Alexander Rosa

# К розложениям полного графа на $4k$-угольники

*Matematický časopis*, Vol. 17 (1967), No. 3, 242--246

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126936

Matematický časopis 17 (1967), No. 3

# К РАЗЛОЖЕНИЯМ ПОЛНОГО ГРАФА НА $4k$-УГОЛЬНИКИ

АЛЕКСАНДЕР РОСА (ALEXANDER ROSA), Братислава

В работе [1] А. Коцигом поставлен следующий вопрос: Существует ли разложение полного графа $\langle 25\rangle$ на 20-угольники? В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос, и, кроме того, формулируются и решаются две задачи, тесно связанные с этим вопросом.

Все разложения полного графа, построенные в работе [1], являются т. наз. циклическими разложениями. Более точно, пусть $\langle n\rangle$ — полный граф с $n$ вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$, причем $v_i$, $v_j$ обозначают одну и ту же вершину графа $\langle n\rangle$, если $i \equiv j \pmod n$. Разложение полного графа $\langle n\rangle$ на $4k$-угольники называется циклическим, если оно обладает следующим свойством: Если разложению графа $\langle n\rangle$ принадлежит $4k$-угольник $(v_{i_1}v_{i_2}, v_{i_2}v_{i_3}, \ldots, v_{i_{4k}}v_{i_1})$, то этому разложению принадлежит также $4k$-угольник

$$(v_{i_1+1}v_{i_2+1},\ v_{i_2+1}v_{i_3+1}\ \ldots,\ v_{i_{4k}+1}v_{i_1+1}).$$

Сравнительно легко установить, что не существует циклическое разложение графа $\langle 25\rangle$ на 20-угольники. В самом деле, допустим, что такое разложение существует. В силу цикличности пятнадцать 20-угольников этого разложения необходимо распадаются на три класса $A$, $B$, $C$ такие, что класс $A$ содержит 20-угольники

$$(*)\qquad (v_{i_1+s}v_{i_2+s},\ v_{i_2+s}v_{i_3+s},\ \ldots,\ v_{i_{20}+s}v_{i_1+s}),\quad s = 0,1,2,3,4$$

причем необходимо

$$(**)\qquad (v_{i_1}v_{i_2},\ v_{i_2}v_{i_3},\ \ldots,\ v_{i_{20}}v_{i_1}) \equiv (v_{i_1+5}v_{i_2+5},\ \ldots,\ v_{i_{20}+5}v_{i_1+5})$$

(вполне аналогичную структуру будут иметь также классы $B$ и $C$ — вместо индекса $i$ пишется соответственно $j$ и $k$). Возьмем теперь тот из этих классов (пусть это будет, например, $A$) и в нем тот из 20-угольников, который содержит ребро $v_1v_6$. Из (**) мы получаем, что этот 20-угольник содержит также ребра $v_6v_{11}$, $v_{11}v_{16}$, $v_{16}v_{21}$, $v_{21}v_1$, что противоречит тому, что мы имеем дело с 20-угольником.

С другой стороны, если отказаться от требования цикличности, то разложение графа $\langle 25 \rangle$ на 20-угольники существует. Описание одного из таких разложений дается в таблице. В этой таблице вершина $v_i$ обозначена только через $i$; через $x, y$ и $z$ соответственно обозначена произвольная вершина соответственно $v_x$, $v_y$ и $v_z$ графа $\langle 25 \rangle$. Все числа в таблице берутся по модулю 25.

*

Займемся теперь следующими двумя задачами:

Пусть $(n, k)$ — такая пара натуральных чисел, что

(1) $n(n-1)/8k$ — целое число; (2) $n > 4k$. Среди пар $(n, k)$, удовлетворяющих (1) и (2), найти пару

(I) с минимальным $n$,

(II) с минимальным $k$

такую, что не существует циклического разложения полного графа $\langle n \rangle$ на $4k$-угольники.

