H_n} U_{1H_1} \ldots u_{nH_n} \, . \, e_{H^1} \otimes \ldots \otimes e_{H^n}$. e_{H^j} je nenulový len vtedy, ak H^j je permutáciou množiny N a v tom prípade $e_{H^j} = \varrho(H^j)^{t_j} \, . \, e_N$. Odtiaľ $\pi(u_1 \wedge \ldots \wedge u_n) = \sum_{H^1 \ldots H^n} \varrho(H^1)^{t_1} \ldots \varrho(H^k)^{t_k} u_{1H_1} \ldots u_{nH_n} e_N \otimes \ldots \otimes e_N$. $D^T(U) =$

$= \sum\limits_{H^1 \dots H^k} \varrho(H^1)^{t_1} \dots \varrho(H^k)^{t_k} \,.\, u_{1H_1} \dots u_{nH_n}$, kde sa sčituje cez všetky permutácie množiny N.

O polylineárnej forme f na $M \times \dots \times M$ (i o lineárnej forme, ktorú forma f indukuje na $M^n = M \otimes \dots \otimes M$ a ktorú budeme tiež označovať f), budeme hovoriť, že má signatúru T, ak pre $x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in N^T(M)$ $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Ak položíme $D^T(u_1, \dots, u_n) = D^T(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = D^T(U)$, tým definujeme formu na $M \times \dots \times M$, ktorú budeme označovať D^T. O tejto forme platí veta 6.

Veta 6. *Zobrazenie D^T je polylineárna forma na $M \times \dots \times M$ signatúry T.*

Dôkaz. $\pi(u_1 \wedge \dots \wedge (\alpha u_i + \beta v_i) \wedge \dots \wedge u_n) = D^T(u_1, \dots \alpha u_i + \beta v_i, \dots u_n) \,.\, e_N \otimes \dots \otimes e_N$. Ale $\pi(u_1 \wedge \dots \wedge (\alpha u_i + \beta v_i) \wedge \dots \wedge u_n) = \alpha\pi(u_1 \wedge \dots \wedge u_i \wedge \dots \wedge u_n) + \beta(u_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge u_n) = (D^T(u_1, \dots u_i, \dots u_n) + D^T(u_1, \dots v_i, \dots u_n)) \,.\, (e_N \otimes \dots \otimes e_N)$, z čoho je zrejmé, že forma D^T je polylineárna. Ak $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ patrí do $N^T(M)$, tak $u_1 \wedge \dots \wedge u_n = 0$, teda $0 = D^T(u_1, \dots, u_n) \,.\, (e_N \otimes \dots \otimes e_N)$ a teda $D^T(u_1, \dots, u_n)$ sa musí rovnať nule.

Uvedená vlastnosť charakterizuje formu D^T, ako ukazuje nasledujúca

Veta 7. *Ak f je polylineárna forma na $M \times \dots \times M$ signatúry T, tak $f(u_1, \dots u_n) = \lambda D^T(u_1, \dots, u_n)$ (λ patrí do K).*

Dôkaz. Uvažujeme f a D^T *ako zobrazenia* M^n do K. Pretože sa anulujú na $N_n^T(M)$, existujú zobrazenia $\bar{f}$ a $\bar{D}$ také, že $f = \bar{f} \,.\, \psi^\tau$ a $D^T = \bar{D} \,.\, \psi^\tau$. Pretože $\bar{f}$ a $\bar{D}$ zobrazujú jednorozmerný modul $E_n^T(M)$ do K, existuje také λ, že $\bar{f} = \lambda\bar{D}$. Preto $f = \bar{f}\psi^\tau = \lambda\bar{D}\psi^\tau = \lambda D$.

Pre $z_1 \otimes \dots \otimes z_n \in V$ a $t_i = 0{,}1$ nech $D^{t_i}(z_1, \dots z_n)$ je determinant pre $t_i = 1$ a permanent pre $t_i = 0$ dvojrozmernej matice, ktorej riadky sú $z_1, \dots z_n$. D^{t_i} je lineárna forma na V^n signatúry t_i. Tenzorový súčin foriem $D^{t_i} : D^{t_1} \otimes \otimes \dots \otimes D^{t_k}$ je lineárna forma na $V^n \otimes \dots \otimes V^n$. Pomocou izomorfizmu $\varphi : M^n$ na $V^n \otimes \dots \otimes V^n$ definujeme lineárnu formu Δ^T na $M^n : \Delta^T(u_1 \otimes \otimes \dots \otimes u_n) = (D^{t_1} \otimes \dots \otimes D^{t_k}) \,.\, \varphi(u_1 \otimes \dots \otimes u_n)$. Pritom platí:

Veta 8. *Forma Δ^T má signatúru T.*

Dôkaz. Nech $u = u_1 \otimes \dots \otimes u_n \in N_n^T(M)$. Potom φu patrí do Γ^T, a teda je súčtom prvkov tvaru $y_1 \otimes \dots \otimes y_k$, pričom existuje i také, že $y_i \in N^{t_i}(V_i)$. Preto $[D^{t_1} \otimes \dots \otimes D^{t_k}] \,.\, [y_1 \otimes \dots \otimes y_k] = D^{t_1}(y_1) \,.\, D^{t_2}(y_2) \dots D^{t_k}(y_k) = 0$.

Preto $D^T = \lambda\Delta^T$. Pretože $D^T(e_{1 \dots 1} \otimes \dots \otimes D^T_{n, \dots n}) = 1$ a $\Delta^T(e_{1 \dots 1} \otimes \otimes \dots \otimes e_{n \dots n}) = D^{t_1}(e_1) \otimes \dots \otimes e_n) \dots D^{t_k}(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = 1$, λ sa musí rovnať 1, a tým je dokázaný

Dôsledok. $D^T(u_1, \dots, u_n) = (D^{t_1} \otimes \dots \otimes D^{t_k}) \,.\, \varphi(u_1 \otimes \dots \otimes u_n)$.

Uvedieme ešte dve charakteristiky formy D^T.

Pre tenzor $x \in M^n$ definujeme jeho T-symetrizáciu $a^T x$ nasledovne: $a^T x = \varphi^{-1}[(a_{t_1} \otimes \dots \otimes a_{t_k})\varphi x]$. Ak x patrí do $N^T(M)$, $\varphi x \in \Gamma^T$ a teda je súčtom tenzorov tvaru $y_1 \otimes \dots \otimes y_k$ pričom existuje i také, že $y_i \in N^{t_i}(V_i)$. Preto $(a_{t_1} \otimes \dots \otimes a_{t_k}) \cdot (y_1 \otimes \dots \otimes y_k) = a_{t_1} y_1 \otimes \dots \otimes a_{t_i} y_i \otimes \dots \otimes a_{t_k} y_k = 0$, preto $a^T x = 0$. Ak f je polylineárna forma na $M \times \dots \times M$, (lineárna forma na M^n), formu $a^T f$ na $M \times \dots \times M$ (na M^n) definovanú vzťahom $(a^T f)(x) = f(a^T x)$, pre $x \in M^n$, nazvime T-symetrizáciou formy f. $a^T f$ má signatúru T pretože $(a^T f)x = f(a^T x) = f(0) = 0$ pre $x \in N^T(M^n)$. Nech f^i je forma na V^k definovaná vzťahmi: $f^i(e_{h_1} \otimes \dots \otimes e_{h_k}) = f^i(e_H)$ je rovná jednej, ak $H = \{i, \dots i\}$, ináč je rovné nule. Potom formu D^T charakterizuje nasledujúca

Veta 9. *Forma D^T je T-symetrizáciou formy f:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f^1(x_1) \cdot \ldots \cdot f^n(x_n), \quad x_i \in M.$$

Dôkaz. Nech φf je forma na $V^n \otimes \dots \otimes V^n$ definovaná takto: $(\varphi f)(y_1 \otimes \otimes \dots \otimes y_k) = f(\varphi^{-1}(y_1 \otimes \dots \otimes y_k))$. Alebo: $f(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = (\varphi f)[\varphi(x_1 \otimes \otimes \dots \otimes x_n)]$. $(\varphi f)[e_N \otimes \dots \otimes e_N] = f^1[(e_1 \otimes \dots \otimes e_1) \otimes \dots \otimes f^n(e_n \otimes \dots \otimes \times e_n) = 1$.