Мы докажем, что пара (25, 5) является решением задачи (I) и решением задачи (II).

Сначала докажем, что пара (25, 5) является решением задачи (I). Выпишем все пары $(n, k)$, удовлетворяющие (1), (2) для $n \leqq 25$. Это такие пары: (a) (9,1); (b) (17,1); (c) (17,2); (d) (25,1); (e) (25,3); (f) (25,5). Для пар (a)—(e) имеем $n \equiv 1 \pmod{8k}$, следовательно, согласно теореме 1 из [1] существует циклическое разложение графа $\langle n \rangle$ на $4k$-угольники в каждом из этих случаев. Следовательно, пара (25,5) является решением задачи (I), и как видно из доказательства, она является одновременно единственным ее решением.

Докажем теперь, что пара (25,5) является решением задачи (II). Если пара $(n, k)$ удовлетворяет условиям (1), (2) и притом $k = 1$ или 2 или 4, то необходимо $n \equiv 1 \pmod{8k}$. Тогда согласно теореме 1 из [1] существует циклическое разложение графа $\langle n \rangle$ на $4k$-угольники. Если пара $(n, 3)$ удовлетворяет условиям (1), (2), то мы должны иметь либо (i) $n \equiv 1 \pmod{24}$ либо (ii) $n - 9 \pmod{24}$. В случае (i) снова выполнено условие теоремы 1 из [1] и, следовательно, существует циклическое разложение графа $\langle n \rangle$ на 12-угольники. Покажем, что оно существует также в случае (ii).

Итак, пусть $n = 24q + 9$, где $q$ — натуральное. Мы хотим доказать, что существует циклическое разложение графа $\langle 24q + 9 \rangle$ на 12-угольники для всякого натурального $q$. (Число этих 12-угольников равно $qn + n/3$. Напомним еще, что в графе $\langle 24q + 9 \rangle$ имеются ребра длины $1, 2, \ldots, 12q+4$; относительно длины ребра в полном графе см. [1], [2].)

С этой целью составим из $12q$ чисел $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, \ldots, 4q + 7$, $4q + 8$, $4q + 10$, $4q + 11$, $\ldots$, $12q + 3$ матрицу $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ с $q$ строками ($q \geqq 2$) и 12 столбцами следующим образом:

Таблица 1

| $K_1, K_2, \ldots, K_5$ $j = 0, 1, \ldots, 4$ | $K_6, K_7, \ldots, K_{10}$ $j = 0, 1, \ldots, 4$ | $K_{11}$ | $K_{12}$ | $K_{13}$ | $K_{14}$ | $K_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+j, \quad x+j+12$ | $y+j, \quad y+j+9$ | $z, \quad z+8$ | $z, \quad z+5$ | $z, \quad z+19$ | $z, \quad z+10$ | $z+1, \quad z+6$ |
| $x+j+12, x+j+23$ | $y+j+9, \quad y+j+2$ | $z+8, \quad z+2$ | $z+5, \quad z+13$ | $z+19, z+13$ | $z+10, z+16$ | $z+6, \quad z+11$ |
| $x+j+23, x+j+1$ | $y+j+2, \quad y+j+3$ | $z+2, \quad z+21$ | $z+13, z+18$ | $z+13, z+7$ | $z+16, z+6$ | $z+11, z+16$ |
| $x+j+1, \quad x+j+5$ | $y+j+3, \quad y+j+5$ | $z+21, z+16$ | $z+18, z+12$ | $z+7, \quad z+22$ | $z+6, \quad z+21$ | $z+16, z+24$ |
| $x+j+5, \quad x+j+17$ | $y+j+5, \quad y+j+14$ | $z+16, z+22$ | $z+12, z+4$ | $z+22, z+2$ | $z+21, z+11$ | $z+24, z+4$ |
| $x+j+17, \quad x+j+3$ | $y+j+14, y+j+7$ | $z+22, z+14$ | $z+4, \quad z+21$ | $z+2, \quad z+10$ | $z+11, z+1$ | $z+4, \quad z+9$ |
| $x+j+3, \quad x+j+6$ | $y+j+7, \quad y+j+8$ | $z+14, z+4$ | $z+21, z+15$ | $z+10, z+4$ | $z+1, \quad z+7$ | $z+9, \quad z+14$ |
| $x+j+6, \quad x+j+10$ | $y+j+8, \quad y+j+10$ | $z+4, \quad z+19$ | $z+15, z+10$ | $z+4, \quad z+23$ | $z+7, \quad z+17$ | $z+14, z+19$ |
| $x+j+10, x+j+22$ | $y+j+10, y+j+19$ | $z+19, z+9$ | $z+10, z+20$ | $z+23, z+3$ | $z+17, z+2$ | $z+19, z+2$ |
| $x+j+22, x+j+8$ | $y+j+19, y+j+12$ | $z+9, \quad z+17$ | $z+20, z+1$ | $z+3, \quad z+8$ | $z+2, \quad z+12$ | $z+2, \quad z+7$ |
| $x+j+8, \quad x+j+11$ | $y+j+12, y+j+13$ | $z+17, z+11$ | $z+1, \quad z+9$ | $z+8, \quad z+16$ | $z+12, z+22$ | $z+7, \quad z+12$ |
| $x+j+11, x+j+15$ | $y+j+13, y+j+15$ | $z+11, z+5$ | $z+9, \quad z+3$ | $z+16, z+1$ | $z+22, z+3$ | $z+12, z+17$ |
| $x+j+15, x+j+2$ | $y+j+15, y+j+24$ | $z+5, \quad z+24$ | $z+3, \quad z+11$ | $z+1, \quad z+18$ | $z+3, \quad z+13$ | $z+17, z+22$ |
| $x+j+2, \quad x+j+13$ | $y+j+24, y+j+17$ | $z+24, z+7$ | $z+11, z+19$ | $z+18, z+24$ | $z+13, z+23$ | $z+22, z+5$ |
| $x+j+13, x+j+16$ | $y+j+17, y+j+18$ | $z+7, \quad z+15$ | $z+19, z+24$ | $z+24, z+9$ | $z+23, z+8$ | $z+5, \quad z+10$ |
| $x+j+16, x+j+20$ | $y+j+18, y+j+20$ | $z+15, z+23$ | $z+24, z+14$ | $z+9, \quad z+15$ | $z+8 \quad z+14$ | $z+10, z+18$ |
| $x+j+20, x+j+7$ | $y+j+20, y+j+4$ | $z+23, z+18$ | $z+14. z+6$ | $z+15, z+20$ | $z+14, z+20$ | $z+18, z+8$ |
| $x+j+7, \quad x+j+18$ | $y+j+4, \quad y+j+22$ | $z+18, z+3$ | $z+6, \quad z+23$ | $z+20, z+12$ | $z+20, z+5$ | $z+8, \quad z+13$ |
| $x+j+18, x+j+21$ | $y+j+22, y+j+23$ | $z+3, \quad z+20$ | $z+23, z+17$ | $z+12, z+6$ | $z+5, \quad z+15$ | $z+13, z+21$ |
| $x+j+21, x+j$ | $y+j+23, y+j$ | $z+20, z$ | $z+17, z$ | $z+6, \quad z$ | $z+15, z$ | $z+21, z+1$ |

$$a_{ij} = \begin{cases} j+1 & j = 1, \ldots, 5 \\ j+2 & j = 6, \ldots, 10 \\ 12q + j - 9 & j = 11, 12 \\ 4q - 4i + j + 12 & j = 1, \ldots, 4 \\ 4q + 8i + j - 11 & j = 5, \ldots, 12 \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1 \\ \\ i > 1 \end{matrix}$$

Образуем из матрицы **А** матрицу $\mathbf{A}' = \|a'_{ij}\|$ с таким же числом строк и столбцов следующим образом: $|a'_{ij}| = a_{ij}$ для всех $i = 1, \ldots, q$; $= 1, \ldots, 12$, причем в матрице $\mathbf{A}'$ отрицательными будут элементы (и только они) $a'_{1,8}$, $a'_{1,9}$, $a'_{1,10}$ и , $a'_{i,2}$, $a'_{i,4}$, $a'_{i,6}$, $a'_{i,7}$, $a'_{i,9}$, $a'_{i,11}$ для $i = 2, \ldots, q$.