$(a^T f)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = f[a^T(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)] = f[a^T \sum_{H_1 \dots H_n} x_{1H_1} \dots x_{nH_n} \cdot e_{H_1} \otimes \otimes \dots \otimes e_{H_n})] = \sum_{H_1 \dots H_n} x_{1H_1} \dots x_{nH_n} \cdot f[a^T(e_{H_1} \otimes \dots \otimes e_{H_n})] = \sum_{H_1 \dots H_n} x_{1H_1} \dots x_{nH_n} \times \times (\varphi f)[a^T(e_{H_1} \otimes \dots \otimes e_{H_n})] = \sum_{H_1 \dots H_n} x_{1H_1} \dots x_{nH_n} \times f(a_{t_1} e_{H^1} \otimes \dots \otimes a_{t_k} e_{H^k}) \cdot a_{t_i} e_{H^i}$ je nula, ak množina H^i má dva rovnaké prvky. Preto $(a^T f)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \sum_{H_1 \dots H_n} (x_{1H_1} \dots x_{nH_n}) \cdot f(\sum_{\sigma \in S_n} \varrho(\sigma)^{t_1} e_{\sigma H_1} \otimes \dots \otimes \sum_{\sigma} \varrho(\sigma)^{t_k} e_{\sigma H^k})$.

Forma f je nenulová (a rovná sa jednej) len vtedy, ak $\sigma H^i = N$ a pre túto permutáciu $\sigma : \varrho(\sigma) = \varrho(H^i)$. Preto

$(a^T f)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \sum_{H^1 \dots H^k} \varrho(H^1)^{t_1} \dots \varrho(H^k)^{t_k} x_{1H_1} \dots x_{nH_n} = D^T(x_1, \dots x_n)$, kde sa sčituje cez všetky permutácie H^j množiny N.

m-tý rez orientácie $\alpha = 0,1, \dots k$, $(k + 1)$-rozmernej matice U je k-rozmerná matica $U_m^\alpha = \|u_{i_0, i_1 \dots i_k}\|$, pričom $i_\alpha = m$. Každému rezu U_m^α možno jednoznačne priradiť tenzor $\sum_{i_0 \dots i_k} u_{i_0 i_1 \dots i_k} \cdot e_{i_0} \otimes \dots \otimes e_{i_{\alpha-1}} \otimes e_{i_{\alpha+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$, ktorý označíme tiež U_m^α. Matica U je zrejme určená udaním jej všetkých rezov niektorej orientácie.

Ak f je forma na $M \times \dots \times M$, nech pre $y_1, \dots y_n \in M$ $f^\alpha(y_1, \dots y_n) = f(x_1, \dots x_n)$, pričom $x_1, \dots x_n$ sú rezy orientácie 0 matice X, ktorej rezy orientácie α sú $y_1, \dots y_n$. Zrejme $f^0(y_1, \dots y_n) = f(y_1, \dots y_n)$. Budeme hovoriť, že forma f má na rezoch orientácie α vlastnosť V, ak forma f^α má vlastnosť V. Pre formu D^T platí:

Veta 10. *Forma D^T je polylineárna na rezoch všetkých orientácií. Na rezoch orientácie $\alpha = 1, \dots k$ je t-symetrická, na rezoch 0-orientácie je ΣT = t-symetrická.*

(Poznamenajme, že 0-symetrická značí symetrická v obvyklom zmysle, 1-symetrická má význam — alternujúca.) Uvedená veta (v inej formulácii) je dokázaná v [3]. Našou úlohou je dokázať, že uvedená vlastnosť charakterizuje formu D^T. Presnejšie: dokážeme, že platí:

Veta 11. *Nech f je forma na M^n polylineárna na rezoch všetkých orientácií, t_α-symetrická na rezoch orientácie α pre $\alpha = 1, \dots, k$. Potom $f = \lambda D^T$, kde $T = (t_1, \dots t_k)$.*

Dôkaz. Z lineárnosti formy f vyplýva, že ak niektorý rez matice asociovanej s $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ je nulový, tak $f(u_1, \dots u_n) = 0$. $f(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = f(\sum_{H_1} u_{1H_1} \cdot e_{H_1} \otimes \dots \otimes \sum_{H_n} u_{nH_n} \cdot e_{H_n}) = f(\sum_{H_1 \dots H_n} u_{1H_1} \dots u_{nH_n} \cdot (e_{H_1} \otimes \dots \otimes e_{H_n})) = \sum_{H_1 \dots H_n} u_{1H_1} \dots u_{nH_n} \cdot f(e_{H_1} \otimes \dots \otimes e_{H_n})$. Ak množina H^α má aspoň dva rovnaké prvky, potom existuje číslo $m \in N$ také, že $m \Subset H^\alpha$, a preto v matici asociovanej s tenzorom $e_{H_1} \otimes \dots \otimes e_{H_n}$ je m-tý rez orientácie α nulový a $f(e_{H_1} \otimes \dots \otimes e_{H_n}) = 0$. Preto forma f má nenulovú hodnotu len vtedy, ak H^α sú permutácie množiny N. Výmenou rezov orientácie α možno docieliť, aby $H^\alpha = N$ (prirodzene usporiadanej), pričom sa iba môže zmeniť znamienko formy, ak orientácia je alternujúca ($t_\alpha = 1$). Ak urobíme také výmeny pre rezy všetkých orientácií $\alpha = 1, \dots k$, dostaneme:

$$f(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = \sum_{H_1 \dots H_n} \varrho(H^1)^{t_1} \dots \varrho(H^k)^{t_k} \cdot u_{1H_1} \dots u_{nH_n} f(e_{1\dots 1} \otimes \dots \otimes e_{n \dots n}) =$$

$$= \lambda D^T(u_1, \dots, u_n).$$

Nech $U = \|u_{i_1 \dots i_k}\|$ je k-rozmerná matica rádu n asociovaná s tenzorom $u_1 \otimes \dots \otimes u_n \in M^n = V^{k-1} \otimes \dots \otimes V^{k-1}$. T nech je signatúra $\{t_1, \dots, t_{k-1}\}$. Matici U možno jednoznačne priradiť tenzor $U = \sum_{i_1 \dots i_k} u_{i_1 \dots i_k} \cdot (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})$ z $M' - V^k$. Potom D^T je forma na M'. Dokážeme, že pre ňu platí nasledujúca

Veta 12. *Existuje polylineárna forma f na $M' \times \dots \times M'$ signatúry $T' = (\sum T, t_1, \dots, t_{k-1})$ taká, že $D^T(U) = f(U, \dots, U)$.*

Dôkaz. Nech $U \wedge \dots \wedge U$ patrí do $E_n^{T'}(M')$. Potom $\pi(U \wedge \dots \wedge U) = D^{T'}(U, \dots, U) \cdot (e_N \otimes \dots \otimes e_N) = D^{T'}(\mathscr{U}) \cdot e_N \otimes \dots \otimes e_N$, kde $\mathscr{U}$ je $(k+1)$-rozmerná matica asociovaná s tenzorom $U \otimes \dots \otimes U \in M'^n$: Na druhej strane: $U \wedge \dots \wedge U = \sum_{i_1, H_1} u_{i_1 H_1} \cdot e_{i_1 H_1} \wedge \dots \wedge \sum_{i_n, H_n} u_{i_n H_n} \cdot e_{i_n H_n} = \sum_{\substack{i_1 \dots i_n \\ H_1 \dots H_n}} u_{i_1 H_1} \dots u_{i_n H_n} (e_{i_1 H_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n H_n}) . e_{i_1 H_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n H_n}$ je nenulový len vtedy, ak $I = \{i_1, \dots i_n\}$ je permutáciou množiny N a v tom prípade je rovný

$\varrho(I)^{\Sigma T} e_{1K_1} \wedge \ldots \wedge e_{nK_n} = e_{1K_1} \wedge \ldots \wedge e_{nK_n}$, pretože $\sum T' = 0$. Teda $\pi(U \wedge \ldots \wedge U) = n! \sum\limits_{K_1 \ldots K_n} u_{1K_1} \ldots u_{nK_n}) \pi(e_{1K_1} \wedge \cdots \wedge e_{nK_n}) = n! \sum\limits_{K_1 \ldots K_n} u_{1K_1} \ldots$ $\ldots u_{nK_n} . (e_{1\ldots n} \otimes e_{K^1} \otimes \ldots \otimes e_{K^k}) = n! \; . \; D^T(u_1, \ldots u_n) \; . \; (e_N \otimes \ldots \otimes e_N)$. Preto $D^T(U) = D^T(u_1, \ldots u_n) = \frac{1}{n!}(D^{T'}(U, \ldots U)) = \frac{1}{n!} D^{T'}(\mathscr{U})$. Forma $f =$ $= \frac{1}{n!} \cdot D^{T'}$ na $M' \times \ldots \times M'$ je hľadanou formou.