Образуем матрицу $\mathbf{B} = \|b_{ij}\|$ с $q$ строками ($q$ натуральное) и 12 столбцами следующим образом:

(1) для $q = 1$ $\mathbf{B} = \|2, 3, 4, 5, 6, 8, -10, 9, -11, -12, 15, 14\|$

(2) для $q \geqq 2$ образуем **B** из матрицы $\mathbf{A}'$ таким образом, что элементы строк $\mathbf{A}'$ переставляем:

(а) элементы первой строки согласно тождественной перестановке;

(б) элементы каждой из оставшихся строк (т. е. от второй до $q$-той) согласно перестановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

Легко убедиться, что для каждого $i = 1, \ldots, q$ имеет место

$$\sum_{j=1}^{12} b_{ij} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Обозначим еще

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{j} b_{is}.$$

Тогда циклическое разложение графа $\langle 24q + 9 \rangle$ на 12-угольники будут образовать:

1. 12-угольники $K_{ij}$ ($i = 1, \ldots, q$; $j = 1, \ldots, n$):

   $K_{ij} - (v_j v_{c_{i1}+j},\ v_{c_{i1}+j} v_{c_{i2}+j},\ \ldots,\ v_{c_{i,11}+j} v_j)$;

   число этих 12-угольников равно $qn$.

2. 12-угольники $K_s$ ($s = 1, \ldots, 8q + 3$):

$$K_s = (v_s v_{12q+4+s},\ v_{12q+4+s} v_{8q-5+s},\ v_{8q-5+s} v_{8q+2+s},\ v_{8q+2+s} v_{8q+3+s},$$

$$v_{8q+3+s} v_{20q+7+s},\ v_{20q+7+s} v_{16q-2+s},\ v_{16q-2+s} v_{16q+5+s},$$

$v_{16q+5+s}v_{16q+6+s}\,,\ v_{16q+6+s}v_{4q+1+s}\,,\ v_{4q+1+s}v_{24q+1+s}\,,$

$v_{24q+1+s}v_{24q+8+s}\,,\ v_{24q+8+s}v_s)\,;$

число этих 12-угольников равно $n/3 = 8q + 3$.

Итак, мы доказали, что никакая пара $(n, 3)$ не может быть решением задачи (II). Вместе с раньше сказанным мы получаем, что пара (25,5) является решением задачи (II). Можно доказать, что — подобно тому, как в задаче (I) — эта пара является одновременно единственным решением задачи (II) (т. е. можно доказать, что полный граф $\langle 40q + 25 \rangle$, где $q$ — натуральное, можно циклически разложить на 20-угольники), однако доказательства мы здесь приводить не будем.

В заключение выскажем еще одну гипотезу:

Для существования циклического разложения графа $\langle n \rangle$ на $4k$-угольники необходимо и достаточно выполнения следующих условий:
(1) $n(n - 1)/8k$ — целое число; (2) $n \geqq 8k + 1$.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Коциг А., *О разложениях полного графа на 4k-угольники*, Mat.-fyz. časop. *15* (1965), 229—233.

[2] Rosa A., *O cyklických rozkladoch kompletného grafu na nepárnouholníky*, Časop. pěstov. mat. *91* (1966), 53—63.



Поступило 10. 5. 1966.



*ČSAV, Matematický ústav Slovenskej akadémie vied, Bratislava*