5. Nech $U = \|u_{i,i_1 \ldots i_k}\|$ je $(k+1)$-rozmerná matica rádu n, $M, N^1, \ldots N^k$ sú podmnožiny mohutnosti h množiny N, prirodzene usporiadané. Potom determinant signatúry T $(k+1)$-rozmernej matice $\|u_{i,i_1 \ldots i_k}\|$, kde $i \in M$, $i_\alpha \in N^\alpha$ je minor matice U rádu h a signatúry T. Označme ho $U^T_{M,N^1 \ldots N^k}$. Vzhľadom na definíciu determinantu platí:

$U^T_{M,N^1 \ldots N^k} . (e_{N^1} \otimes \ldots \otimes e_{N^k}) = \sum\limits_{T^1 \ldots T^k} u_{m_1 I_1} \ldots u_{m_h I_h}(e_{I^1} \otimes \ldots \otimes e_{I^k})$, kde I^α sú všetky permutácie množiny N^α. Pojem minora nám umožňuje určiť súradnice $u_1 \wedge \ldots \wedge u_h$ z $E^T_h(M)$, lebo: $u_1 \wedge \ldots \wedge u_h = \sum\limits_{I_1 \ldots I_h} u_{1I_1} \ldots u_{hI_h}(e_{I_1} \wedge \ldots \wedge$ $\wedge e_{I_h})$, $\pi(u_1 \wedge \ldots \wedge u_h) = \sum\limits_{I^1 \ldots I^k} u_{1I_1} \ldots u_{hI_h} . (e_{I^1} \otimes \ldots \otimes e_{I^k})$, kde I^α sú permutácie všetkých podmnožín N^α mohutnosti h množiny N. Preto $\pi(u_1 \wedge \ldots \wedge$ $\wedge u_h) = \sum\limits_{N^1 \ldots N^k} (\sum\limits_{I^1 \ldots I^k} u_{1I_1} \ldots u_{hI_h} . e_{I^1} \otimes \ldots \otimes e_{I^k}))$, kde sa sčituje cez všetky podmnožiny N^α množiny N a všetky permutácie I^α odpovedajúcich množín N^α. Odtiaľ dostaneme:
$\pi(u_1 \wedge \ldots \wedge u_h) = \sum\limits_{N^1 \ldots N^k} U^T_{H,N^1 \ldots N^k} . (e_{N^1} \otimes \ldots \otimes e_{N^k})$, kde H je množina $\{1, 2, \ldots h\}$. Výsledok môžeme sformulovať takto:

Veta 13. *Súradnice $u_1 \wedge \ldots \wedge u_h \in E^T_h(M)$ v báze $\{e_{N_1} \wedge \ldots \wedge e_{N_h}\}$ sú rovné minorom $U^T_{H,N^1 \ldots N^k}$, kde U je matica asociovaná s tenzorom $u_1 \otimes \ldots \otimes u_h$.*

Nech je u lineárne zobrazenie V do M a $\sum T = 1$. Potom $E^T_h(u)$ je lineárne zobrazenie $E^1_h(V)$ do $E^T_h(M)$. $E^T_h(u)\, e_H = ue_{h_1} \wedge \ldots \wedge ue_{h_p} = u_1 \wedge \ldots \wedge u_p =$ $= \sum\limits_{N^1 \ldots N^k} U^T_{H,N^1 \ldots N^k} . (e_{N_1} \wedge \ldots \wedge e_{N_p})$. Teda platí

Veta 14. *Maticou zobrazenia $E^T_p(u) : E^1_p(V)$ do $E^T_p(M)$ v bázach $\{e_H\}$ a $\{e_{N_1} \wedge \ldots \wedge e_{N_p}\}$ je $(k+1)$-rozmerná matica $\|U^T_{H,N^1 \ldots N^k}\|$, ktorej prvky sú minory rádu p matice U zobrazenia u.*

LITERATÚRA

[1] Бурбаки Н., *Алгебра*, Москва 1962.
[2] Mac Lane S., *Homology*, Berlin 1963.
[3] Соколов Н. Р., *Пространственные матрицы и их приложения*, Москва 1960.

Došlo 29. 1. 1966.

Katedra matematiky
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity P. J. Šafárika
Košice

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Вильям Хвал

Резюме

Пусть M—тензорное произведение модулей $V_1, \dots, V_k$. В статье показана конструкция некоторой алгебры $E^T(M)$, которую автор называет T-внешней алгеброй модуля M, и доказаны некоторые ее основные свойства. С ее помощью дано определение определителя пространсвтенной матрицы.

Далее доказан ряд свойств, характеризующих определитель пространственной матрицы как полилинейную форму D^T, из которых упомянем лишь следующее:

Теорема. *Если f полилинейная форма сигнатуры T на $M \times \dots \times M$, то $f = \lambda D^T$* (λ принадлежит основному полю).

Доказаны также две теоремы, показывающие геометрическое значение миноров пространственной матрицы.